УДК 517.55

В. И. Сирик

Некоторые критерии голоморфности непрерывных отображений

В 20—30-х годах текущего столетия Д. Е. Меньшов получил классические критерии аналитичности функций одной комплексной переменной, использующие различные свойства, представляющие собой ослабление требований сохранения углов, постоянства растяжения, отображения бесконечно малых кругов в бесконечно малые и др. В исследованиях Д. Е. Меньшова существенным было предположение об однолистности рассматриваемых функций [1]. Ю. Ю. Трохимчук перенес все основные результаты Д. Е. Меньшова на случай произвольных непрерывных отображений плоских областей [3].

А. В. Бондарь впервые в многомерном случае построил теорию локальных геометрических характеристик голоморфных отображений, основанную на геометрических свойствах линейных операторов, определенным образом сопоставляемых изучаемому непрерывному отображению [4 — 9]. Созданная теория позволила обобщить на многомерный случай классические теоремы Д. Е. Меньшова, Г. Бора, П. Монтеля, А. С. Безиковича, Ю. Ю. Трохимчука [1—3].

Цель данной работы—применяя методику, предположенную А. В. Бондарем, доказать некоторые критерии голоморфности непрерывных отображений $f: D \to \mathbb{C}^n$ области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$.

Обозначения и определения. Обозначим через $\mathfrak{L}(n)$ пространство всех комплексно-линейных отображений из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, а через $\overline{\mathfrak{L}}(n)$ бикомпактное расширение пространства $\mathfrak{L}(n)$, определенное в ([4, с. 365]). Элементами пространства $\overline{\mathfrak{L}}(n)$ ([4], теорема 2) являются всевозможные (не обязательно непрерывные) отображения $L\colon \dot{\mathbb{C}}^n \to \dot{\mathbb{C}}^n$, где $\dot{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C}^n \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация пространства $\mathbb{C}^n$, обладающая тем свойством, что для каждого из них существуют такие $\mathbb{C}$-линейное подпространство $H = H(L)$ (случай $H = \varnothing$ не исключается) и $\mathbb{C}$-линейный оператор $A_L : H \to \mathbb{C}^n$, что

$$Le = \begin{cases} \infty, & \text{при } e \notin H; \\ A_L e, & \text{при } e \in H, \end{cases} \tag{1}$$

Для произвольного $L \in \overline{\mathfrak{L}}(n)$ оператор $L^S \in \overline{\mathfrak{L}}(n)$ определим

$$L^S e = \begin{cases} \infty, & \text{при } e \notin H; \\ \dfrac{Le}{\| A_L \|}, & \text{при } e \in H. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$, a — точка области D и $\mathscr{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный репер в $\mathbb{C}^n$. Следуя [4], будем говорить, что в точке a задан репер последовательностей $\tilde{\mathscr{E}} = \{\{z_1^k\}_{k=1}^\infty, \ldots, \{z_n^k\}_{k=1}^\infty\}$ с касательным репером $\mathscr{E}$, если выполнены такие условия:

1) $Z_j^k \in D$ и $\lim\limits_{k\to\infty} Z_j^k = a$ $\forall j = 1, 2, \ldots, n$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{z_j^k - a}{\| z_j^k - a \|} = e_j$ $\forall j = 1, 2, \ldots, n$.

Оператор $L \in \overline{\mathfrak{L}}(n)$ будем называть производным оператором отображения f в точке $z \in D$ вдоль репера последовательностей $\tilde{\mathscr{E}}$ с касательным репером $\mathscr{E}$, если выполняется следующее условие:

$$L_{\tilde{\mathscr{E}}} e_j = \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_j^k) - f(z)}{\| z_j^k - z \|} \in \dot{\mathbb{C}}^n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{3}$$

При этом предполагается, что предел в правой части (3) существует.

Как и в [6], определим понятие отображения, удовлетворяющего условию (K). Пусть заданы $e \in \mathbb{R}^n$, $\| e \| = 1$, и ε, $0 < \varepsilon < 1$. Обозначим через $K_\varepsilon(0, e)$ конус с вершиной в нуле, порожденный открытым шаром $B_\varepsilon(e)$ радиуса ε с центром в точке e: $K_\varepsilon(0, e) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda > 0 \wedge \lambda x \in B_\varepsilon(e)\}$. Кроме того, введем следующие обозначения:

$$K_\varepsilon^\delta(0, e) = \{x \in K_\varepsilon(0, e) : \| x \| < \delta, \quad \delta > 0\};$$

$$K_\varepsilon^\delta(x, e) = x + K_\varepsilon^\delta(0, e), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$ и $f : D \to \mathbb{C}^n$ — отображение. Скажем, что f обладает условием (K) в точке $x \in D$, если существуют $e = e(x) \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, $\delta = \delta(x)$ и константа $M = M(x)$ такие, что*

$$\| f(x) - f(x') \| \leqslant M \| x' - x \| \quad \forall x' \in K_\varepsilon^\delta(x, e).$$

Определение 2. *Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$. Непрерывное отображение $f : D \to \mathbb{C}^n$ в точке $z \in D$ удовлетворяет условию (γ), если в этой точке заданы три n-репера последовательностей $\tilde{\mathscr{E}}_1$, $\tilde{\mathscr{E}}_2$, $\tilde{\mathscr{E}}_3$, с касательными реперами $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$, попарно находящимися в общем положении в $\mathbb{C}^n$ (это означает, что вещественная линейная оболочка любой пары реперов $\mathscr{E}_k$, $1 \leqslant k \leqslant 3$, совпадает с $\mathbb{C}^n$), вдоль которых существуют производные операторы $L_{\tilde{\mathscr{E}}_2}$, $L_{\tilde{\mathscr{E}}_2}$, $L_{\tilde{\mathscr{E}}_3}$*

такие, что выполнено условие

$$\frac{L_{\tilde{\mathscr{E}}_1}}{\|L_{\tilde{\mathscr{E}}_1}\|}=\frac{L_{\tilde{\mathscr{E}}_2}}{\|L_{\tilde{\mathscr{E}}_3}\|}=\frac{L_{\tilde{\mathscr{E}}_3}}{\|L_{\tilde{\mathscr{E}}_3}\|}.$$

Определение 3. *Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$ и $f: D\to\mathbb{C}^n$ — непрерывное отображение. Скажем, что отображение f удовлетворяет условию (β) в точке $a\in D$, если задан такой оператор $S_a\in\overline{\mathfrak{L}}(n)$, что для каждого репера $\mathscr{E}$ и для любого репера последовательностей $\tilde{\mathscr{E}}$ с касательным репером $\mathscr{E}$ определен такой производный оператор $L_{\tilde{\mathscr{E}}_a}\in\overline{\mathfrak{L}}(n)$, что*

$$L^S_{\tilde{\mathscr{E}}_a}(e)=S_a(e)\ \forall e\in\mathbb{C}^n, \tag{4}$$

где оператор $L^S_{\tilde{\mathscr{E}}_a}$ имеет каноническое представление (2).

Лемма 1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$ и $f: D\to\mathbb{C}^n$ — непрерывное отображение. Пусть в точке $a\in D$ для любого репера последовательностей $\tilde{\mathscr{E}}=\{\{z_1^k\}_{k=1}^\infty,\ldots,\{z_n^k\}_{k=1}^\infty\}$, касательного к фиксированному реперу $\mathscr{E}=\{e_1, e_2,\ldots,e_n\}$, определен производный оператор $L_{\tilde{\mathscr{E}}_a}\in\overline{\mathfrak{L}}(n)$ такой, что*

$$L_{\tilde{\mathscr{E}}_a}(e_1)\in\mathbb{C}^n.$$

Тогда отображение f удовлетворяет условию (K) в точке $a\in D$.

Доказательство. Докажем, что найдутся такие $\varepsilon,\delta>0$, для которых f удовлетворяет условию (K) с конусом $K_\varepsilon^\delta(e_1)$. Допустим, что это не так, тогда для $k=1,2,\ldots$ найдется точка $z_1^k\in K_{1/k}^{1/k}(z, e_1)$, для которой $|f(z_1^k)-f(z)\|\geqslant k\|z_1^k-z\|$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}z_1^k=z$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{z_1^k-z}{\|z_1^k-z\|}=e_1$, и существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{f(z_1^k)-f(z)}{\|z_1^k-z\|}=\infty$. Поэтому согласно теореме 2 работы [4] найдутся последовательности $\{z_2\}_{k=1}^\infty,\ldots,\{z_n^k\}_{k=1}^\infty$ и оператор $L\in\mathfrak{L}(n)$ такие, что $\tilde{\mathscr{E}}=\{\{z_1^k\}_{k=1}^\infty,\ldots,\{z_n^k\}_{k=1}^\infty\}$ — репер последовательностей в точке z с касательным репером $\mathscr{E}$, а L — производный оператор отображения f в точке z вдоль репера последовательностей $\tilde{\mathscr{E}}$, и

$$Le_1=\lim_{k\to\infty}\frac{f(z_1^k)-f(z)}{\|z_1^k-z\|}=\infty\notin\mathbb{C}^n,$$

что противоречит условию. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$, $f: D\to\mathbb{C}^n$ — непрерывное отображение и в точке $a\in D$ выполнено условие* (β).

Тогда либо отображение f удовлетворяет условию (K) в точке $a\in D$, либо

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(z+h)-f(z)\|}{\|h\|}=\infty.$$

Доказательство. Поскольку оператор S_a имеет каноническое представление (2) и $L^S_{\tilde{\mathscr{E}}_a}(e)=S_a(e)\ \forall e\in\mathbb{C}^n$, то из определения оператора $L^S_{\tilde{\mathscr{E}}_a}$ следует, что $H_{a\tilde{\mathscr{E}}}=H_a$, т. е. подпространство $H_a\subset\mathbb{C}^n$ не зависит ни от репера последовательностей $\tilde{\mathscr{E}}$, ни от производного оператора $L_{\tilde{\mathscr{E}}_a}$ отображения f вдоль репера последовательностей $\tilde{\mathscr{E}}$, касательного к реперу $\mathscr{E}$ в точке $a\in D$, а определяется лишь оператором S_a в точке a.

Если $H_a = \varnothing$, то $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) \|}{\| h \|} = \infty$. Допустим теперь, что $H_a \neq \varnothing$. Возьмем вектор $e_1 \in H_a$ единичной длины и дополним множество $\{e_1\}$ до ортонормированного репера $\mathscr{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ в $\mathbb{C}^n$. Пусть $\tilde{\mathscr{E}}$ — произвольный репер последовательностей в точке a с касательным репером $\mathscr{E}$. Согласно условию (β) f обладает в точке a производным оператором $L_{\tilde{\mathscr{E}}}$ вдоль $\tilde{\mathscr{E}}$ и $L_{\tilde{\mathscr{E}}} e_1 = \| A_{\tilde{\mathscr{E}}} \| S_a e_1 \neq \infty$. Поэтому по лемме 1 f удовлетворяет в точке a условию (K). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$, E — замкнутое подмножество в области D и $f: D \to \mathbb{C}^n$ — непрерывное отображение, голоморфное в открытом множестве $D \setminus E$. Пусть, далее, в каждой точке $a \in D \setminus D'$, где D' — объединение счетного числа замкнутых подмножеств D'_k, каждое из которых имеет конечную $(2n-1)$-меру Хаусдорфа, а его образ $f(D'_k)$ — нулевую $2n$-меру Лебега, отображение f удовлетворяет либо условиям (γ) и (K), либо*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| f(z+h) - f(z) \|}{\| h \|} = \infty. \tag{5}$$

Тогда, если на множестве $M_1 \subset E$ не первой категории на E выполнено условие (5), *то найдется такой шар $B(z)$ с центром $z \in E$, в котором f голоморфно.*

Доказательство. По лемме 2 и условию леммы 3 в каждой точке $z \in D \setminus D'$ либо отображение f удовлетворяет условию (K), либо $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\| f(z+h) - f(z) \|}{\| h \|} = \infty$.

Пусть $F_k = \{z \in E : \| f(z') - f(z) \| \geqslant \frac{1}{k} \| z' - z \| \ \forall z' \in D$ и $\| z' - z \| < 1/k$, $k = 1, 2, \ldots\}$. В силу непрерывности f каждое из множеств F_k замкнуто в D. Обозначим через $F = \bigcup F_k$. Так как множество $M_1 \subset F$, то F не первой категории на E. Следовательно, найдется такое фиксированное k, что некоторое множество F_k не будет нигде не плотным на E. Тогда существует такой шар D_0, что множество $F_0 = F_k \cap D_0 \subset F_k$ будет всюду плотно на порции $F \cap D_0$, и поскольку F_0 замкнуто, то $F_0 = E \cap D_0$.

Возмем произвольную точку $z \in F_0$. Так как f голоморфно в $D_0 \setminus F_0$ и гомеоморфно на F_0, то множество $f^{-1} f(z_0)$ не более чем счетно. Поэтому найдется такая окрестность U точки z_0, содержащаяся вместе с замыканием в D_0, что ее граница ∂U не пересекает множество $f^{-1} f(z_0)$. Следовательно, можно выбрать такой шар V с центром в точке $w_0 = f(z_0)$, что $\overline{V} \cap \cap f(\partial U) = \varnothing$. Обозначим через G компоненту полного прообраза $f^{-1}(V)$, содержащую точку z_0. Тогда отображение $f|_G : G \to V$ собственное.

Множество $F_0 = G \cap F_0$ не пусто и замкнуто в G. Рассмотрим два возможных случая:

А. Если $\operatorname{Cap} F_0 = 0$, где $\operatorname{Cap} X$ — емкость множества X, то отображение f, голоморфное в $G \setminus F'_0$, голоморфно продолжается на всю область G ([12, с. 255]).

Б. Пусть $\operatorname{Cap} F'_0 \neq 0$. По теореме 2 работы [8], все условия которой в данном случае выполнены, отображение $f: G \to V$ является гомеоморфным. Следовательно, обратное отображение $g: V \to G$ голоморфно в $V \setminus P_0$, где $P_0 = f(F'_0)$, и удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $1/k$: $\| g(\zeta') - g(\zeta) \| < \frac{1}{k} \| \zeta' - \zeta \| \ \forall \zeta \in P_0$ и $\zeta' \in V$. По теореме Степанова отображение g дифференцируемо почти всюду на множестве P_0.

Обозначим через P_1 множество точек $\zeta \in P_0$, в которых отображение g дифференцируемо и $g'(\zeta)$ есть невырожденный комплексно-линейный оператор, т. е. $\det g'(\zeta) \neq 0$, через P_2 — множество точек $\zeta \in P_0$, в которых

$g'(\zeta)=0$, и через P_3 — множество точек $\zeta\in P_0$, в которых $\det g'(\zeta)=0$, но $g'(\zeta)\neq 0$.

По условию леммы 3 $V'=f(D')\cap V$ есть множество нулевой $2n$-меры Хаусдорфа. Покажем, что отображение g моногенно почти всюду в области V.

В каждой точке $z\in E_1=g(P_1\setminus V')\subset D\setminus D'$ отображение f $\mathbb{R}$-дифференцируемо ([11, с. 52]). Пусть в некоторой точке $z_0\in E_1$ выполнено условие (β). Тогда для любого репера $\mathscr{E}$ и каждого репера последовательностей $\tilde{\mathscr{E}}$ с касательным репером $\mathscr{E}$ определен конечный производный оператор $L_{\tilde{\mathscr{E}}}\in\mathfrak{L}(n)$. Рассмотрим в точке $z_0\in E_1$ три репера $\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2,\mathscr{E}_3$, попарно находящиеся в общем положении в $\mathbb{C}^n$. В силу канонического разложения (2) производные операторы $L_{\tilde{\mathscr{E}}_1}, L_{\tilde{\mathscr{E}}_2}, L_{\tilde{\mathscr{E}}_3}$ вдоль реперов последовательностей $\tilde{\mathscr{E}}_1$, $\tilde{\mathscr{E}}_2$, $\tilde{\mathscr{E}}_3$ с касательными реперами $\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2,\mathscr{E}_3$ в точке z_0 удовлетворяют условию

$$\frac{L_{\tilde{\mathscr{E}}_1}}{\|L_{\tilde{\mathscr{E}}_1}\|}=\frac{L_{\tilde{\mathscr{E}}_2}}{\|L_{\tilde{\mathscr{E}}_2}\|}=\frac{L_{\tilde{\mathscr{E}}_3}}{\|L_{\tilde{\mathscr{E}}_3}\|}.$$

Таким образом, отображение f удовлетворяет условию (γ) на множестве E_1. Применяя последовательно теоремы 3 и 9 работы [4], получаем моногенность отображения f на E_1, а оператор $g'(\zeta)$ будет комплексно-линейным как обратный к комплексно-линейному оператору $f'(z)$, т. е. отображение g моногенно в каждой точке множества P_1.

Если $\zeta\in P_2$, то $g'(\zeta)=0$, и отображение g моногенно на P_2.

Покажем теперь, что $\operatorname{mes} P_3=\varnothing$. Допустим противное, т. е. что $\operatorname{mes} P_3\neq 0$. Тогда существует совершенное подмножество $P_4\cap P_3\setminus V'\subset V$, каждая открытая порция которого имеет положительную меру. Так как на совершенном подмножестве $E_4=g(P_4)$ отображение f удовлетворяет условию (K), то найдется такой шар $B_0\subset D$ с центром в точке $z_0\in E_4$, что отображение f удовлетворяет условию Липшица с константой N на открытой порции $E_4'=E_4\cap B_0$.

На открытом множестве $P_4'=f(E_4')$ отображение g удовлетворяет условию антилипшица с константой $1/N$:

$$\|g(\zeta_1)-g(\zeta_0)\|\geqslant\frac{1}{N}\|\zeta_1-\zeta_0\|. \tag{6}$$

Так как $\operatorname{mes} P_4'\neq 0$, то почти каждая точка $\zeta\in P_4'$ является точкой плотности. Зафиксируем одну из них: $\zeta_0\in P_4'$.

Поскольку $\det g'(\zeta_0)=0$, то найдется такой вектор $e_1\in\mathbb{C}^n$ единичной длины, что $g'(\zeta_0)e_1=0$.

Возьмем круговой конус $\mathfrak{K}$ с биссектрисой e_1, вершиной в точке ζ_0 и настолько малым углом α при вершине, чтобы выполнялось неравенство $\|g'(\zeta_0)\|\sin\alpha<\frac{1}{2N}$. Из определения точки плотности следует, что пересечение конуса $\mathfrak{K}$ и ε-окрестности точки ζ_0, где $0<\varepsilon<\frac{1}{2N}$, содержит некоторую точку $\zeta_1\in P_4'$. Пусть $\tilde{\zeta}$ — ортогональная проекция точки ζ_1 на луч $\{\lambda e_1:\lambda>0\}$. Тогда

$$g(\zeta_1)-g(\zeta_0)=g'(\zeta_0)(\zeta_1-\zeta_0)+\varphi(\zeta_1,\zeta_0)=g'(\zeta_0)(\tilde{\zeta}-\zeta_0)+$$
$$+g'(\zeta_0)(\zeta_1-\tilde{\zeta})+\varphi(\zeta_1,\zeta_0)=g'(\zeta_0)(\zeta_1-\tilde{\zeta})+\varphi(\zeta_1,\zeta_0),$$

где $\frac{\|\varphi(\zeta_1,\zeta_0)\|}{\|\zeta_1-\zeta_0\|}\to 0$ при $\|\zeta_1-\zeta_0\|\to 0$. Так как $\|\zeta_1-\zeta_0\|<\varepsilon$, то без ограничения общности можно считать ε настолько малым, что $\|\varphi(\zeta_1,\zeta_0)\|<$

$< \frac{1}{2N} \| \zeta_1 - \zeta_0 \|$. Тогда $\| g(\zeta_1) - g(\zeta_0) \| \leqslant \| g'(\zeta_0) \| \cdot \| \zeta_1 - \tilde{\xi} \| + \frac{1}{2N} \leqslant \leqslant \left(\| g'(\zeta_0) \| \sin \alpha + \frac{1}{2N} \right) \| \zeta_1 - \zeta_0 \| < \frac{1}{N} \| \zeta_1 - \zeta_0 \|$. Поскольку $\zeta_0, \zeta_1 \in P_4'$, то получено противоречие с (6), следовательно, $\operatorname{mes} P_4 = 0$ и отображение g моногенно почти всюду на P_0. Кроме этого, g голоморфно в $V \setminus P_0$ и на P_0 удовлетворяет условию Липшица. Тогда по лемме 10 работы [5] g голоморфно в V, а обратное отображение $f: G \to V$ будет голоморфным в G. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$, $f: D \to \mathbb{C}^n$ — непрерывное отображение и в каждой точке $a \in D \setminus D'$, где D' не более чем счетно, выполнено одно из следующих условий: либо f удовлетворяет условиям* (K) *и* (γ), *либо* $\varliminf\limits_{h \to 0} \frac{\| f(z+h) - f(z) \|}{\| h \|} = \infty$. *Тогда отображение f голоморфно в области D.*

Доказательство. Допустим, что теорема 1 не верна. Обозначим через O множество тех точек $z \in D$, в которых f голоморфно, $E = D \setminus O$ — замкнутое подмножество и в любой окрестности каждой точки $a \in E$ отображение f не голоморфно. j

Если множество $M_1 = \left\{ z \in E : \varliminf\limits_{h \to 0} \frac{\| f(z+h) - f(z) \|}{\| h \|} = \infty \right\}$ не первой категории на E, то по лемме 3 найдется такой шар $B \subset D$, $B \cap E \neq \varnothing$, в котором отображение f будет голоморфным, что противоречит предположению.

Следовательно, множество $M_2 \subset E$, где выполнены условия (K) и (γ), не первой категории на E. По лемме 1 работы [6] существует такой шар B с центром в точке $z_0 \in E$, для которого выполнены условия: 1) f удовлетворяет условиям Липшица на порции $E_0 = E \cap B$; 2) f дифференцируемо почти всюду на E_0.

Тогда по теоремам 3 и 9 из [4] отображение f моногенно почти всюду на E_0. По лемме 11 из [5], все условия которой в данном случае выполнены, отображение f голоморфно в шаре B, что противоречит допущенному. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$ и $f: D \to \mathbb{C}^n$ — непрерывное отображение. Если в каждой точке $a \in D \setminus D'$, где D' не более чем счетно в D, выполнено условие* (β), *то отображение f голоморфно в D.*

Доказательство. Допустим, что теорема 2 неверна. Обозначим через O множество точек $z \in D$, в которых отображение f голоморфно. Множество $E = D \setminus O$ замкнуто и ни в одной окрестности точки $z \in E$ f не голоморфно. По лемме 2 в каждой точке $z \in F \setminus D'$ отображение f либо удовлетворяет условию (K), либо $\varliminf\limits_{h \to 0} \frac{\| f(z+h) - f(z) \|}{\| h \|} = \infty$. Если множество $M_1 = \left\{ z \in E : \varliminf\limits_{h \to 0} \frac{\| f(z+h) - f(z) \|}{\| h \|} = \infty \right\}$ не первой категории на E, то по лемме 3 отображение f голоморфно в некотором шаре $B(z_0)$, $z_0 \in E$.

Пусть теперь множество M_2, состоящее из тех точек $z \in E$, где f удовлетворяет условию (K), не первой категории на E. По лемме 1 работы ([6, с. 437]) найдется такой шар $B(z_0)$ с центром в точке $z_0 \in E$, что f удовлетворяет условию Липшица на $E_0 = E \cap B(z_0)$ и почти всюду на E_0 дифференцируемо. (Обозначим это множество через $E_0' \subset E_0$.) Так как $\varlimsup\limits_{h \to 0} \frac{\| f(z+h) - f(z) \|}{\| h \|} < \infty$ $\forall z \in E_0'$, то для любого репера $\mathscr{E}$ и каждого репера последовательностей $\widehat{\mathscr{E}}$ с касательным репером $\mathscr{E}$ производный оператор $L_{\widehat{\mathscr{E}}}$ ограничен. Поэтому из условия (β) вытекает условие (γ) на E_0'. По теореме 1 f голоморфно в шаре $B(z_0)$. Полученное противоречие и доказывает теорему 2.

Теоремы 1 и 2 являются обобщением теоремы C, доказанной А. В. Бондарем ([6, с. 436]) для случая конечных производных операторов, которая является многомерным обобщением одной теоремы Д. Е. Меньшова. Оператор L^S имеет то же значение, что и аргумент производного числа в одномерном случае.

1. *Menchoff D.* Sur les conditions suffisantes pour qu'une fonction univalente soit holomorphe.— Мат. сб., 1933, **40**, № 1, с. 3—23.
2. *Bohr H.* Über strechentreue und konforme A bbildung.— Math. Z., 1918, N 1, p. 3—19.
3. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности.— М.: Физматгиз, 1963.— 212 с.
4. *Бондарь А. В.* Множества моногенности и критерии голоморфности для функций многих комплексных переменных.— В кн.: Десятая математическая школа. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1974, с. 361—381.
5. *Бондарь А. В.* Многомерный вариант одной теоремы Бора.— Там же, с. 382—396.
6. *Бондарь А. В.* Многомерное обобщение одной теоремы Д. Е. Меньшова.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 4, с. 435—443.
7. *Бондарь А. В.* Об отображениях, обладающих постоянным оператором растяжения, I.— Киев, 1976.— 32 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 79.9).
8. *Бондарь А. В.* Об условиях гомеоморфности голоморфных отображений с особенностями.— В кн.: Теория функций и топология. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 7—12.
9. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ.— М.: Наука, 1969.— 576 с.
10. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях.— М.: Мир, 1968.— 162 с.
11. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.— М.: Мир, 1980.— 304 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 19.12.84