УДК 517.535.4

М. Н. Шеремета

О целых функциях с вещественными тейлоровскими коэффициентами

Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \operatorname{Im} a_n = 0, \quad n \geqslant 0, \tag{1}$$

— целая трансцендентная функция, $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, а (ν_k) — последовательность перемен знаков коэффициентов, т. е.

$$a_{\nu'_k} a_{\nu_k} < 0, \quad \nu'_k = \max\{n < \nu_k : a_n \neq 0\}.$$

Если функция (1) имеет конечный порядок и $k/\nu_k \to 0$, $k \to \infty$, то, как показано в [1],

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln|f(r)|}{\ln M(r, f)} = 1. \tag{2}$$

Здесь естественно возникает вопрос о возможности замены условия конечности порядка условием конечности нижнего порядка. Кроме того, интересно знать, насколько условие $k/\nu_k \to 0$, $k \to \infty$, необходимо в классе целых функций конечного нижнего порядка для выполнения равенства (2). Этим вопросам посвящена данная статья.

Для любой возрастающей последовательности (ν_k) натуральных чисел положим $n(t) = \sum_{\nu_k \leqslant t} 1$, $\lambda(t) = \sum_{\nu_k \leqslant t} \nu_k^{-1}$, $\Delta(t) = n(t)/t$ и назовем (ν_k) правильно колеблющейся последовательностью, если

$$\sup\left\{\frac{\Delta(t)}{\Delta(r)} : t \geqslant r\right\} = O(1), \quad r \to +\infty.$$

Через D и D_1 обозначим соответственно верхние плотность и логарифмическую плотность последовательности (ν_k), т. е.

$$D = \varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1} n(t), \quad D_1 = \varlimsup_{t\to+\infty} (\ln t)^{-1} \lambda(t).$$

Т е о р е м а 1. *Пусть (ν_k) — правильно колеблющаяся последовательность натуральных чисел. Если $D = 0$ и (ν_k) является последовательностью перемен знаков коэффициентов некоторой целой функции (1) конечного нижнего порядка, то для этой функции (1) выполняется равенство (2). Если же $D > 0$, то существует ограниченная на положительном луче целая трансцендентная функция (1) конечного нижнего порядка, для которой (ν_k) является последовательностью перемен знаков коэффициентов.*

Так как для правильно колеблющейся последовательности существует число $K \in]0, +\infty[$ такое, что $D_1 \leqslant D \leqslant KD_1$, то теорема 1 вытекает из двух следующих утверждений.

Т е о р е м а 2. *Если последовательность (ν_k) перемен знаков коэффициентов целой функции (1) конечного нижнего порядка такая, что $D = 0$, то для этой функции имеет место равенство (2).*

Т е о р е м а 3. *Для любой возрастающей последовательности (ν_k) натуральных чисел такой, что $D_1 > 0$, существует ограниченная на положительном луче целая трансцендентная функция (1) конечного нижнего порядка, для которой (ν_k) является последовательностью перемен знаков коэффициентов.*

Как видно из теорем 2 и 3, вопрос о справедливости равенства (2) в случае $D_1 = 0$ и $D > 0$ остается открытым. По-видимому, это связано с методикой доказательств. Теорему 3 нетрудно получить из результатов Ковари [2]. Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 из [1], но при этом кроме теоремы 2 из [1] следует применить следующую лемму, вытекающую из результатов Фентона [3].

Лемма 1. *Если целая функция* (1) *имеет конечный нижний порядок* λ, $\mu(r, f)$ — *максимальный член ряда* (1), $\nu = \nu(r, f)$ — *его центральный индекс*, $\sigma(r) = \sum\limits_{n>2\nu} |a_n| r^n$ *и* $0 < q < 1$, *то для всех* $r > 0$ *вне некоторого множества нижней логарифмической плотности* $\leqslant q$ *выполняются неравенства*

$$\ln \mu(r, f) \geqslant \frac{q}{2(\lambda + q)} \nu(r, f)$$

и

$$\sigma(r) \leqslant \frac{8(\lambda + q)}{q} \mu(r, f) \exp\left\{-\frac{q\nu(r, f)}{8(\lambda + q)}\right\}.$$

Лемму 1 существенно усилить нельзя. Возможно, теорема 2 из [1] допускает такое усиление, что при его применении условие $D = 0$ в теореме 2 можно будет заменить условием $D_1 = 0$.

1. *Шеремета М. Н.* Об одной теореме Пойа.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 1, с. 119—124.
2. *Kővari T.* On a result of A. J. Macintyre.—In: Essai dedicated to A. J. Macintyre, Ohio, 1970, p. 217—222.
3. *Fenton P. C.* Wiman—Valiron theory for entire functions of finite lower growth.— Trans. Amer. Math. Soc., 1979, 252, N 531, p. 221—232.

Львов. ун-т

Получено 13.03.84