УДК 519.21

П. К. Хобзей

О слабом пределе мартингала ранга единицы

Пусть (Ω, F, P) — полное вероятностное пространство, F_t^{ξ} — поток σ-алгебр, порожденный $\xi: F_t^{\xi} = \sigma\{\xi_s, s \leqslant t\}$, $\bigvee_{i=1}^{k} F_t^{\xi_i}$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все σ-алгебры $F_t^{\xi_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Определение. *Мартингал $\xi(t)$ назовем мартингалом ранга k, если существует k независимых винеровских процессов $w_1(t), w_2(t), \ldots, w_k(t)$ таких, что $F_t^{\xi} = \bigvee_{i=1}^{k} F_t^{w_i}$.*

В данной работе доказывается утверждение, что существует последовательность мартингалов $\eta_k(t)$ ранга 1, которые слабо сходятся к мартингалу $\eta(t)$ ранга бесконечности.

1. Зададим последовательность непрерывных мартингалов $\xi_k(\alpha, t)$, зависящих от параметра α, следующим образом:

$$\xi_k(\alpha, t) = \sqrt{2} \int_0^t \sin(\alpha k w(s))\, dw(s), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Утверждение 1. *Совместные распределения процессов $\xi_1(\alpha, t), \ldots, \xi_n(\alpha, t)$ сходятся к совместному распределению независимых винеровских процессов $w_1(t), \ldots, w_n(t)$ при $\alpha \to \infty$.*

Доказательство. При фиксированном k рассмотрим последовательность $\{\xi_k^{(n)}(\alpha_n, t)\}_{n \geqslant 1}$, $\alpha_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Так как $\xi_k^{(n)}(\alpha_n, t)$ — последовательность непрерывных мартингалов, то для того чтобы конечномерные распределения процессов $\xi_k^{(n)}(\alpha_n, t)$ сходились к конечномерным распределениям винеровского процесса $w_k(t)$, достаточно, чтобы для всех t последовательность характеристик $\langle \xi_k^{(n)}(\alpha_n, t) \rangle_t$ стремилась к t по вероятности при $n \to \infty$ (см. теорему 1 [1, с. 389]).

Подсчитаем характеристику мартингала $\xi_k(\alpha, t)$:

$$\langle \xi_k(\alpha) \rangle_t = 2 \int_0^t \sin^2(k\alpha w(s))\, ds =$$

$$= \int_0^t (1 - \cos(2k\alpha w(s)))\, ds = t - \int_0^t \cos(2k\alpha w(s))\, ds.$$

Лемма. *$M\left(\int_0^t \cos(2\alpha k w(s))\, ds\right)^2 \to 0$ при $\alpha \to \infty$.*

Доказательство. Сделаем замену переменных:

$$M\left(\int_0^t \cos 2k\alpha w(s)\, ds\right)^2 = M\left(\frac{1}{(2k\alpha)^2} \int_0^{(2k\alpha)^2 t} \cos w_1(u)\, du\right)^2,$$

где $w_1(u) = (2\alpha k)\, w(s/(2\alpha k)^2)$ — винеровский процесс. Обозначим $(2k\alpha)^2 t$ через τ. Достаточно доказать, что

$$\lim_{\tau \to \infty} M\left(\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos w_1(u)\, du\right)^2 = 0.$$

Известно представление процесса $\int\limits_0^\tau \cos w(u)\,du$ в виде [2]

$$\int\limits_0^\tau \cos w(u)\,du = 4\sin^2\frac{w(\tau)}{2} - 2\int\limits_0^\tau \sin w(s)\,ds.$$

При достаточно больших τ выполняется неравенство

$$M\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \cos w(u)\,du\right)^2 < \frac{32}{\tau^2} + \frac{8}{\tau^2} M\left(\int\limits_0^\tau \sin w(s)\,dw(s)\right)^2,$$

но

$$M\left(\int\limits_0^\tau \sin w(s)\,dw(s)\right)^2 = \int\limits_0^\tau M\sin^2 w(s)\,ds < \tau.$$

Следовательно,

$$\lim_{\tau\to\infty} M\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \cos w(u)\,du\right)^2 \leqslant \lim_{\tau\to\infty}\frac{32}{\tau^2} + \lim_{\tau\to\infty}\frac{8}{\tau} = 0.$$

Понятно, что и

$$\lim_{\tau\to\infty} M\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \sin w(u)\,du\right)^2 = 0.$$

Значит, конечномерные распределения $\xi_k^{(n)}(\alpha_n, t)$ сходятся к конечномерным распределениям винеровских процессов $w_k(t)$.

Подсчитаем взаимную характеристику мартингалов $\xi_k(\alpha, t)$, $\xi_n(\alpha, t)$:

$$\langle\xi_k, \xi_n\rangle_t = \frac{1}{4}[\langle\xi_k + \xi_n\rangle_t - \langle\xi_k - \xi_n\rangle_t] =$$

$$= 2\int\limits_0^t \sin(k\alpha w(s))\sin(n\alpha w(s))\,ds,$$

l.i.m. $\langle\xi_k, \xi_n\rangle_t = 0$, так как

$$M\left(\int\limits_0^t \sin(k\alpha w(s))\sin(n\alpha w(s))\,ds\right)^2 \leqslant M\left(\int\limits_0^t \sin(n\alpha w(s))\,ds\right)^2 \to 0,\ \alpha\to\infty.$$

Нормы процессов $\xi_k(\alpha, t)$, $\xi_n(\alpha, t)$ ограничены, следовательно, в скалярном произведении можно перейти к пределу по α. Значит $\langle w_k, w_n\rangle_t = 0$, что и доказывает независимость $w_k(t)$ и утверждение 1.

2. Зададим последовательность мартингалов $\{\eta^{(n)}(\alpha, t)\}_{n\geqslant 1}$:

$$\eta^{(n)}(\alpha, t) = \int\limits_0^t \Psi\left(\int\limits_0^{s_1}\Psi\left(\int\limits_0^{s_2}\ldots\int\limits_0^{s_{n-1}}\Psi(\xi_{n+1}(\alpha, s_n))\,d\xi_n(\alpha, s_n)\right)\ldots\right)d\xi_1(\alpha, s_1),$$

где $\Psi(x) = 1 + \pi^{-1}\operatorname{arctg} x$. Заметим, что $\Psi(x)$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом π^{-1} и ограничена числом 2.

Утверждение 2. *Последовательность* $\{\eta^{(n)}(\alpha, t)\}_{n\geqslant 1}$ *сходится в среднеквадратическом.*

Доказательство. Действительно, при $m > n$ с учетом липшицевости $\Psi(x)$ и того, что

$$\langle\xi_n(\alpha)\rangle_t = t - \int\limits_0^t \cos(2k\alpha w(s))\,ds < 2t,$$

имеем

$$M|\eta^{(m)}(\alpha, t) - \eta^{(n)}(\alpha, t)|^2 < 4\cdot 2^n\cdot\pi^{-2(n-1)}\frac{t^n}{n!}$$

(подробнее см. [4]).

Следовательно, при $n, m \to \infty$ $M|\eta^{(m)}(\alpha, t) - \eta^{(n)}(\alpha, t)|^2 \to 0$.

Пусть $\text{l.i.m.}\, \eta^{(n)}(\alpha, t) = \eta(\alpha, t)$. Зададим последовательность $\{\eta^{(n)}(t)\}_{n\geq 1}$:

$$\eta^{(n)}(t) = \int_0^t \Psi\left(\int_0^{s_1} \Psi\left(\int_0^{s_2} \dots \int_0^{s_{n-1}} \Psi(w_{n+1}(s_n))\, dw_n(s_n) \dots\right) dw_2(s_2)\right) dw_1(s_1),$$

где $w_k(s)$ — слабый предел $\xi_k(\alpha, s)$ при $\alpha \to \infty$. Последовательность $\eta^{(n)}(t)$ сходится в среднеквадратическом к некоторому процессу $\eta(t)$ (см. [4]).

Утверждение 3. *Конечномерные распределения процессов* $\eta(\alpha, t)$ *сходятся к конечномерным распределениям процессов* $\eta(t)$ *при* $\alpha \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим следующую разность:

$$\eta(\alpha, t) - \eta(t) = \eta(\alpha, t) - \eta^{(n)}(\alpha, t) + \eta^{(n)}(\alpha, t) - \eta^{(n)}(t) + \eta^{(n)}(t) - \eta(t).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем n такое, чтобы $\|\eta(\alpha, t) - \eta^{(n)}(\alpha, t)\| < \varepsilon/3$ и $\|\eta(t) - \eta^{(n)}(t)\| < \varepsilon/3$. Следовательно, достаточно доказать, что распределение $\eta^{(n)}(\alpha, t)$ сходится к распределению $\eta^{(n)}(t)$ при фиксированном n.

Докажем это утверждение для $n = 2$:

$$\eta_\alpha^{(2)}(t) = \int_0^t \Psi(\xi_2(\alpha, s_1))\, d\xi_1(\alpha, s_1), \quad \eta^{(2)}(t) = \int_0^t \Psi(w_2(s_1))\, dw_1(s_1).$$

По определению стохастический интеграл — это предел в среднеквадратическом стохастического интеграла, у которого интегрируется ступенчатая функция. Поэтому можно добиться того, чтобы распределение $\eta_\alpha^{(2)}(t)$ совпадало с распределением

$$\zeta_\alpha^{(2)}(t) = \sum_{t_{k+1}\leq t} \overline{\Psi}(\alpha, t_k)\,[\xi_1(\alpha, t_{k+1}) - \xi_1(\alpha, t_k)] + \\ + \overline{\Psi}(\alpha, t)\,[\xi_1(\alpha, t) - \xi_1(\alpha, \sup_{t_k\leq t} t_k)].$$

Здесь $\overline{\Psi}(\alpha, t)$ — ступенчатая функция, аппроксимирующая $\Psi(\xi_2(\alpha, t))$. Аналогично распределение $\eta^{(2)}(t)$ совпадает с распределением

$$\zeta^{(2)}(t) = \sum_{t_{k+1}\leq 1} \overline{\Psi}(t_k)\,[w_1(t_{k+1}) - w_1(t_k)] + \overline{\Psi}(t)\,[w_1(t) - w_1(\sup_{t_k<t} t_k)].$$

Поскольку функция $\Psi(x)$ непрерывна, монотонна и ограничена, а конечномерные распределения $\xi_i(\alpha, t)$ стремятся к конечномерным распределениям $w_i(t)$ при $\alpha \to \infty$, то конечномерные распределения $\zeta_\alpha^{(2)}(t)$ будут стремиться к конечномерным распределениям $\zeta^{(2)}(t)$ при $\alpha \to \infty$. По индукции легко доказать это для $\eta_\alpha^{(n)}(t)$ и $\eta^{(n)}(t)$.

3. Все процессы $\eta^n(\alpha, t)$ есть мартингалы ранга 1 [3]. Предельный процесс $\eta(t)$ — мартингал ранга ∞ [4]. Следовательно, при слабой сходимости ранг мартингала не является инвариантом.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 612 с.
2. *Кулинич Г. Л.* Об асимптотическом поведении распределения функционалов типа $\int_0^t g(\xi(s))\, ds$ от диффузионного процесса.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1973, вып. 8, с. 99—105.
3. *Lane D. A.* On the fields of some Brownian martingales.— Ann. Probab. 1978, 6, N 3, p. 499—508.
4. *Хобзей П. К.* Мартингал, порождающий бесконечную последовательность винеровских процессов.— Киев, 1985.— 6 с.— Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 29.07.85, № 1601 Ук-85 Деп.

Киев. ун-т — Получено 21.02.84