УДК 519.21

В. Л. Гирко

Распределение собственных чисел и собственных векторов ортогональных случайных матриц

Нахождение распределений собственных чисел и векторов случайных матриц является центральной задачей спектральной теории случайных матриц. В настоящее время найдены распределения собственных чисел и векторов симметричных, эрмитовых, антисимметричных, несимметричных, комплексных, гауссовских и унитарных случайных матриц [1—3]. В этом традиционном перечне распределений основных типов матриц оставалась нерешенной задача о распределении собственных чисел и векторов ортогональных случайных матриц.

Элементы ортогональной действительной случайной матрицы H_n можно выразить в виде некоторых почти всюду непрерывно дифференцируемых функций углов Эйлера φ_i, $i=\overline{1, n(n-1)/2}$ [1]. Предположим, что существует совместная плотность распределения случайных величин φ_i, и обозначим ее через $p(x_1, \ldots, x_{n(n-1)/2})$. Плотность p почти для всех значений x_i можно представить в виде $p=\tilde{p}(T_n(x_i, i=\overline{1, n(n-1)/2}))$, где T_n — ортогональная матрица, заданная с помощью углов x_i. Распределение матрицы H_n равно $\mathbf{P}\{H_n \in B\} = \int\limits_{T_n \in B} \tilde{p}(T_n)\, dT_n$. Здесь B — измеримое множество элементов группы ортогональных матриц G, $dT_n = \Pi dx_i$, x_i — углы Эйлера матрицы $T_n \in G$. На группе G существует нормированная мера Хаара μ, которую можно представить в следующем виде: $\mu(B) = \int\limits_{T_n \in B} q(T_n) \times$ $\times\, dT_n$, где $q(T_n)$ — некоторая борелевская функция углов Эйлера матрицы T_n [1, с. 7]. Собственные числа матрицы H_n равны $\{e^{\pm i\lambda_k}, k = \overline{1, n/2}\}$, если n — четное, и $\{e^{\pm i\lambda_k}, k = \overline{1, (n-1)/2}, \pm 1\}$, если n — нечетное (λ_k — действительные числа, $0 \leqslant \lambda_k \leqslant 2\pi$). Пусть $\vec{\theta}_k$ — собственные векторы, соответствующие собственным числам $e^{\pm i\lambda_k}$. Векторы $\vec{\theta}_k$, соответствующие несопряженным собственным числам, ортогональны. Собственные числа упорядочим следующим образом:

$$\{e^{i\lambda_1}, e^{-i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_{n/2}}, e^{-i\lambda_{n/2}}; 2\pi \geqslant \lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_{n/2} \geqslant 0\},$$

если n — четное, причем возможен случай, когда некоторые собственные числа равны ± 1. В этом случае собственные числа будем упорядочивать следующим образом:

$$\{e^{i\lambda_1}, e^{-i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_{(n-k)/2}}, e^{-i\lambda_{(n-k)/2}}, +1, \dots, +1, -1, \dots, -1\},$$
$$2\pi \geqslant \lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_{(n-k)/2} \geqslant 0.$$

Для нечетного n собственные числа упорядочим так:

$$\{e^{i\lambda_1}, e^{-i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_{(n-1)/2}}, e^{-i\lambda_{(n-1)/2}}, \xi; 2\pi \geqslant \lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_{(n-1)/2} \geqslant 0\},$$

последнее собственное число ξ — некоторая случайная величина, которая принимает значения ± 1.

Матрицу H_n с вероятностью 1 можно представить в виде

$$H_n = \theta_n \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} \cos\lambda_1 & \sin\lambda_1 \\ -\sin\lambda_1 & \cos\lambda_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos\lambda_q & \sin\lambda_q \\ -\sin\lambda_q & \cos\lambda_q \end{pmatrix}, +1, -1\right\}\theta_n'$$

при четном n и

$$H_n = \theta_n \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} \cos\lambda_1 & \sin\lambda_1 \\ -\sin\lambda_1 & \cos\lambda_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos\lambda_p & \sin\lambda_p \\ -\sin\lambda_p & \cos\lambda_p \end{pmatrix}, \xi\right\}\theta_n'$$

при нечетном n, где θ_n — ортогональная матрица, вектор-столбцы которой равны $\operatorname{Re}\vec{\theta}_p$, $\operatorname{Im}\vec{\theta}_p$. В первом из этих равенств собственных чисел ± 1 может и не быть.

Однако такое представление не единственно. Для того чтобы оно было единственным, необходимо зафиксировать некоторые элементы матрицы θ_n. Обозначим $\vec{\theta}_p = \vec{x}_p + i\vec{y}_p$. Тогда

$$H_n\vec{x}_p = \cos\lambda_p\vec{x}_p - \sin\lambda_p\vec{y}_p, \quad H_n\vec{y}_p = \sin\lambda_p\vec{x}_p + \cos\lambda_p\vec{y}_p.$$

Из этих равенств получаем, что векторы $\vec{x}_p$ и $\vec{y}_p$ ортогональны и $[(H_n - \cos\lambda_p I)^2 + I\sin^2\lambda_p]\,\vec{y}_p = 0$. Матрица $(H_n - \cos\lambda_p I)^2$ имеет действительные корни $-\sin^2\lambda_p$ кратности 2. Поэтому можно потребовать, чтобы $(\vec{x}_p, \vec{x}_p) = 1$, $(\vec{y}_p, \vec{y}_p) = 1$ и $x_{1p} = c_p$, где $|c_p| \leqslant 1$ — фиксированное число.

Если n — четное, собственные числа $e^{\pm i\lambda_k}$ не совпадают и матрица H_n не имеет собственных чисел ± 1, то полагаем $x_{1p} = c_p$, $p = 2, 4, \dots, n$; если n-четное и матрица H_n имеет собственные числа ± 1, то полагаем $x_{1p} = c_p$, $p = 2, 4, \dots, n-2$, $x_{1n-1} \geqslant 0$, $x_{1n} \geqslant 0$; если n — нечетное, то полагаем $x_{1p} = c_p$, $p = 2, 4, \dots, n-1$, $x_{1n} \geqslant 0$. Если некоторые собственные числа $e^{\pm i\lambda_k}$ матрицы H_n совпадают, то собственные векторы выбираем любым способом, лишь бы они были определены однозначно и были случайными векторами.

Пусть G — группа n-мерных ортогональных действительных матриц, μ — нормированная мера Хаара на ней, B — σ-алгебра борелевских подмножеств группы G, n — нечетное число.

Т е о р е м а 1. *Если у случайной матрицы H_n существует плотность распределения ее углов Эйлера p, то для любого множества $E \subset B$ и действительных чисел α_i, β_i, $i = \overline{1, (n-1)/2}$, $0 \leqslant \alpha_i, \beta_i \leqslant 2\pi$,*

$$\mathbf{P}\{\theta_n \in E, \alpha_k < \lambda_k < \beta_k, \ k = \overline{1, (n-1)/2}, \ \xi = 1\} = c_n^+ \int_{L_1} \tilde{p}(T_n Y^{\pm} T_n') \times$$

$$\times \tilde{q}^{-1}(T_n Y_n^{\pm} T_n') \prod_{s=1}^{(n-1)/2} \left\{ \left[\sin^2 \frac{x_s}{2}(1 \pm 1) + \cos^2 \frac{x_s}{2}(1 \mp 1) \right] \times \right.$$

$$\times |\sin x_s| \prod_{s>m} \sin^2 \frac{x_s - x_m}{2} \sin^2 \frac{x_s + x_m}{2} \prod_s dx_s \mu (dT_n / t_{1p} = c_p,$$

$$p = 2, 4, \ldots, n-1, \ t_{1n} \geqslant 0),$$

где интегрирование ведется по области

$$L_1 = \{0 < x_1 < \ldots < x_{(n-1)/2} < 2\pi, \ \alpha_k < x_k < \beta_k, \ k = \overline{1, (n-1)/2}, \ T_n \in E\},$$

$$Y_n^{\pm} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \cos x_1 & \sin x_1 \\ -\sin x_1 & \cos x_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \cos x_{(n-1)/2} & \sin x_{(n-1)/2} \\ -\sin x_{(n-1)/2} & \cos x_{(n-1)/2} \end{pmatrix}', \pm 1 \right\},$$

$$c_n^+ = (2a^+)^{-1}, \quad c_n^- = (2a^-)^{-1},$$

$$a^{\pm} = \int_{0 < x_1 < \ldots < x_{(n-1)/2} < 2\pi} \prod_{s=1}^{(n-1)/2} \left[\sin^2 \frac{x_s}{2}(1 \pm 1) + \cos^2 \frac{x_s}{2}(1 \mp 1) \right] \times$$

$$\times |\sin x_s| \prod_{s>m} \sin^2 \frac{x_s - x_m}{2} \sin^2 \frac{x_s + x_m}{2} \prod_s dx_s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что собственные числа матрицы H_n с вероятностью 1 не совпадают. Из доказательства теоремы будет следовать, что это предположение имеет место. Для любой непрерывной и ограниченной функции f элементов матриц θ_n и

$$\Lambda_n = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \cos \lambda_1 & \sin \lambda_1 \\ -\sin \lambda_1 & \cos \lambda_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \cos \lambda_{(n-1)/2} & \sin \lambda_{(n-1)/2} \\ -\sin \lambda_{(n-1)/2} & \cos \lambda_{(n-1)/2} \end{pmatrix}, \xi \right\}$$

при условии $\xi = 1$ имеем

$$\mathbf{M}[f(\theta_n, \Lambda_n)/\xi = 1]\, \mathbf{P}\{\xi = 1\} = \int f(T_n, Y_n^+)\, p(H_n)\, dH_n =$$

$$= c^{-1} \int_{G \times K} f(T_n, Y_n^+)\, \tilde{p}(H_n \sqrt{S})\, \tilde{q}^{-1}(H_n \sqrt{S})\, \delta(I - S)\, dS \mu(dH_n), \tag{1}$$

где T_n, Y_n^+ — решение уравнения $T_n Y_n^+ T_n' = H_n$, $t_{1p} = c_p$, $p = 2, 4, \ldots$ $\ldots, t_{1n} \geqslant 0$, $0 < x_1 < \ldots < x_{(n-1)/2} < 2\pi$, S_n — неотрицательно определенные действительные матрицы, K — множество неотрицательно определенных матриц n-го порядка, $\tilde{p}(A) = p(A)$, $\tilde{q}(A) = q(A)$, если A — ортогональная матрица, $\tilde{p}(A) = 0$, $\tilde{q}(A) = 0$, $\tilde{p}(A)\tilde{q}^{-1}(A) = 0$, если A — неортогональная матрица, δ-функция определена с помощью следующего соотношения:

$$\int_K \varphi(s)\, \delta(I - s)\, dS = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-n(n+1)/4} \int_K \varphi(s) \exp[-\varepsilon^{-1} \operatorname{Sp}(I - s)^2]\, dS = c\varphi(I).$$

Здесь φ — непрерывная функция на K, $c > 0$ — некоторая постоянная. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что все подынтегральные функции в интеграле (1) непрерывны. В интеграле (1) сделаем замену переменных $H_n \sqrt{S_n} = A_n$, где A_n — квадратная матрица n-го порядка. Из [1, с. 12] следует, что якобиан замены переменных $A_n = H_n \sqrt{S_n}$ равен

$c_n \det S_n^{-1/2} \dot{q}(H_n)$, c_n — некоторая постоянная. Поэтому

$$\mathbf{M}[f(\theta_n, \Lambda_n)/\xi = 1]\,\mathbf{P}\{\xi = 1\} = c_1 \int f(T_n(A), Y_n^+(A))\,\tilde{p}(A)\,\tilde{q}^{-1}(A)\,\delta(I - AA') \times \\ \times \det(AA')^{1/2}\,dA, \qquad (2)$$

где $T_n(A)$ и $Y_n^+(A)$ — решение системы уравнений

$$T_n(A)\,Y_n^+(A)\,T_n'(A) = (AA')^{-1/2} A, \quad t_{1p}(A) = c_p, \quad p = 2, 4, \ldots, t_{1n}(A) \geqslant 0.$$

В формуле (2) сделаем замену переменных $A = H\tilde{A}H'$ (H — ортогональная матрица) и полученное выражение проинтегрируем по мере Хаара, заданной на группе матриц H. Вместо матрицы $\tilde{A}$ будем писать A. Тогда

$$\mathbf{M}[f(\theta_n, \Lambda_n)/\xi = 1] = c_1 \int f(T_n(HAH'), Y_n^+(HAH'))\,\tilde{p}(HAH^1)\,\tilde{q}^{-1}(HAH') \times \\ \times \delta(I - AA')\,\Pi_p \delta(t_{1p}(HAH') - c_p) \det(AA')^{1/2}\,dA\mu(dH). \qquad (3)$$

Рассмотрим замену переменных $A = XYX^{-1}$, где элементы матрицы X удовлетворяют условиям: матрица X представима в виде $X = H(X)\,S(X)$, $H(X)$ — ортогональная действительная матрица, $S(X)$ — нижняя треугольная матрица $s_{2p-1,2p-1} = [1 - s^2_{2p,2p-1}]^{1/2}$, $|s_{2p,2p-1}| \leqslant 1$, $p = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$, $s_{2p} = 1$, $p = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$, $s_n = 1$,

$$Y = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{(n-1)/2} & y_{(n-1)/2} \\ -y_{(n-1)/2} & x_{(n-1)/2} \end{pmatrix}, x\right\}.$$

Якобиан преобразования $A = XYX^{-1}$ вычислен в [1, с. 76]: $\mathcal{J} = \prod\limits_{p \neq l} |z_p - z_l|\,|\det X_n|^{-n} c$, где z_l, $l = \overline{1, n}$ — собственные числа матрицы Y, $c > 0$. Используя это преобразование, из (3) получаем

$$\mathbf{M}[f(\theta_n, \Lambda_n)/\xi = 1]\,\mathbf{P}\{\xi = 1\} = c_2 \int\limits_{t_{1n}(R) \geqslant 0} f(T_n(R), Y_n^+(R))\,\tilde{p}(R)\,\tilde{q}^{-1}(R) \times \\ \times \delta(I - (XYX^{-1})(XYX^{-1})') \prod_p \delta(t_{1p}(R) - c_p)\,|\det Y| \left|\prod_{l \neq p}(z_l - z_p)\right| \times \\ \times |\det X_n|^{-n} \prod_{p=1}^{(n-1)/2} \delta(s_{2p-1,2p-1}(x) - \sqrt{1 - s^2_{2p,2p-1}(x)}) \times \\ \times \prod_{p=1}^{(n-1)/2} \delta(s_{2p} - 1)\,\delta(S_n - 1)\,dx dY_u(dH). \qquad (4)$$

Здесь $s_{ii}(X)$ определены системой уравнений $X = H(X)\,S(X)$, $R = HXYX^{-1}H'$. В интеграле (4) проделаем замену переменных $X = US$, где U — ортогональная матрица, а S — нижняя треугольная матрица с положительными элементами на диагонали. Якобиан такой замены переменных равен $q(\theta_i) \times \prod\limits_{i=1}^{n} s_{ii}^{i-1}$ [1, с. 16], где q — плотность углов Эйлера θ_i матрицы H. Тогда (4) примет вид

$$\mathbf{M}[f(\theta_n, \Lambda_n)/\xi = 1]\,\mathbf{P}\{\xi = 1\} = c_3 \int f(T_n(L), Y_n^+(L))\,\tilde{p}(L)\,\tilde{q}^{-1}(L)\,\delta(I - (SYS^{-1}) \times \\ \times (SYS^{-1})') \prod_p (t_{1p}(L) - c_p)\,|\det Y|\,|\prod_{l \neq p} |z_l - z_p|\, \prod_{p=1}^{(n-1)/2} \delta(s_{2p-1,2p-1} - \\ - \sqrt{1 - s^2_{2p,2p-1}}) \prod_{p=1}^{(n-1)/2} \delta(s_{2p} - 1)\,\delta(s_n - 1) \prod_{i=1}^{n} s_{ii}^{-n+i-1} dY dS \mu(dH). \qquad (5)$$

Здесь $L = HSYS^{-1}H'$, s_{ii} — элементы матрицы S.

Рассмотрим в интеграле (5) замену переменных $\tilde{S}Y\tilde{S}^{-1} = Q$, где

$$Q = \begin{bmatrix} L_1 & & & & 0 \\ & L_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & L_{(n-1)/2} & \\ q_{ij} & & & & x_n \end{bmatrix},$$

на диагонали матрицы Q стоят $(n-1)/2$ квадратных матриц второго порядка следующего вида:

$$L_p = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - s^2_{2p,2p-1}} & 0 \\ s_{2p,2p-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p & y_p \\ -y_p & x_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - s^2_{2p,2p-1})^{-1/2} & 0 \\ -s^2_{2p,2p-1}(1 - s^2_{2p,2p-1})^{-1/2} & 1 \end{bmatrix},$$

диагональные элементы нижней треугольной матрицы S равны $\sqrt{1-s^2_{21}}$, $\sqrt{1-s^2_{32}}, \ldots, \sqrt{1-s^2_{nn-1}}$, 1.

Найдем якобиан замены переменных $Q = \tilde{S}Y\tilde{S}^{-1}$. Для этого необходимо вычислить якобиан преобразования $Q_k = P_k\tilde{Y}_k P_k^{-1}$, где

$$P_k = \tilde{S}_k H_k, \quad H_k = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right\},$$

$$\tilde{Y}_k = \operatorname{diag}\{x_1 + iy_1, x_1 - iy_1 \ldots, x_k - iy_k, x_{2k+1}, \ldots, x_{n-2k}\}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{t<l, t\neq l+1, l=1,3,\ldots,2k-1} p^{(-1)}_{it}(\partial q_{tl}/\partial p_{sm})\, p_{lj} = \theta^{(s,m)}_{ij}(z_i - z_j), \quad i<j, \quad i \neq j+1,$$
$$j = 1, 3, \ldots, 2k-1,$$

где $\theta^{(s,m)}_{ij}$ — элементы матрицы $P_k^{-1}(\partial P_k/\partial p_{sm})$ — элемент матрицы P_k^{-1}; с целью упрощения формул будем считать, что $k = (n-1)/2$. Легко проверить, что

$$\operatorname{mod}\det[\partial q_{lj}/dp_{sm}]\det[p_{it}p_{lj}] = \operatorname{mod}\det|\theta^{(s,m)}_{ij}(z_i - z_j)| =$$
$$= \prod_{p>l} |z_p - z_l| \left\{\prod_{p=1,3,\ldots,2k-1} |z_p - z_{p+1}|^{-1}\right\} \gamma(\tilde{S}). \tag{6}$$

Здесь $\gamma(\tilde{S})$ — некоторая борелевская функция элементов матрицы $\tilde{S}$. Найдем функцию γ. Введем матрицу $\tilde{Q}_k = (\tilde{q}_{pl})$, где $\tilde{q}_{pl} = q_{pl}$, если $p<l$, $p \neq l+1$, $l = 1, 3, \ldots, 2k-1$, $l = \overline{1, 2k}$, и $\tilde{q}_{pl} = q_{pl}$, если $p \leqslant l$, $l = \overline{2k+1, n}$, в противном случае $\tilde{q}_{pl} = 0$, q_{pl} — элементы матрицы Q_k. Для любой ограниченной и интегрируемой функции $f(\tilde{Q}_k) = f(\tilde{q}_{pl})$ рассмотрим интеграл $\mathcal{I} = \int f(\tilde{Q}_k)\, d\tilde{Q}_k$. В этом интеграле сделаем замену переменных $\tilde{Q}_k = A\tilde{Q}'_k A^{-1}$, где $A = (a_{pl})$ — вещественная квадратная матрица n-го порядка, у которой $a_{pp} > 0$, $a_{pl} = 0$, если $p > l$. Якобиан такой замены переменных

$$\theta_1(A) = \prod_{i=1}^{n} a^{ii}_{i} \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{-(n-i+1)} \times \prod_{i=1}^{2k-1} a_{ii}a^{-1}_{i+1i+1}. \tag{7}$$

Легко видеть, что первый и второй сомножители являются соответственно левой и правой мерой Хаара на группе матриц A. После этой замены переменных введем замену $Q_k = \tilde{S}_k Y_k \tilde{S}_k^{-1}$, где матрицы $\tilde{S}_k$ и Y_k описаны выше. Тогда, используя (6) и (7), имеем

$$\mathcal{G} = \int f(AS_k Y_k S_k^{-1} A^{-1}) \prod_{p>l} |z_p - z_l| \left\{ \prod_{p=1,3,\ldots,2k-1} |z_p - z_{p+1}|^{-1} \right\} \gamma(S_k) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k} [\delta(s_{2i,2i} - 1)\,\delta(s_{2i-1,2i-1} - \sqrt{1 - s^2_{2i,2i-1}})] \prod_{i=k+1}^{n} \delta(s_{ii} - 1)\, dS_k \theta_1(A), \quad (8)$$

где $S_k = (s_{ij})$ — треугольная нижняя матрица, $dS_k = \prod_{i \leqslant j} ds_{ij}$.

С помощью (6) и замены переменных $S_k = AS_k'$ находим

$$\mathcal{G} = \int f(AS_k Y_k S_k^{-1} A^{-1}) \prod_{p>l} |z_p - z_l| \left\{ \prod_{p=1,3,\ldots,2k-1} |z_p - z_{p+1}|^{-1} \right\} \gamma(AS_k) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k} [\delta(\tilde{s}_{2i,2i} - 1)\,\delta(s_{2i-1,2i-1} - \sqrt{1 - s^2_{2i,2i-1}})] \prod_{i=k+1}^{n} \delta(\tilde{s}_{ii} - 1)\, dS_k \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{i}. \ (9)$$

Здесь $\tilde{s}_{ij}$ — элементы матрицы AS_k.

Из (8) и (9) в силу того, что функцию f можно выбирать любой, получаем

$$\gamma(\tilde{S}_k) = c \prod_{i=1}^{n} \bar{s}_{ii}^{-(n-i+1)} \prod_{i=1}^{2k-1} \bar{s}_{ii} \bar{s}_{i+1 i+1}^{-1}.$$

Здесь $c > 0$ некоторая постоянная, $\bar{s}_{ii}$ — элементы матрицы $\tilde{S}_k$.

Итак, якобиан замены переменных $Q = \tilde{S} Y \tilde{S}^{-1}$ равен

$$c \prod_{p>l} |z_p - z_l| \left\{ \prod_{p=1,3,\ldots,2k-2} |z_p - z_{p+1}|^{-1} \prod_{i=1}^{n} \bar{s}_{ii}^{-(n-i+1)} s_{ii} s_{i+1,i+1}^{-1} \right.$$

($\bar{s}_{ii}$ — элементы матрицы $\tilde{S}$).

После замены переменных $\tilde{S} Y \tilde{S}^{-1} = Q$ интеграл (5) будет иметь вид

$$\mathbf{M}[f(\theta_n, \Lambda_n)/\xi = 1]\,\mathbf{P}\{\xi = 1\} = c_4 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{t_{1n} \geqslant 0} f(T_n(R), Y_n^{+}(R))\, \tilde{p}(R)\, \tilde{q}^{-1}(R) \times$$

$$\times \exp\{-\varepsilon^{-1} \operatorname{Sp}(I - QQ')^2\}\, \varepsilon^{-n(n+1)/4} \left| \prod_{l>p} (z_l - z_p) \right| \prod_{p=1,3,\ldots,2k-2} |z_p - z_{p+1}| \times$$

$$\times \prod_{p} \delta(t_{1p}(R) - c_p)\, |\det Y| \prod_{p=1}^{(n-1)/2} \sqrt{1 - s^2_{2p,2p-1}}\, ds_{2p,2p-1} \Pi dx_i dy_i dq_{ij} \mu(dH), \quad (10)$$

где $R = HQH'$.

В интеграле (10) сделаем замену переменных

$$x_p = r_p \cos\varphi_p, \quad y_p = r_p \sin\varphi_p, \quad p = \overline{1,(n-1)/2}, \quad 0 < r_p < \infty,$$
$$0 < \varphi_p < 2\pi, \quad x_n = 1 + \varepsilon r_n, \quad 0 < r_n < \infty, \quad r_p = 1 + \varepsilon r_p,$$
$$s_{2p,2p-1} = \varepsilon s_{2p,2p-1}, \quad p = \overline{1,(n-1)/2}, \quad q_{ij} = \varepsilon q'_{ij}.$$

Легко проверить, что при достаточно малом ε при такой замене переменных

$$\exp\{-\varepsilon^{-1} \operatorname{Sp}(I - QQ')^2\} = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i f_i(Y^+, Q)\right\}$$

($f_i(Y^+, Q)$ — некоторые ограниченные борелевские функции элементов матриц Y^+ и Q),

$$\prod_{l>p}(z_l - z_p)\prod_{p=1,3,\ldots,2k-2}(z_p - z_{p+1}) = \prod_{l>p}(\gamma_l - \gamma_p)\prod_{p=1,3,\ldots,2k-2}(\gamma_p - \gamma_{p+1}) +$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\varepsilon^i\varphi_i(Y^+, r_p, p=\overline{1,(n-1)/2})$$

(φ — некоторые ограниченные борелевские функции, γ_l — собственные числа матрицы Y^+),

$$R = HY^+H' + \sum_{i=1}^{l}\varepsilon^i\psi_i(H, Y^+, r_p,\ p=\overline{1,(n-1)/2})$$

(ψ_i — некоторые ограниченные борелевские функции).

Легко видеть, что

$$\prod_{l>p}|\gamma_l - \gamma_p|\prod_{p=1,3,\ldots,2k-2}|\gamma_p - \gamma_{p+1}| = \prod_{s=1}^{(n-1)/2}\left\{\left[\sin^2\frac{x_s}{2}\right]|\sin x_s|\right\}\times$$

$$\times\prod_{s>m}\sin^2\frac{x_s - x_m}{2}\sin^2\frac{x_s + x_m}{2}.$$

Аналогичные выражения находим при условии $\xi = -1$. Используя эти соотношения и переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, получаем утверждение теоремы 1, в котором пока еще не найдены константы $c_n^{\pm}$. Найдем их. Предположим, что $\tilde{p}(A) = \tilde{q}(A)$. Тогда $\mathbf{M}\det H = 0$, $\mathbf{M}\det H^2 = 1$. Используя эти равенства, имеем $c_n^+a^+ - c_n^-a^- = 0$, $c_n^+a^+ + c_n^-a^- = 1$. Теорема 1 доказана. Аналогичные утверждения получаем для четного n.

Теорема 2. *Если у случайной матрицы H_n существует плотность распределения ее углов Эйлера p, то для любого множества $E \subset B$ и действительных чисел α_i, β_i, $i = \overline{1, n/2}$*

$$\mathbf{P}\{\theta_n \in E,\ \alpha_k < \lambda_k < \beta_k,\ k = \overline{1, n/2}\} = d_1\int_{L_1}\tilde{p}(T_nY_1T_n')\tilde{q}^{-1}(T_nY_1T_n')\times$$

$$\times\prod_{s>m}\left\{\sin^2\frac{x_s - x_m}{2}\sin^2\frac{x_s + x_m}{2}\right\}\prod|\sin x_s|\prod dx_s\mu(dT_n/t_{1p}=c_p, p=2, 4,\ldots$$

$$\ldots, n) + d_2\int_{L_2}\tilde{p}(T_nY_2T_n')\tilde{q}^{-1}(T_nY_2T_n)\prod_{s>m}\left\{\sin^2\frac{x_s - x_m}{2}\sin^2\frac{x_s + x_m}{2}\right\}\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{(n-2)/2}\sin^2 x_s\prod dx_s\mu(dT_n/t_{1p} = c_p,\ p = 2, 4, \ldots, n-2,\ t_{1n-1} > 0,\ t_{1n} > 0),$$

где

$$L_1 = \{0 < x_1 < \ldots < x_{n/2} < 2\pi,\ \alpha_k < x_k < \beta_k,\ k = \overline{1, n/2},\ T_n \in E\},$$

$$L_2 = \{0 < x_1 < \ldots < x_{(n-2)/2} < 2\pi,\ \alpha_k < x_k < \beta_k,\ k = \overline{1,(n-2)/2},$$

$$\alpha_{n-1} < 0 < \beta_{n-1},\ \alpha_n < \pi < \beta_n,\ T_n \in E\},\quad d_1 = (2a_1)^{-1},\quad d_2 = (2a_2)^{-1},$$

$$a_1 = \int\limits_{0<x_1<\ldots<x_{n/2}<2\pi}\prod_{s>m}\left\{\sin^2\frac{x_s - x_m}{2}\sin^2\frac{x_s + x_m}{2}\right\}\prod|\sin x_s|\,dx_s,$$

$$a_2 = \int\limits_{0<x_1<\ldots<x_{(n-2)/2}<2\pi}\prod_{s=1}^{(n-2)/2}\sin^2 x_s\prod_{s>m}\left\{\sin^2\frac{x_s - x_m}{2}\sin^2\frac{x_s + x_m}{2}\right\}\prod dx_s.$$

С л е д с т в и е. *Если случайная матрица H_n распределена по мере Хаара, то для нечетного n*

$$\mathbf{P}\{\alpha_k<\lambda_k<\beta_k,\ k=\overline{1,(n-1)/2},\ \xi=\pm1\}=c_n^{\pm}\int\prod_{s=1}^{(n-1)/2}\left\{\left[\sin^2\frac{x_s}{2}(1\pm1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cos^2\frac{x_s}{2}(1\mp1)\right]|\sin x_s|\right\}\prod_{s>m}\sin^2\frac{x_s-x_m}{2}\sin^2\frac{x_s+x_m}{2}\prod_s dx_s,$$

где

$$0<x_1<\ldots<x_{(n-1)/2}<2\pi,\quad \alpha_k<x_k<\beta_k,\quad k=\overline{1,(n-1)/2},$$

$$\mathbf{P}\{\theta_n\in E\}=\int_E\mu(dT_n/t_{1p}=c_p,\ p=2,4,\ldots,n-1,\ t_{1n}\geqslant0)$$

и собственные числа $e^{i\lambda_k}$ стохастически не зависят от матрицы θ_n, для четного n собственные числа $e^{i\lambda_k}$ в общем случае стохастически зависят от собственных векторов матрицы H_n и

$$\mathbf{P}\{\alpha_k<\lambda_k<\beta_k,\ k=\overline{1,n/2},\ \theta_n\in E\}=d_1\int_{\tilde L_1}\prod_{s>m}\left\{\sin^2\frac{x_s-x_m}{2}\sin^2\frac{x_s+x_m}{2}\right\}\times$$

$$\times\prod_s|\sin x_s|\,dx_s\int_E\mu(dT_n/t_{1p}=c_p,\ p=2,4,\ldots,n)+$$

$$+d_2\int_{\tilde L_2}\prod_{s>m}\left\{\sin^2\frac{x_s-x_m}{2}\sin^2\frac{x_s+x_m}{2}\right\}\prod_s\sin^2 x_s dx_s\int_E\mu(dT_n/t_{1p}=c_p,$$

$$p=2,4,\ldots,n-2,\ t_{1n-1}>0,\ t_{1n}>0),$$

где

$$\tilde L_1=\{0<x_1<\ldots<x_{n/2}<2\pi,\ \alpha_k<x_k<\beta_k,\ k=\overline{1,n/2}\},$$

$$\tilde L_2=\{0<x_1<\ldots<x_{(n-2)/2}<2\pi,\ \alpha_k<x_k<\beta_k,\ k=\overline{1,(n-2)/2},$$

$$\alpha_{n-1}<0<\beta_{n-1},\ \alpha_n<\pi<\beta_n\}.$$

1. *Гирко В. Л.* Теория случайных детерминантов.— Киев : Вища шк., 1980.— 367 с.
2. *Гирко В. Л.* Распределение собственных чисел и собственных векторов эрмитовых случайных матриц.— Укр. мат. журн., 1979, 31, № 5, с. 533—537.
3. *Гирко В. Л.* Распределение собственных чисел и векторов унитарных случайных матриц.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1981, вып. 25, с. 14—17.

Киев. ун-т Получено 16.02.83