УДК 519.9

Б. Н. Пшеничный, П. И. Гинайло

О некоторых обобщениях дискретного принципа максимума

Дискретный вариант теории оптимального управления играет существенную роль в приложениях, так как очень часто информация о состоянии процесса поступает, а управление процессом осуществляется в дискретные моменты времени. Это наглядно видно при решении задач экономического планирования, технологии и организации производства, исследования операций.

В имеющихся работах по данной тематике рассматривается задача оптимального управления как объект применения теории необходимых условий экстремума. Новой явилась постановка этой задачи в виде экстремальной для дифференциальных включений [1].

В настоящей статье рассматривается такая же задача оптимального управления, но с дополнительными ограничениями на координаты траектории. При этом предполагается, что помимо выбора траектории, удовлетворяющей многозначному включению, возможен выбор в каждый момент времени некоторых параметров, за счет которых меняются фазовые ограничения на траекторию и значение оптимизируемого функционала. В дальнейшем при использовании терминологии из теории многозначных отображений и необходимых условий экстремума мы следуем монографии [1].

Пусть $X = R^n$, $Y = R^m$, a — некоторое многозначное отображение. Скалярное произведение двух векторов $x \in X$ и $x^* \in X^*$ (где X^* — дубликат пространства X) будем обозначать $\langle x, x^* \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i x^{i*}$.

Под траекторией [1—3] будем понимать всякую последовательность векторов $\{x(t)\}$, $t = \overline{0, T}$, удовлетворяющих включению $x(t+1) \in a(x(t))$, $t = \overline{0, T-1}$.

Наша задача состоит в том, чтобы среди всех траекторий выбрать оптимальную, т. е. такую, что $x(0) \in N$, $x(T) \in M$, где N и M — заданные множества, и которая минимизирует сумму $\sum\limits_{t=0}^{T} f_0(x(t), y(t))$ при условии $g(x(t), y(t)) = 0$, $y(t) \in Y$, $t = \overline{0, T}$, где $g(x, y)$ — гладкое отображение $R^n \times R^m$ в R^s. Будем искать только необходимые условия минимума, заранее предполагая, что оптимальная траектория существует.

Эту задачу будем решать при следующих предположениях:

А. Отображение a таково, что конусы касательных направлений $\mathcal{K}_a(x(t), x(t+1))$, $t = \overline{0, T-1}$, являются локальными шатрами [1]. Конусы касательных направлений $\mathcal{K}_N(x_0)$ и $\mathcal{K}_M(x_T)$ также являются локальными шатрами.

В. Функции $f_0(x(t), y(t))$ в точках оптимальной траектории допускают верхнюю выпуклую аппроксимацию $h_t((\overline{x}, \overline{y}), (x, y))$ [1], которая непрерывна по $(\overline{x}, \overline{y})$. Таким образом определены субдифференциалы $\partial f_0(x(t), y(t)) = \partial h_t(0, (x, y))$.

С. Функции $g(x(t), y(t))$ гладкие, т. е. имеют непрерывные производные по x и y [4, 5]. Тогда определены матрицы g'_x и g'_y с элементами соответственно $\{\partial g_i/\partial x^j\}_{\substack{i=\overline{1,s} \\ j=\overline{1,n}}}$ $\{\partial g_i/\partial y^j\}_{\substack{i=\overline{1,s} \\ j=\overline{1,m}}}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия предположений. Тогда для того чтобы траектория* $\{x_t\}$, $t=\overline{0,T}$, *и последовательности* y_t, $t=\overline{0,T}$, *минимизировали сумму* $\sum\limits_{t=0}^{T} f_0(x(t), y(t))$ *при* $x(0)\in N$, $x(T)\in M$ *и* $g(x(t), y(t))=0$, $y(t)\in Y$, *необходимо, чтобы нашлись не все одновременно равные нулю векторы* $x^*(t)$, $t=\overline{0,T}$, x^*_M *и* $\lambda(t)\in R^s$ $\lambda(t)\geqslant 0$, *имеющие вид строки, и число* $\lambda_0\geqslant 0$ *такие, что выполняются соотношения*

$$x^*_t\in a^*(x^*_{t+1}; (x_t, x_{t+1}))+\lambda(t)\,g'_x(x, y)+\lambda_0\partial f_0(x, y),\ \ t=\overline{0,T},$$

$$x^*_N\in\mathcal{K}^*_N(x_0),\ \ x^*_M\in\mathcal{K}^*_M(x_T),\ \ x^*_T+x^*_M\in\lambda_0\partial f_0(x(T), y(T)),$$

$$\lambda_0 f'_{0y}(x, y)+\lambda(t)\,g'_y(x, y)=0,\ \ \lambda(t)\,g(x, y)=0,$$

где сопряженное отображение a^* *определено в* [1—3].

Доказательство. При доказательстве этой теоремы используем схему доказательства теорем IV.6.2 и VI.2.1 из [1].

Рассмотрим пространство траекторий. Пусть $\omega\in R^{(T+1)n+(T+1)m}$—вектор с компонентами $\omega=(x_0, x_1, \ldots, x_T, y_0, y_1, \ldots, y_T)$. Пусть

$$f(\omega)=\sum_{t=0}^{T} f_0(x(t), y(t)),\quad \tilde N=\{\omega: x_0\in N\},\quad \tilde M=\{\omega: x_T\in M\},$$

$$\tilde M_t=\{\omega: (x_t, x_{t+1})\in\operatorname{gf} a\},\quad G_t=\{\omega: g(x(t), y(t))=0\}.$$

Теперь наша задача заключается в минимизации функции на множестве $\tilde N\cap\tilde M\cap\left(\bigcap\limits_{t=0}^{T-1}\tilde M_t\right)\cap\left(\bigcap\limits_{t=0}^{T} G_t\right)$.

Вычислим конусы касательных направлений к множествам $\tilde M_t$, $\tilde N$, $\tilde M$, G_t.

а). Рассмотрим конусы касательных направлений к множествам $\tilde M_t$. Но ограничение $\omega\in\tilde M_t$ распространяется лишь на компоненты $x(t)$, $y(t)$ траектории. Все остальные компоненты произвольны [1]. Поэтому конусы касательных направлений будут иметь вид

$$\mathcal{K}_{\tilde M_t}(\omega)=\{\overline{\omega}: (\overline{x}_t, \overline{x}_{t+1})\in\mathcal{K}_a((x_t, x_{t+1}))\}.$$

По определению $\omega^*\in\mathcal{K}^*_{\tilde M_t}(\omega)$ тогда и только тогда, когда $\langle\overline{\omega}, \omega^*\rangle=$ $=\sum\limits_{k=1}^{T}\langle\overline{x}_k, x^*_n\rangle\geqslant 0$ для всех $\overline{\omega}\in\mathcal{K}_{\tilde M_t}(\omega)$.

Но компоненты x_k вектора $\overline{\omega}\in\mathcal{K}_{\tilde M_t}(\omega)$ при $k\neq t$, $t+1$ произвольны. Поэтому это соотношение возможно лишь при $x^*_k=0$, $k\neq t$, $t+1$, $y^*_k=0$ и имеет вид

$$\langle\overline{x}_t\, x^*_t\rangle+\langle\overline{x}_{t+1}, x^*_{t+1}\rangle\geqslant 0,\quad (\overline{x}_t, \overline{x}_{t+1})\in\mathcal{K}_a((x_t, x_{t+1})),$$

т. е.

$$(x^*_t, x^*_{t+1})\in\mathcal{K}^*_a((x_t, x_{t+1})).$$

Следовательно,

$$\mathcal{K}^*_{\tilde M_t}(\omega)=\{\omega^*: (x^*_t, x^*_{t+1})\in\mathcal{K}^*_a((x_t, x_{t+1})),\ \ x^*_k=0,\ k\neq t,\ t+1,\ y^*_k=0\}.$$

б). $\omega\in\tilde N$, т. е. $x_0\in N$, а все остальные компоненты вектора ω произвольны. Значит

$$\mathcal{K}_{\tilde N}(\omega)=\{\overline{\omega}: \overline{x}_0\in\mathcal{K}_N(x_0)\},\ \ \mathcal{K}^*_{\tilde N}(\omega)=$$

$$=\{\omega^*: x^*_0\in\mathcal{K}^*_N(x_0),\ \ x^*_t=0,\ t\neq 0;\ y^*_t=0\}.$$

в). Аналогично для $\omega \in \tilde{M}$ получаем

$$\mathcal{K}_{\tilde{M}}(\omega) = \{\bar{\omega}: \bar{x}_T \in \mathcal{K}_M(x_T)\}, \quad \mathcal{K}^*_{\tilde{M}}(\omega) = \{\omega^*: x^*_T \in \mathcal{K}^*_M(x_T),$$
$$x^*_t = 0, t \neq T; \quad y^*_t = 0\}.$$

г). Если $\omega \in G_t$, то

$$\mathcal{K}_{G_t}(\omega) = \{\bar{\omega}: g'_x \bar{x}(t) + g'_y \bar{y}(t) = 0\},$$
$$\mathcal{K}^*_{G_t}(\omega) = \{\omega^*: \lambda(t) \underbrace{\underbrace{(0, \ldots, 0, g'_x}_{t+1}, 0, \ldots, 0, g'_y}_{2t+2}, 0, \ldots, 0)^*\},$$

где звездочка обозначает транспонирование.

Тогда по теореме V.4.2 из [1] существуют не все одновременно равные нулю векторы $\omega^*_t, t = \overline{0, T-1}$, ω^*_N, ω^*_M, $\omega^*_{g_t}$, $t = \overline{0, T}$, и число $\lambda_0 \geqslant 0$ такие, что

$$\lambda_0 \omega^*_f = \omega^*_N + \omega^*_M + \sum_{t=0}^{T-1} \omega^*_t + \sum_{t=0}^{T} \omega^*_{gt} \tag{1}$$

и ω^*_f такой, что $(x^*_{ft}, y^*_{ft}) \in \partial f_0(x, y)$,

$$\omega^*_N \in \mathcal{K}^*_{\tilde{N}}(\omega), \quad \omega^*_M \in \mathcal{K}^*_{\tilde{M}}(\omega), \quad \omega^*_t \in \mathcal{K}^*_{\tilde{M}_t}(\omega), \quad \omega^*_{g_t} \in \mathcal{K}^*_{G_t}(\omega).$$

Распишем структуру этих векторов:

$$\omega^*_f = (x^*_{f0}, \ldots, x^*_{ft}, \ldots, x^*_{fT}, \; y^*_{f0}, \ldots, y^*_{ft}, \ldots, y^*_{fT}), \quad \omega^*_N = (x^*_N, 0, \ldots, 0),$$
$$\omega^*_M = (0, \ldots, 0, x^*_M, 0, \ldots, 0), \quad \omega^*_t = (\underbrace{0, \ldots, (x^*_t(t)}_{t+1}, x^*_{t+1}(t)), 0, \ldots, 0),$$
$$\omega^*_{gt} = (\underbrace{\underbrace{0, \ldots, 0, \lambda(t)}_{t+1} g'_x, 0, \ldots, 0, \lambda(t) g'_y}_{2t+2}, 0, \ldots, 0),$$

где $(x^*_{ft}, y^*_{ft}) \in \partial f_0(x(t), y(t))$, $t = \overline{0, T}$, $x^*_N \in \mathcal{K}^*_N(x_0)$, $x^*_M \in \mathcal{K}^*_M(x_T)$, $(x^*_t(t), x^*_{t+1}(t)) \in \mathcal{K}^*_a(x(t), x(t+1))$, $t = \overline{0, T-1}$.
Запишем (1) в покомпонентном виде:

$$\lambda_0 x^*_{f0} = x^*_0(0) + x^*_N, \quad \lambda_0 x^*_{ft} = x^*_t(t-1) + x^*_t(t) + \lambda(t) g'_x(x, y), \tag{2}$$
$$\lambda_0 x^*_{ft} = x^*_T(T-1) + x^*_M, \quad \lambda_0 y^*_{fT} = \lambda(t) g'_y(x, y).$$

Вводя обозначения $x^*_{t+1} \equiv x^*_{t+1}(t)$, $t = \overline{0, T-1}$, и учитывая определение локально-сопряженного отображения [1], имеем $-x^*_t(t) \in a^*(x^*_{t+1}; (x_t, x_{t+1}))$.
Теперь соотношения (2) можно представить так:

$$x^*_t \in a^*(x^*_{t+1}; (x_t, x_{t+1})) + \lambda(t) g_x(x, y) + \lambda_0 \partial f_0(x, y), \qquad t = \overline{0, T-1},$$
$$x^*_T + x^*_M \in \lambda_0 \partial f_0(x(T), y(T)), \quad x^*_N \in \mathcal{K}^*_N(x_0), \quad x^*_M \in \mathcal{K}^*_M(x_T),$$
$$\lambda_0 f'_{0y}(x, y) + \lambda(t) g'_y(x, y) = 0, \quad \lambda(t) g(x, y) = 0, \quad \lambda(t) \geqslant 0, \quad \lambda_0 \geqslant 0.$$

Теорема 1 допускает несколько уточнений. 1). Функции и множества, входящие в рассматриваемую задачу, выпуклые.

Так как в этом случае все конусы касательных направлений, рассмотренные в теореме 1, являются локальными шатрами, то полученный результат преобразуется следующим образом:

Т е о р е м а 2. *Пусть a — выпуклое отображение, $f_0(x, y)$ — выпуклая функция, множества N и M выпуклые.*

Тогда для того чтобы траектория $\{x_t\}$, $t = \overline{0, T}$, и последовательности y_t, $t = \overline{0, T}$, где $f_0(x, y)$ непрерывна в точке x_t, $t = \overline{0, T}$ и $x(0) \in N$, $x(T) \in M$ мичимизировали функцию $f = \sum_{t=1}^{T} f_0(x(t), y(t))$ по всем траекториям при условии $g(x(t), y(t)) = 0$, необходимо, чтобы нашлись не все одновременно равные нулю векторы x_t^*, $t = \overline{0, T}$, x^*, $\lambda(t)$ и число $\lambda_0 = 0,1$ такие, что выполняются следующие соотношения:

$$x_t^* \in a^*(x_{t+1}^*; (x_t, x_{t+1})) + \lambda(t) g_x'(x, y) + \lambda_0 f_{0x}'(x, y), \quad t = \overline{0, T-1},$$

$$x_T^* + x^* \in \lambda_0 f_{0x}'(x(T), y(T)) \quad x^* \in \mathcal{K}_M^*(x_T), \quad \lambda_0 f_{0y}'(x, y) + \lambda(t) g_y'(x, y) = 0,$$

$$\lambda(t) g(x, y) = 0, \quad \lambda(t) \geqslant 0.$$

Если ввести обозначения $W_a(x, y^*) = \inf_x \{\langle x, y \rangle : y \in a(x)\}$, $\partial_x W_a(x, y^*) = \{x^* : W_a(y, y^*) - W_a(x, y^*) \geqslant \langle y - x, x^* \rangle \ \forall y\}$, $\partial_{y^*} W_a(x, y^*) = \{y : W_a(x, z^*) - W_a(x, y^*) \leqslant \langle y, z^* - y^* \rangle \ \forall z^*\}$, то теорему 2 можно сформулировать в следующей форме.

Т е о р е м а 2′. *Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы и $a(x)$ — замкнутое множество при каждом x. Тогда для того чтобы траектория $\{x_t\}$, $t = \overline{0, T}$, и последовательности y_t, $t = \overline{0, T}$, минимизировали функцию $f = \sum_{t=1}^{T} f_0(x(t), y(t))$ при условии $g(x(t), y(t)) = 0$, необходимо, чтобы нашлись не все равные нулю векторы x^*, x_t^*, $t = \overline{0, T}$, $\lambda(t) \geqslant 0$ и число $\lambda_0 = 0,1$ такие, что выполняются соотношения*

$$x_{t+1} \in \partial_{y^*} W_a(x_t, x_{t+1}^*), \quad x_t^* \in \partial_x W_a(x_t, x_{t+1}^*) + \lambda(t) g_x'(x, y) + \lambda_0 f_{0x}'(x, y),$$

$$t = \overline{0, T-1}, \quad x_T^* + x^* \in \lambda_0 f_{0x}'(x(T), y(T)), \quad x^* \in \mathcal{K}_M^*(x_T),$$

$$\lambda_0 f_{0y}(x, y) + \lambda(t) g_y'(x, y) = 0, \quad \lambda(t) g(x, y) = 0.$$

2). Пусть $a(x) = Ax + U$, где A—$n \times n$-матрица, U — выпуклое множество в R^n. Теперь задача заключается в выборе управления $u_t \in U$, $t = \overline{0, T-1}$, так, чтобы траектория системы минимизировала функцию $f = \sum_{t=1}^{T} f_0(x(t), y(t))$ при условии $g(x(t), y(t)) = 0$, заранее условливаемся, что множество M совпадает со всем пространством, а функции $f_0(x(t), y(t))$ непрерывно дифференцируемы.

В соответствии с примером IV.6.1 из [1] получаем, что необходимыми и достаточными условиями оптимальности траекторий этой задачи будут условия:

$$x_t^* = x_{t+1}^* A + \lambda_0 f_{0x}'(x, y) + \lambda(t) g_x'(x, y), \quad \langle u_t, x_{t+1}^* \rangle = \min_u \{\langle u, x_{t+1}^* \rangle : u \in U\},$$

$$t = \overline{0, T-1}, \quad x_T^* = \lambda_0 g_x'(x(T), y(T)), \quad \lambda_0 f_{0y}'(x, y) + \lambda(t) g_y(x, y) = 0,$$

$$\lambda(t) g(x, y) = 0, \quad \lambda(t) \geqslant 0, \quad \lambda = 1.$$

1. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи.— М. : Наука, 1980.— 320 с.
2. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума.— М. : Наука, 1982.— 144 с.
3. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума для дифференциальных включений.— Кибернетика, 1976, № 6, с. 60—73.
4. *Болтянский В. Г.* Оптимальное управление дискретными системами.— М. : Наука, 1973.— 448 с.
5. *Пропой А. И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов.— М. : Наука, 1973.— 256 с.

Ин-т кибернетики АН УССР, Киев

Получено 23.10.84