УДК 517.54

О. А. Бусовская

Геометрическая характеристика подклассов однолистных функций

Пусть S — класс всех регулярных и однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций f, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Очевидно, функция $h_f(z) = zf'(z)/f(z)$ будет также регулярной в единичном круге, и в силу нормировки $h_f(0) = 1$. Между свойствами функций f и h_f существует глубокая связь. Так, условие $\operatorname{Re} h_f(z) > 0$ влечет звездность образа $f(E)$ единичного круга. Требование принадлежности области $h_f(E)$ полуплоскости $\operatorname{Re}\{e^{i\alpha}w\} > 0$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, приводит к α-спиральным функциям, т. е. таким, которые отображают единичный круг на области, каждая граничная точка которых достижима извне логарифмической спиралью [1].

Будем изучать класс S_G регулярных в E функций $f(z) = z + \ldots$, $f(z)/z \neq 0$, выделяемый с помощью условия $h_f(E) \subseteq G$, где G — выпуклая область, содержащая точку $w = 1$ и не содержащая начала координат. Из определения класса S_G следует, что $S_G \subset S$. Конкретизация области G приводит, в частности, к известным классам S^*, S_α, $S_{\langle\beta\rangle}$ соответственно звездных, α-спиральных и β-угольно-достижимых функций, введенных в [2].

В первой части работы рассматривается вопрос о непрерывном продолжении функций класса S_G на границу единичного круга в терминах свойств области G. Полученные результаты прилагаются к достаточным условиям однолистности в замкнутом круге.

Вторая часть работы посвящена изучению геометрических свойств функций класса S_G. Из определения звездности, спиральности и угольной достижимости видно, что указанные свойства односвязной области сводятся к достижимости каждой ее граничной точки извне множествами специального вида. В случае звездности — это лучи, содержащие на своем продолжении начало координат, а в случаях спиральности и угольной достижимости — спираль и угол фиксированного раствора соответственно. Естественным обобщением этих геометрических свойств является следующее понятие.

Пусть Q — односвязная область, содержащая начало координат, w_0 — ее фиксированная граничная точка. Область D, содержащую начало координат, будем называть (Q, w_0)-достижимой, если для каждой ее граничной точки w $D \subseteq (w/w_0)\,Q$. Функцию φ, конформно отображающую E на (Q, w_0)-достижимую область с нормировкой $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, также будем называть (Q, w_0)-достижимой.

В теореме 3 установлено, что при довольно общих ограничениях на область G функции класса S_G являются (Q, w_0)-достижимыми, где Q — образ единичного круга при отображении аналогом функции Кебе в классе S_G. Кроме того, построен пример (Q, w_0)-достижимой функции, не принадлежащей классу S_G, за исключением случая, когда G — угол с вершиной в начале координат.

1. Непрерывное продолжение. Обозначим через T класс регулярных в E функций ψ с нормировкой $\psi(0) = 1$ таких, что образ каждой окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$, при отображении функцией ψ пересекает вещественную ось два раза. Класс T введен в [3], где использовался для изучения функций, выпуклых в направлении мнимой оси. Этому классу, в частности, принадлежат функции, однолистно отображающие E с нормировкой $\psi(0) = 1$ на выпуклые, звездные относительно точки $w = 1$ или симметричные относительно вещественной оси области.

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, множество $P \subset \mathbb{C}$. Обозначим $\operatorname{diam} P = \sup\limits_{x,y \in P} |x - y|$. Компактное множество $D \subset \mathbb{C}$ будем называть локально-связным (см. [4, с. 278]), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $a, b \in D$ и $|a - b| < \delta$, то найдется связное компактное множество B, $a, b \in B \subset D$, $\operatorname{diam} B < \varepsilon$.

Теорема 1. *Пусть $f \in S_\alpha$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, $h_f \in T$. Тогда f непрерывно продолжается в $\overline{E}$ за исключением не более одной точки на $|z| = 1$, где она может обращаться в бесконечность.*

Доказательство. В [2] показано, что пересечение области $f(E)$ с логарифмической спиралью

$$w = e^{i\eta} \exp\{(1 - i \operatorname{tg} \alpha) t\}, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

при каждом $\eta \in [0, 2\pi]$ связно. Так как $h_f \in T$, из равенства

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log |f(re^{i\theta})| = -\operatorname{Im} h_f(re^{i\theta})$$

следует, что пересечение области $f(E)$ с каждой окружностью $|w| = R$, $R > 0$, связно либо пусто. Ясно, что пересечение дополнения области $f(E)$ с каждой такой окружностью и спиралью также связно либо пусто. Введем функцию $\varphi(\zeta) = 1/f(1/\zeta)$, $\zeta = 1/z$. Функция φ однолистна в $\Delta = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$, $\varphi(\infty) = \infty$. Обозначим через A дополнение области $\varphi(\Delta)$. Множество A лежит в круге $|w| \leqslant 4$, компактно и связно. Кроме того, поскольку преобразование $1/w$ переводит окружности с центром в начале координат в такие же окружности и спирали (1) в спирали

$$w = e^{-i\eta} \exp\{(i \operatorname{tg} \alpha - 1) t\}, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{2}$$

то пересечение множества A с каждой такой спиралью и окружностью связно либо пусто. Покажем, что множество A локально-связно. Согласно [4, с. 278], для этого достаточно доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ его можно разбить на конечное число компактных связных подмножеств A_i таких, что $A = \bigcup A_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$.

Если $\varepsilon \geqslant 4$, то требуемое разбиение можно построить, взяв одно множество $A_1 = A$. Пусть $0 < \varepsilon < 4$. Разобьем круг $|w| \leqslant 4$ с помощью n окружностей $|w| = R_i$, $R_i < R_{i+1}$, и m спиралей (2) на $(n+1)m$ частей W_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $\operatorname{diam} W_{ij} < \varepsilon$. Множество $\overline{W}_{ij}$ компактно и связно. Условимся, что если $w \in W_{ij}$, то $R_{i-1} < |w| < R_i$. Рассмотрим множество $A_{ij} = \{A \cap \overline{W}_{ij}\}$. Так как пересечение каждой окружности с центром в начале координат с множеством A связно либо пусто, то $\{a_{ij}\} = \{(|w| = R_{i-1}) \cap A_{ij}\}$ не более чем двусвязно. Поскольку пересечение множества A с каждой спиралью (2) связно, то любые две точки $w_1, w_2 \in A_{ij}$, для которых проходящие через них спирали пересекаются с одной и той же компонентой связности a_{ij}, можно соединить кривой, состоящей из двух дуг спиралей (2) и дуги окружности $|w| = R_{i-1}$. Если $\{a_{ij}\} = \varnothing$, то A_{ij} также пусто, так как если бы имелась хотя бы одна точка $w \in A_{ij}$, то на спирали (2), соединяющей эту точку с началом координат, точка w_0, $|w_0| = R_{i-1}$, не принадлежала бы множеству A.

Таким образом, множество A_{ij} имеет столько же компонент связности, сколько a_{ij}. Кроме того, поскольку пересечение A с каждой окружностью с центром в начале координат связно, при каждом i может быть только одно j такое, что A_{ij} двусвязно. Поэтому множество A можно разбить не более чем на $(n+1)(m+1)$ компактных связных подмножеств A_{ij}, $\operatorname{diam} A_{ij} < \varepsilon$, т. е. A — локально-связно.

Согласно [4, с. 279], локальная связность множества A эквивалентна тому, что φ непрерывно продолжается в $\overline{\Delta}$. Из того, что пересечение A с каждой окружностью с центром в начале координат связно, следует также, что $\varphi(\zeta)$ может равняться нулю на $|\zeta| = 1$ только один раз. Отсюда и из определения функции φ следует утверждение теоремы.

Пусть G — выпуклая область, не содержащая начала координат, и точка $w = 1$ принадлежит G. Обозначим через $g(z)$ функцию, конформно отображающую круг E на область G с нормировкой $g(0) = 1$, $g'(0) > 0$. Подкласс функций f, выделяемый условием $h_f(E) \subseteq G$, обозначим через S_G. Из определения области G следует, что $S_G \subset S_\alpha$ при некотором α, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Функция k_G, определяемая по формуле

$$k_G(z) = z \exp\left\{\int\limits_0^z (g(\zeta) - 1)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\},$$

принадлежит классу S_G и является аналогом функции Кебе в этом классе. Образ единичного круга при отображении функцией k_G обозначим через K_G.

Пусть φ, ψ — аналитические в E функции, $\psi(z)$ однолистна в E, $\varphi(0) = \psi(0)$. Будем говорить, что φ подчинена ψ в E ($\varphi \prec \psi$), если существует аналитическая в E функция $\omega(z)$, $|\omega(z)| \leqslant |z|$, такая, что $\varphi(z) = \psi(\omega(z))$ в E. Обозначим через H^p, $p > 0$, класс Харди регулярных в E функций f, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta < \infty$, $0 < r < 1$.

Т е о р е м а 2. *Пусть G — выпуклая область, не содержащая начала координат и отличная от полуплоскости, $1 \in G$. Тогда функция $f \in S_G$ непрерывно продолжается в $\overline{E}$ и отображает E на область, ограниченную спрямляемой кривой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку область G выпукла и отлична от полуплоскости, то из [5] следует, что $g \in H^1$. Так как $h_f \prec g$, то по теореме Рогозинского [6, с. 357] h_f также принадлежит классу Харди H^1. Последнее, согласно [7], эквивалентно $f' \in H^1$, откуда по теореме Рисса [6, с. 395] следует утверждение теоремы.

Ввиду теоремы 2 достаточные условия гомеоморфного продолжения регулярной в E функции в замкнутый круг, полученные в [7], можно сформулировать только в терминах свойств области $h_f(E)$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть $f(z) = z + c_2z^2 + \ldots$ — аналитическая в E функция, $f(z)/z \neq 0$ при $z \in E$ и $h_f(E) \subseteq G$, где G — выпуклая область, не содержащая начала координат, и при любых $\rho > 0$ и $0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$ пересечение полукруга $\{w : |w| < \rho,\ \operatorname{Re}(e^{i\beta} w) > 0\}$ с дополнением области G непусто. Тогда f однолистна в $\overline{E}$, гомеоморфно продолжается в $\overline{E}$ и отображает E на область, ограниченную спрямляемой жордановой кривой.*

Обозначим $\gamma_f(\theta) = \lim\limits_{r \to 1} f(re^{i\theta})$. Как следует из [8], для спиральных функций предел справа существует, конечный или бесконечный, при всех $\theta \in [0, 2\pi]$.

С л е д с т в и е 2. *Граница области K_G — замкнутая кривая, представимая в виде объединения не более трех гладких дуг.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим вначале, что G — ограниченная область и $0 \notin \overline{G}$. Из выпуклости области G следует, что g непрерывно продолжается в $\overline{E}$. По теореме 2 k_G также непрерывно продолжается в $\overline{E}$. Поэтому из равенства

$$zk_G'(z)/k_G(z) = g(z) \tag{3}$$

следует, что $k_G'(z)$ непрерывно продолжается в $\overline{E}$. Так как

$$\gamma_{k_G}'(\theta) = \lim_{r\to 1} \frac{\partial k_G(re^{i\theta})}{\partial\theta} = \lim_{r\to 1} ire^{i\theta} k_G'(re^{i\theta}), \tag{4}$$

то $\gamma_{k_G}'(\theta)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$ и не обращается в нуль, следовательно, граница области K_G гладкая.

Из выпуклости области G и однолистности функции $g(z)$ в E следует, что эта функция может принимать на $|z| = 1$ значение ∞ один или два раза. Пусть существует одна точка $e^{i\theta_N}$, $g(e^{i\theta_N}) = \infty$. Из равенств (3), (4) следует, что $\gamma_{k_G}'(\theta)$ может обращаться в бесконечность только в одной точке на $[0, 2\pi]$. Однолистность функции $g(z)$ в E влечет также, что $\gamma_{k_G}'(\theta)$ может равняться нулю только в одной точке на $[0, 2\pi]$. Так как область G выпукла, то в точках единичной окружности, где $g(e^{i\theta}) = 0$ или ∞, существуют левосторонний и правосторонний пределы $\arg g(e^{i\theta})$. Из равенства $\arg g(e^{i\theta}) = \arg(-i\gamma_{k_G}'(\theta)/\gamma_{k_G}(\theta))$ следует, что в точках нарушения гладкости границы K_G существуют левосторонний и правосторонний пределы угла наклона касательной к радиусу-вектору, т. е. эта кривая кусочно-гладкая. Если $g(z) = \infty$ в двух точках на $|z| = 1$, то $G = \{w : a < \mathrm{Re}(e^{i\alpha}w) < b\}$, $0 \leqslant a < 1 < b$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, и наше утверждение проверяется непосредственным вычислением.

2. Геометрическая характеристика подклассов спиральных функций. В [2] было показано, что когда $G = \{w : |\arg w| < \beta\pi/2\}$, $0 < \beta \leqslant 1$, класс S_G состоит из угольно-достижимых функций и совпадает с классом $(K_G, \gamma_{k_G}(\theta_m))$-достижимых функций, где θ_m определяется из равенства $g(e^{i\theta_m}) = 0$. Исследуем соотношения между двумя упомянутыми классами при более общих ограничениях на область G.

Теорема 3. *Пусть G — выпуклая область, содержащая точку $w = 1$, и начало координат лежит на границе области G. Тогда функция $f \in S_G$ является $(K_G, \gamma_{k_G}(\theta_m))$-достижимой.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $G \subseteq A = \{w : \mathrm{Re}(e^{i\alpha}w) > 0\}$ при некотором α, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Если G совпадает с A, то $S_G = S_\alpha$ и доказательство теоремы содержится в [2]. В противном случае $S_G \subset S_\alpha$ и по теореме 2 каждая функция $f \in S_G$ непрерывно продолжается в $\overline{E}$ и отображает E на область, ограниченную спрямляемой кривой.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что для θ такого, что $\arg f(e^{i\theta}) = \arg k_G(e^{i\theta_m})$, функция $f(z)$ подчинена в E функции $K(z) = (f(e^{i\theta})/k_G(e^{i\theta_m}))\, k_G(z)$. Ясно, что $f(e^{i\theta}) = K(e^{i\theta_m})$.

Предположим, что область $f(E)$ не лежит целиком в области $K(E)$. Тогда найдется r_0, $0 < r_0 < 1$, такое, что $f(|z| < r_0) \subset K(E)$ и на окружности $|z| = r_0$ существует по крайней мере одна точка $z = r_0e^{ia}$, $f(r_0e^{ia}) = K(e^{ib})$. Отметим, что $b \neq \theta_m$ ввиду однолистности функции $f(z)$ в E. Если область $K(E)$ имеет спиральный разрез, то точка $K(e^{i\theta_m})$, как показано в [7], совпадает с внутренним концом разреза, и в силу α-спиральности функции f точка $K(e^{ib})$ не может лежать на разрезе, поэтому сужение функции K^{-1} на $f(|z| < r_0)$ однозначно продолжается в замыкание этой области. Обозначим $f_r(z) = f(r_0z)$. Функция $\omega(z) = K^{-1}(f_r(z))$ удовлетворяет условиям леммы Шварца. Отметим, что $\omega(e^{ia}) = e^{ib}$ и существует $\lim\limits_{r\to 1} \omega'(re^{ia}) = \omega'(e^{ia})$, конечный или бесконечный.

Логарифмически дифференцируя равенство $f_r(z) = K(\omega(z))$, получаем $zf_r'(z)/f_r(z) = z\omega'(z)K'(\omega(z))/K(\omega(z))$.

Положим $z = re^{ia}$ и перейдем к пределу при $r \to 1$. Так как $h_K(z) = g(z)$, то

$$h_f(r_0e^{ia}) = e^{i(a-b)}\omega'(e^{ia})\, g(e^{ib}). \tag{5}$$

По лемме Жюлиа [4, с. 306], если φ — аналитическая функция в E, $|\varphi(z)| < 1$, $\varphi(1) = 1$, то при стремлении z к 1 вдоль вещественной оси

$$\varphi'(1) = \lim_{z\to 1} \frac{1-\varphi(z)}{1-z} \geqslant 1.$$

Отсюда легко видеть, что $e^{i(a-b)}\omega'(e^{ia}) \geqslant 1$. Поэтому, если $g(e^{ib}) = \infty$, то из (5) следует $h_f(r_0 e^{ia}) = \infty$, в противоречии с тем, что h_f — аналитическая функция в E. Следовательно, $g(e^{ib}) \neq \infty$. Как отмечалось выше, $g(e^{ib}) \neq 0$. Ввиду этого из (5) получаем

$$h_f(r_0 e^{ia})/g(e^{ib}) \geqslant 1. \tag{6}$$

Поскольку область G звездна относительно точки $w = 0$, неравенство (6) означает, что точка $h_f(r_0 e^{ia})$ лежит либо вне области G, либо на ее границе, что противоречит принадлежности f классу S_G. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из доказательства теоремы (неравенство (6)) видно, что функция φ_2, принадлежащая классу S и отображающая E на $(K_G, \gamma_{kG}(\theta_m))$-достижимую область, являющуюся пересечением областей c_1K_G, c_2K_G, $0 < |c_1|, |c_2| < \infty$, $\arg c_1 \neq \arg c_2$, не принадлежит классу S_G, за исключением случая, когда G — угол с вершиной в начале координат. В последнем случае $\varphi_2 \in S_G$, и с помощью предельного перехода по последовательности φ_n функций, отображающих E на пересечение n областей c_iK_G, при $n \to \infty$ легко показать, что класс $(K_G, \gamma_{kG}(\theta_m))$-достижимых функций включен в S_G. Это обобщает результат из [2], где G — угол, симметричный относительно вещественной оси. Пример функции φ_2 показывает, что в общем случае класс $(K_G, \gamma_{kG}(\theta))$-достижимых функций шире, чем класс S_G.

В заключение отметим, что теоремы 2, 3 справедливы, если в выпуклой области G провести разрез вдоль вещественной оси справа от точки $w = 1$.

1. *Špaček L.* Contribution a la theorie des fonctions univalentes.— Čas. pěstov. mat., 1933, N 62, p. 12—19.
2. *Stankiewich J.* Quelques problemes extremaux dans les classec des fonctions α-angulairement ettoilles.— Ann. UMCS A, 1966, 20, N 6, p. 59—75.
3. *Robertson M. S.* On the theory of univalent functions.— Ann. Math., 1936, N 37, p. 374—408.
4. *Pommerenke Ch.* Univalent functions.— Göttingen : Vandenhoeck& Ruprecht, 1975.— 375 p.
5. *Eenigenburg P. J., Keogh F. R.* The Hardy class of some univalent functions and their derivatives.— Mich. Math. J., 1970, N 17, p. 335—346.
6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1966.— 628 с.
7. *Бусовская О. А., Горяйнов В. В.* О гомеоморфном продолжении спиральных функций.— Укр. мат. журн., 1981, 33, № 5, с. 656—660.
8. *Keogh F. R.* Some theorems on conformal mapping of bounded star—shaped domains.— Proc. London Math. Soc., 1959, N 9, p. 481—491.

ГВЦ М-ва уголь. пром-сти УССР, Донецк Получено 25.07.83