УДК 517.94

Г. С. Жукова, Н. П. Черных

Структура формальных решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений n-го порядка

1. Введение. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения и системы уравнений имеют многочисленные приложения. Для их решения разработаны различные асимптотические методы (Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского, М. И. Вишика и Л. А. Люстерника, В. Вазова, С. Ф. Фещенко и Н. И. Шкиля, А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова, С. А. Ломова и др.), позволяющие строить ряды по малым возмущениям, сходящиеся к точным решениям асимптотически.

Рассмотрим сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon^{p_\nu} a_\nu(t, \varepsilon) x^{(\nu)} = 0, \quad x^{(0)} = x(t), \quad x^{(\nu)} = \frac{d^\nu x(t)}{dt^\nu}, \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$, ε — малый параметр. Относительно коэффициентов предполагается

а) $a_0(t, \varepsilon) \not\equiv 0$, $a_n(t, \varepsilon) \not\equiv 0$;

б) имеют место асимптотические представления

$$a_\nu(t, \varepsilon) = \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s a_{\nu s}(t), \qquad \nu = \overline{0, n}, \tag{2}$$

и $a_{\nu s} \in E$, где E — пространство бесконечное число раз непрерывно дифференцируемых по $t \in [0, T]$ функций со значениями во множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$;

в) числа $p_0, p_1, \ldots, p_n$ — целые, причем $p_0 = 0$, $p_\nu \geqslant 0$, $\nu = \overline{1, n-1}$, $p_n > 0$.

Приближенным интегрированием линейных дифференциальных уравнений второго и более высокого порядка с сингулярностью занимались многие авторы (см. [1, с. 29, 2, 3]). Здесь имеются определенные трудности, связанные с выбором формы представления решений, так как уже для уравнения второго порядка асимптотическое разложение решений идет по дробным степеням ε, которые в каждом конкретном случае нужно уметь находить.

В настоящей статье указан способ определения степеней разложения решений уравнения (1) по соотношению между числами $0, p_1, \ldots, p_n$ и свойству коэффициентов $a_{\nu 0}(t)$, $\nu = \overline{0, n}$.

Для этого предварительно сделаем в уравнении (1) замену переменных

$$x(t) = \exp \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau, \tag{3}$$

что приведет к задаче нахождения функции $\lambda(t)$ из нелинейного дифференциального уравнения

$$\varepsilon^{p_n} a_n(t, \varepsilon) \lambda^n(t) + \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{\nu=l}^{n} \varepsilon^{p_\nu} a_\nu(t, \varepsilon) \sum_{i_1=l-1}^{\nu-1} \sum_{i_2=l-2}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_{l-1}=1}^{i_{l-2}-1} \binom{\nu-1}{i_1} \times$$
$$\times \binom{i_1-1}{i_2} \times \cdots \times \binom{i_{l-2}-1}{i_{l-1}} \lambda^{(\nu-1-i_1)}(t) \lambda^{(i_1-1-i_2)}(t) \ldots$$
$$\ldots \lambda^{(i_{l-2}-1-i_{l-1})}(t) \lambda^{(i_{l-1}-1)}(t) + \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon^{p_\nu} a_\nu(t, \varepsilon) \lambda^{(\nu-1)}(t) +$$
$$+ a_0(t, \varepsilon) = 0, \tag{4}$$

которое с учетом представлений (2) можно представить в виде

$$\sum_{l=0}^{n} \varepsilon^{\rho_l} \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s F_{ls}[\lambda^l] = 0. \tag{5}$$

Здесь

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!\,(a-b)!}, \quad \rho_n = p_n, \quad \rho_l = \min(p_l, \rho_{l+1}), \quad l = \overline{1, n-1}, \quad \rho_0 = 0, \tag{6}$$

операторы $F_{ls}: E \to E$ задаются на функциях $\lambda^l \in E$ выражениями

$$F_{0s}[\lambda^0](t) \equiv a_{0s}(t), \quad F_{1s}[\lambda^1](t) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu, s-p_\nu+\rho_1}(t) \lambda^{(\nu-1)}(t),$$

$$F_{ls}[\lambda^l](t) \equiv \sum_{\nu=l}^{n} a_{\nu,s-p_\nu+\rho_l}(t) \sum_{i_1=l-1}^{\nu-1} \sum_{i_2=l-2}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_{l-1}=1}^{i_{l-2}-1} \binom{\nu-1}{i_1} \times \binom{i_1-1}{i_2} \times \cdots$$

$$\cdots \times \binom{i_{l-2}-1}{i_{l-1}} \lambda^{(\nu-1-i_1)}(t) \lambda^{(i_1-1-i_2)} \cdots \lambda^{(i_{l-2}-1-i_{l-1})}(t) \lambda^{(i_{l-1}-1)}(t),$$

$$l = \overline{2, n-1}, \tag{7}$$

$$F_{ns}[\lambda^n](t) \equiv a_{ns}(t) \lambda^n(t).$$

2. Метод диаграммы Ньютона. Для построения формальных решений уравнения (5)—(7) применим некоторый аналог метода диаграммы Ньютона, развитого для уравнений в $\mathbb{C}$ вида

$$\sum_{l=0}^{n} \varepsilon^{\rho_l} \sum_{s\geqslant 0} \varepsilon^s F_{ls} \xi^l = 0, \tag{8}$$

где ξ — искомая функция параметра ε, $\rho_l \geqslant 0$ и F_{ls} — заданные вещественные числа, причем $F_{00} \neq 0$, $F_{n0} \neq 0$. Напомним (см. § 2 [4]), что для реализации метода на плоскости выбирают прямоугольную систему координат и строят точки $A_0 = (0; \rho_0)$, ..., $A_k = (k; \rho_k)$, ..., $A_n = (n; \rho_n)$, где k принимает те из значений 1, ..., $n-1$, для которых $F_{k0} \neq 0$. После этого через точку A_0 проводят прямую M_0, совпадающую с осью ординат, и вращают ее вокруг A_0 против часовой стрелки до тех пор, пока она не заденет какую-либо другую из построенных точек, например A_l. На прямую M_1, проходящую через A_0 и A_l, может попасть несколько из нанесенных точек. Если A_{l_1} — точка на M_1 с наибольшей абсциссой, то поступим с ней и прямой M_1 так же, как с A_0 и M_0, и т. д. В результате описанной процедуры на плоскости будет построена выпуклая ломаная, называемая диаграммой Ньютона уравнения (8), ниже которой нет ни одной из первоначально нанесенных на плоскости точек.

Доказано (см. [4]), что решения уравнения (8) имеют вид $\xi = \varepsilon^{k_0}\xi_0 + \varepsilon^{k_1}\xi_1 + \varepsilon^{k_2}\xi_2 + \ldots$, $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$, $\xi_0 \neq 0$, где k_0 равно тангенсам углов наклона звеньев ломаной с отрицательным направлением оси абсцисс, а ξ_0 находится из определяющего уравнения, соответствующего рассматриваемому звену. Точнее, если точки $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_q}$ лежат на одном звене диаграммы и $\nu_1 < \ldots < \nu_q$, то

$$k_0 = (\rho_{\nu_1} - \rho_{\nu_q})/(\nu_q - \nu_1) \tag{9}$$

и под определяющим уравнением этого звена понимается $\sum\limits_{l=1}^{q} F_{\nu_l,0} z^{\nu_l} = 0$. Для нахождения k_1 и ξ_1 следует в (8) сделать замену $\xi = \varepsilon^{k_0}\xi_0 + \eta$, получить уравнение для η, построить его диаграмму Ньютона, описанным выше приемом найти первое слагаемое в разложении $\eta = \varepsilon^{k_1}\xi_1 + \varepsilon^{k_2}\xi_2 + \ldots$ и т. д.

Известно (см. [4, с. 44]), что в случае, когда ξ_0 является простым корнем определяющего уравнения, соответствующего звену диаграммы с коэффициентом наклона $k_0 = u/m$, и ρ_l — целые числа, то уравнение (8) имеет формальное решение $\xi = \varepsilon^{k_0} \sum\limits_{s\geqslant 0} \gamma^s \xi_s$, где $\gamma = \varepsilon^{1/m}$, $m > 0$. При этом для нахождения ξ_s эффективен метод неопределенных коэффициентов.

Предпримем попытку применить к уравнению (5), рассматриваемому в E, метод диаграммы Ньютона. Его решение будем искать в виде разложения

$$\lambda(t) = \varepsilon^{k_0}\mu_0(t) + \varepsilon^{k_1}\mu_1(t) + \ldots, \; k_0 < k_1 < \ldots, \; \mu_0(t) \not\equiv 0. \tag{10}$$

(Вопросы асимптотической сходимости ряда (10) в данной работе не исследуются.) Под диаграммой уравнения (5) нами подразумевается выпуклая ломаная, построенная как и для уравнения (8). (В последнем случае точка

$A_k = (k; \rho_k)$ наносится на координатной плоскости при $F_{k0}[\lambda^k] \not\equiv 0$.) Число k_0 для звена диаграммы, на котором лежат точки $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_q}$ ($\nu_1 < \cdots < \nu_q$), вычисляется по формуле (9). Соответствующее определяющее уравнение имеет вид

$$L[z] \equiv \sum_{l=1}^{q} F_{\nu_l,0}[z^{\nu_l}] = 0. \tag{11}$$

В общем случае оно не будет алгебраическим уравнением с постоянными коэффициентами, в связи с чем, естественно, возникнет проблема его разрешимости.

3. Свойства диаграммы уравнения (4). Так как уравнение (4) приводится к виду (5), то описанным выше способом для него может быть построена диаграмма Ньютона. Анализ формул (6) и (7) позволяет сделать следующие выводы:

1. Диаграмма уравнения (4) расположена в первой четверти, причем с учетом предположения а) ее исходной точкой будет $A_0 = (0; 0)$ и конечной $A_n = (n; p_n)$. Поскольку при этом $p_n > 0$, то диаграмма всегда содержит возрастающий участок, для звеньев которого $k_0 < 0$.

2. Проекция диаграммы уравнения (4) на ось абсцисс равна n, т. е. порядку уравнения (1). Диаграмма может содержать от одного до n звеньев, но это определяется в каждом конкретном случае в зависимости от расположения точек $A_k = (k; \rho_h)$, $k = \overline{0, n}$, на координатной плоскости.

3. Если $p_i > 0 \ \forall i = \overline{1, n}$, то и $\rho_i > 0 \ \forall i = \overline{1, n}$, откуда следует, что диаграмма уравнения (4) состоит только из возрастающего участка.

4. Если среди чисел $p_1, \ldots, p_{n-1}$ есть равные нулю и p_{l_0} из них с наибольшим индексом, то $\rho_i = 0$, $i = \overline{0, l_0}$, и $\rho_i > 0$, $i = \overline{l_0 + 1, n}$. Это означает, что в рассматриваемой ситуации диаграмма уравнения (4) имеет не только возрастающий, но и горизонтальный участок, т. е. звено, лежащее на оси абсцисс и соединяющее $l_0 + 1$ точку $A_i = (i; 0)$, $i = \overline{0, l_0}$.

5. Если $p_l \geqslant \rho_{l+1} > 0$ для некоторого l, то точка A_l не будет лежать на диаграмме уравнения (4) и при построении диаграммы ее можно не наносить на плоскость. Действительно, при сделанных предположениях $A_l = (l; \rho_{l+1})$, поэтому диаграмма не пройдет через точку A_l, так как в противном случае точка $A_{l+1} = (l+1; \rho_{l+1})$ лежала бы ниже ломаной Ньютона, что невозможно. Таким образом, если при рассмотрении возрастающего участка диаграммы точка A_ν лежит на одном из его звеньев, то $p_\nu = \rho_\nu$ и $A_\nu = (\nu; p_\nu)$.

4. Определяющее уравнение. Рассмотрим одно из звеньев возрастающего участка диаграммы уравнения (4). Пусть на нем расположены точки $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_q}$, где $0 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_q \leqslant n$. Тогда по свойству 5 $\rho_{\nu_l} = p_{\nu_l} \ \forall l = \overline{1, q}$ и $0 \leqslant p_{\nu_1} < \ldots < p_{\nu_q} \leqslant p_n$. Кроме того в силу (6) и выпуклости ломаной Ньютона

$$p_i \geqslant \rho_i > y(i) \ \forall i \neq \nu_l \text{ и } p_{\nu_l} = y(\nu_e), \quad l = \overline{1, q}, \tag{12}$$

где $y(\tau)$ — прямая, проходящая через точки $A_{\nu_1} = (\nu_1; p_{\nu_1})$ и $A_{\nu_q} = (\nu_q; p_{\nu_q})$.

Для рассматриваемого звена $k_0 < 0$ и вычисляется по формуле (9). Определяющее уравнение в соответствии с (7), (11) и (12) имеет вид

$$L[z] \equiv \sum_{l=1}^{q} a_{\nu_l,0}(t) z^{\nu_l} = 0 \tag{13}$$

и является алгебраическим уравнением с переменными коэффициентами.

При рассмотрении «горизонтального» звена диаграммы $k_0 = 0$ и по свойству 4 на звено попадает $l_0 + 1$ точка $A_i = (i; 0)$, $i = \overline{0, l_0}$, не зависимо от того, будут ли числа p_i, $i = \overline{1, l_0 - 1}$, равны нулю или больше нуля. Если при этом $p_{\nu_0} = \ldots = p_{\nu_q} = 0$, где $0 = \nu_0 < \ldots < \nu_q = l_0 \leqslant n - 1$, то определяющее уравнение рассматриваемого звена имеет вид

$$\sum_{l=0}^{q} a_{\nu_e,0}(t)\,\mu_0^{\nu_l}(t) + \sum_{k=1}^{q} a_{\nu_k,0}(t) \sum_{l=1}^{\nu_k-1} \sum_{i_1=l-1}^{\nu_k-1} \sum_{i_2=l-2}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_{l-1}=1}^{i_{l-2}-1} \binom{\nu_k-1}{i_1} \times$$

$$\times \binom{i_1-1}{i_2} \times \ldots \times \binom{i_{l-2}-1}{i_{l-1}} \mu_0^{(\nu_k-1-i_1)}(t)\,\mu_0^{(i_1-1-i_2)}(t) \ldots$$

$$\ldots \mu_0^{(i_{l-2}-1-i_{l-1})}(t)\,\mu_0^{(i_{l-1}-1)}(t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{14}$$

и лишь при $l_0 = 1$ (т. е. при $q = 1$ и $\nu_1 = 1$) является алгебраическим, именно $a_{10}(t)\,\mu_0(t) + a_{00}(t) = 0$. При $l_0 \geqslant 2$ (14) — дифференциальное уравнение.

5. Построение решений по звену возрастающего участка диаграммы. Договоримся решение алгебраического уравнения (13) $\mu_0(t)$ называть простым корнем на $[0, T]$, если

$$\frac{dL}{d\mu_0}(t) \equiv \sum_{l=1}^{q} \nu_l a_{\nu_l,0}(t)\,\mu_0^{\nu_l-1}(t) \neq 0, \qquad t \in [0, T]. \tag{15}$$

Установим для уравнения (4) следующий аналог метода диаграммы Ньютона в случае простого корня определяющего уравнения.

Теорема 1. *Пусть для уравнения* (4) *точки* $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_q}$ $(\nu_1 < \ldots < \nu_q)$ *лежат на одном звене возрастающего участка диаграммы. Пусть функции* $a_{\nu_l,0}(t)$, $l = \overline{1, q}$, *таковы, что определяющее уравнение* (13) *имеет простой корень* $\mu_0 \in E$. *Тогда дифференциальное уравнение* (4) *имеет формальное частное решение*

$$\lambda(t) = \varepsilon^{k_0} \sum_{s \geqslant 0} \gamma^s \mu_s(t), \quad k_0 = \frac{p_{\nu_1} - p_{\nu_q}}{\nu_q - \nu_1} = \frac{u}{m}, \quad \gamma = \varepsilon^{1/m}, \tag{16}$$

где $\mu_s \in E$ *находятся по рекуррентной формуле*

$$\mu_s(t) = h_{s-1}(t) / \frac{dL}{d\mu_0}(t), \qquad s = 1, 2, 3, \ldots, \tag{17}$$

и $h_{s-1} : [0, T] \to \mathbb{C}$ *имеет вид* (22).

Доказательство теоремы основано на определении коэффициентов $\mu_s(t)$ так, чтобы разложение (16) обращало левую часть уравнения (4) в степенной ряд с нулевыми коэффициентами. Для этого подставим в (4) представления (2) и (16), умножим обе его части на $\varepsilon^{-p_{\nu_1}-\nu_1 k_0}$ и произведем необходимые действия с формальными степенными рядами. В результате получим уравнение

$$\sum_{l=1}^{n} \varepsilon^{p_l - y(l)} \sum_{s \geqslant 0} \gamma^s \sum_{j_1=0}^{s} \cdots \sum_{j_{l-1}=0}^{s-j_1-\ldots-j_{l-2}} \sum_{j_l=0}^{[(s-j_1-\ldots-j_{l-1})/m]} a_{l,j_l}(t)\,\mu_{j_1}(t) \ldots$$

$$\ldots \mu_{j_{l-1}}(t)\,\mu_{s-j_1-\ldots-j_{l-1}-mj_l}(t) + \sum_{\nu=2}^{n} \sum_{l=1}^{\nu-1} \varepsilon^{p_\nu - y(l)} \sum_{s \geqslant 0} \gamma^s \sum_{j_1=0}^{s} \cdots$$

$$\cdots \sum_{j_{l-1}=0}^{s-j_1-\ldots-j_{l-2}} \sum_{j_l=0}^{[(s-j_1-\ldots-j_{l-1})/m]} \sum_{i_1=l-1}^{\nu-1} \sum_{i_2=l-2}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_{l-1}=1}^{i_{l-2}-1} \binom{\nu-1}{i_1} \times$$

$$\times \binom{i_1-1}{i_2} \times \ldots \times \binom{i_{l-2}-1}{i_{l-1}} a_{\nu,j_l}(t)\,\mu_{j_1}^{(i_1-1-i_2)}(t)\,\mu_{j_{l-2}}^{(i_{l-2}-1-i_{l-1})}(t)\,\mu_{j_{l-1}}^{(i_{l-1}-1)}(t) \times$$

$$\times \mu_{s-j_1-\ldots-j_{l-1}-mj_l}^{(\nu-1-i_1)}(t) + \varepsilon^{-y(0)} \sum_{s \geqslant 0} \gamma^s \delta_{s/m,[s/m]} a_{0,s/m}(t) = 0. \tag{18}$$

Здесь $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, $[\alpha]$ — целая часть числа α.

Так как в силу (12) и отрицательности числа k_0

$$p_l - y(l) \geqslant 0 \quad \forall\, l = \overline{0, n} \text{ и } p_\nu - y(l) \geqslant y(\nu) - y(l) > 0 \text{ при } \nu > l, \qquad (19)$$

то после изменения в (18) пределов суммирования с учетом определения $\Big[\sum\limits_{s\geqslant 0} \gamma^s f_s(t) = 0\Big] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} [f_s(t) \equiv 0,\ s = 0, 1, \ldots]$ приходим к соотношениям

$$\sum_{l=1}^{q} a_{\nu_l,0}(t)\, \mu_0^{\nu_l}(t) \equiv 0, \quad t \in [0, T], \qquad (20)$$

$$\left(\sum_{l=1}^{q} \nu_l a_{\nu_l 0}(t)\, \mu_0^{\nu_l - 1}(t)\right) \mu_s(t) - h_{s-1}(t) \equiv 0, \quad t \in [0, T], \qquad (21)$$

которые должны выполняться за счет соответствующего выбора $\mu_s(t)$. В (21) через $h_{s-1} : [0, T] \to \mathbb{C}$ обозначена функция

$$h_{s-1}(t) = -\Bigg[\delta_{s/m,[s/m]} a_{0,s/m+y(0)}(t) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq \nu_j,\, j=\overline{1,q}}}^{n} \ \sum_{j_1=0}^{s-m(p_l - y(l))} \ \sum_{j_2=0}^{s-m(p_l-y(l))-j_1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{j_{l-1}=0}^{s-m(p_l-y(l))-j_1-\ldots-j_{l-2}} \ \sum_{j_l=0}^{[(s-m(p_l-y(l))-j_1-\ldots-j_{l-1})/m]} a_{l,j_l}(t)\, \mu_{j_1}(t) \ldots$$

$$\ldots \mu_{j_{l-1}}(t)\, \mu_{s-j_1-\ldots-j_{l-1}-mj_l-m(p_l-y(l))}(t) + \sum_{l=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{\nu_l - 1} \sum_{j_k=1}^{s-1} \sum_{j_{k+1}=0}^{s-j_k} \cdots \right.$$

$$\cdots \sum_{j_{\nu_l-1}=0}^{s-j_k-\ldots-j_{\nu_l-2}} \ \sum_{j_{\nu_l}=0}^{[(s-j_k-\ldots-j_{\nu_l-1})/m]} a_{\nu_l, j_{\nu_l}}(t)\, \mu_0^{k-1}(t)\, \mu_{j_k}(t) \ldots$$

$$\left. \ldots \mu_{j_{\nu_l-1}}(t)\, \mu_{s-j_k-\ldots-j_{\nu_l-1}-mj_{\nu_l}}(t) + \sum_{j=1}^{[s/m]} a_{\nu_l, j}(t)\, \mu_0^{\nu_l - 1}(t)\, \mu_{s-mj}(t) \right) +$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{n} \sum_{l=1}^{\nu-1} \ \sum_{j_1=0}^{s-m(p_\nu-y(l))} \cdots \sum_{j_{l-1}=0}^{s-m(p_\nu-y(l))-j_1-\ldots-j_{l-2}} \ \sum_{j_l=0}^{[(s-m(p_\nu-y(l))-j_1-\ldots-j_{l-1})/m]} \times$$

$$\times \sum_{i_1=l-1}^{\nu-1} \ \sum_{i_2=l-2}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_{l-1}=1}^{i_{l-2}-1} \binom{\nu-1}{i_1} \times \binom{i_1 - 1}{i_2} \times \ldots$$

$$\ldots \times \binom{i_{l-2}-1}{i_{l-1}} a_{\nu, j_l}(t)\, \mu_{j_1}^{(i_1-1-i_2)}(t) \ldots$$

$$\ldots \mu_{j_{l-2}}^{(i_{l-2}-1-i_{l-1})}(t)\, \mu_{j_{l-1}}^{(i_{l-1}-1)}(t)\, \mu^{(\nu-1-i_1)}_{s-m(p_\nu-y(l))-j_1-\ldots-j_{l-1}-mj_l}(t)\Bigg]. \qquad (22)$$

С учетом (19) замечаем, что уравнение (21) для функции $\mu_s(t)$ имеет рекуррентный характер, так как при вычислении $h_{s-1}(t)$ по формуле (22) из функций $\mu_j(t)$ участвуют только $\mu_0(t), \ldots, \mu_{s-1}(t)$. Кроме того в (21) множитель при $\mu_s(t)$ совпадает с $\dfrac{dL}{d\mu_0}(t)$ (см. (15)). Равенство (20) совпадает с определяющим уравнением $L[\mu_0] = 0$. Таким образом, при выполнении условий теоремы равенства (20), (21) выполняются тождественно по $t \in [0, T]$ на функциях $\mu_s(t)$, найденных по формуле (17).

Отметим, что дифференцирование по t функций $\mu_j(t)$ в формуле (22) возможно в силу следующих рассуждений. Поскольку $\mu_0 \in E$, то с учетом предположения о гладкости коэффициентов $a_{\nu s}(t)$ заключаем, что $h_0 \in E$ и $\frac{dL}{d\mu_0} \in E$, откуда $\mu_1 \in E$. Аналогично из того, что $\mu_0, \ldots, \mu_{k-1} \in E$, следует $h_{k-1} \in E$, откуда $\mu_k \in E$. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Замечание 1. Уравнение (13) есть алгебраическое уравнение степени $n_1 = \nu_q - \nu_1$. Поэтому в случае, когда все корни этого уравнения простые, теорема 1 позволяет построить для уравнения (4), а тем самым с учетом замены (3) и для уравнения (1), n_1 формальное частное решение, т. е. ровно столько, какова длина проекции рассматриваемого звена диаграммы на ось абсцисс. (Напомним, что в силу свойства 2 суммарная длина проекций всех звеньев диаграммы равна n).

6. Частные случаи расположения диаграммы уравнения (4). Если диаграмма уравнения (4) состоит только из одного звена и все корни соответствующего определяющего уравнения простые, то с учетом замечания 1 для уравнения (1) будет построено n формальных частных решений. В частности, как следствие теоремы 1 справедливо утверждение.

Теорема 2. *Пусть дополнительно к предположениям* а)—в)

$$p_k > \frac{k}{n} p_n \ \forall k = \overline{1, n-1} \text{ и } a_{00}(t) \neq 0, \quad a_{n0}(t) \neq 0, \quad t \in [0, T].$$

Тогда дифференциальное уравнение (1) *имеет n формальных решений*

$$x_i(t) = \exp\left(\varepsilon^{-p_n/n} \sum_{s \geqslant 0} \gamma^s \int_0^t \mu_{si}(\tau)\, d\tau\right), \quad \mu_{0i}^{(t)} = \left(-\frac{a_{00}(t)}{a_{n0}(t)}\right)_i^{1/n}, \qquad i = \overline{1, n},$$

где $\mu_{si}(t)$ находятся по формулам (17), (22), $\gamma = \varepsilon^{1/m}$, *число $m = 1$, если число $-p_n/n$ — целое, в противном случае m совпадает со знаменателем дроби $-p_n/n$.*

Если возрастающий участок диаграммы уравнения (4) содержит звено, на котором расположены только две концевые точки (т. е. $q = 2$), то при выполнении условий $a_{\nu_1,0}(t) \neq 0$ и $a_{\nu_2,0}(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$, определяющее уравнение звена имеет $\nu_2 - \nu_1$ простых корней $\mu_{0i} = (-a_{\nu_1 0}(t)/a_{\nu_2 0}(t))_i^{1/(\nu_2-\nu_1)}$. Отсюда, в частности, следует утверждение.

Теорема 3. *Если возрастающий участок диаграммы уравнения* (4) *состоит из n звеньев и $a_{i0}(t) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, то дифференциальное уравнение* (1) *имеет n формальных решений*

$$x_i(t) = \exp\left(\varepsilon^{p_i - p_{i+1}} \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s \int_0^t \mu_{si}(\tau)\, d\tau\right), \quad \mu_{0i}(t) = -\frac{a_{i0}(t)}{a_{i+1,0}(t)},$$

где $\mu_{si}(t)$ находятся по формулам (17), (22) *при $m = 1$ и $\mu_0(t) = \mu_{0i}(t)$.*

7. Построение решений по горизонтальному звену диаграммы. Пусть в уравнении (1) $p_{l_0} = 0$ и $p_i > 0$ $\forall i = \overline{l_0 + 1, n}$, где $1 \leqslant l_0 \leqslant n - 1$. Если при этом $l_0 = 1$, то определяющее уравнение горизонтального звена является алгебраическим (см. п. 4) и в случае $a_{10}(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$, имеет простой корень. Поэтому, повторяя рассуждения п. 5 и учитывая значение $k_0 = 0$, приходим к утверждению.

Теорема 4. *Пусть дополнительно к предположениям* а)—в) $p_0 = p_1 = 0$, $p_i > 0$ *при* $i \geqslant 2$ *и* $a_{10}(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$. *Тогда дифференциальное уравнение* (1) *имеет формальное частное решение*

$$x(t) = \exp\left(\sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s \int_0^t \mu_s(\tau)\, d\tau\right), \quad \mu_0(t) = -\frac{a_{00}(t)}{a_{10}(t)},$$

$$\mu_s(t) = \frac{h_{s-1}(t)}{a_{10}(t)}, \qquad s = 1, 2, \ldots,$$

где $h_{s-1}(t)$ находится по формуле (22) *при $m = 1$, $y(l) = 0$, $q = 1$, $\nu_1 = 1$.*

Теперь рассмотрим случай, когда в уравнении (1) $p_{\nu_0} = \ldots = p_{\nu_q} = 0$, где $0 = \nu_0 < \ldots < \nu_q = l_0$ и $l_0 \geqslant 2$. Согласуясь с диаграммой Ньютона, для горизонтального звена $k_0 = 0$. Не прибегая к замене (3), будем строить формальное решение уравнения (1) непосредственно, используя разложение

$$x(t) = \sum_{s\geqslant 0} \varepsilon^s y_s(t) \tag{23}$$

и метод неопределенных коэффициентов.

Подставляя выражения (2) и (23) в уравнение (1), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем уравнения для определения неизвестных функций $y_s(t)$:

$$\sum_{k=0}^{q} a_{\nu_k,0}(t)\, y_0^{(\nu_k)}(t) \equiv 0, \tag{24}$$

$$\sum_{k=0}^{q} a_{\nu_k,0}(t)\, y_s^{(\nu_k)}(t) = h_{s-1}(t), \qquad s = 1, 2, 3, \ldots, \tag{25}$$

где

$$h_{s-1}(t) = -\left[\sum_{k=0}^{q}\sum_{i=1}^{s} a_{\nu_k,i}(t)\, y_{s-i}^{(\nu_k)}(t) + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\nu_k}}^{n}\sum_{i=0}^{s-p_\nu} a_{\nu i}(t)\, y_{s-p_\nu-i}^{(\nu)}(t)\right].$$

Таким образом, $y_0(t)$ должно быть решением линейного однородного дифференциального уравнения l_0-го порядка (что равно длине горизонтального звена диаграммы), а $y_s(t)$ при знании общего интеграла уравнения (24) находится из рекуррентного уравнения (25) методом вариации. Если в качестве $y_{0j}(t)$ взять линейно независимые решения уравнения (24), то для каждого из них из уравнений (25) однозначно определяются все последующие коэффициенты разложения (23). Тем самым для уравнения (1) будет построено l_0 формальных частных решений, т. е. столько, какова длина рассматриваемого горизонтального звена диаграммы.

Отметим, что уравнения (14) и (24) совпадают с точностью до замены

$$y_0(t) = \exp\int_0^t \mu_0(\tau)\, d\tau,$$

8. Заключение. Если определяющее уравнение, соответствующее числу $k_0 < 0$, имеет кратный корень $\mu_0(t)$ $\left(\text{т. е. } \dfrac{dL}{d\mu_0}(t) \equiv 0 \;\; \forall\, t \in [0, T]\right)$, то теорема 1 неприменима. В этом случае для нахождения частных решений уравнения (1) следует с помощью замены $\lambda(t) = \varepsilon^{k_0}\mu_0(t) + \eta(t)$ перейти к уравнению для $\eta(t)$ и подвергнуть его исследованию методом диаграммы Ньютона.

Замечание 2. В предложенном подходе ограничение $p_0 = 0$ не является существенным. Аналогично можно исследовать уравнение (1), где $p_0 > 0$, $p_{l_0} = 0$, $p_i > 0$, $i = \overline{l_0 + 1, n}$, и l_0 — одно из чисел $1, \ldots, n-1$. В последнем случае диаграмма содержит три участка: убывающий —звено, соединяющее точки $(0;\, p_0)$ и $(1;\, 0)$; горизонтальный — звено на оси абсцисс от точки $(1;\, 0)$ до точки $(l_0;\, 0)$ и возрастающий участок с началом в точке $(l_0;\, 0)$ и концом в точке $(n;\, p_n)$.

1. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М.: Наука, 1981.— 400 с.
2. *Фещенко С. Ф.*, *Шкиль Н. И.*, *Николенко* Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев : Наук. думка, 1966.— 251 с.
3. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— К.: Вища шк., 1971.— 226 с.
4. *Вайнберг М. М.*, *Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1969.— 528 с.

Воронеж. ун-т

Получено 29.01.85