УДК 519.21

И. К. Мацак

Одна задача для случайного блуждания на плоскости

1. Пусть $\{u_n\}_1^\infty$ — последовательность независимых случайных величин $P(u_n = i) = 1/2$, $i = \pm 1$, последовательность $\{v_n\}_1^\infty$ не зависит от $\{u_n\}_1^\infty$ и ей эквивалентна,

$$U_0 = 0,\ U_n = U_{n-1} + u_n,\quad V_0 = 0,\ V_n = V_{n-1} + v_n,$$
$$T = \min(k \geqslant 1 : U_k \in (U_0, \dots, U_{k-1}),\ V_k \in (V_0, \dots, V_{k-1})),$$
$$B_n = (T > n),\ \rho_n = P(B_n)/P(B_{n-1}),\ n \geqslant 1.$$

Изучим предельное поведение величин ρ_n. Пусть

$$\rho = \lim_{n\to\infty} (P(B_n))^{1/n}. \tag{1}$$

Вопрос о нахождении предела (1) возник в связи с известной задачей о самопересечении простого случайного блуждания на плоскости [1]. Предел (1) не эквивалентен соответствующему пределу в задаче о самопересечении, а дает некоторую оценку снизу (согласно [4], полученное нами значение ρ дает достаточно грубую оценку снизу).

Основной результат работы составляет следующая теорема.

Теорема. *Справедливы неравенства*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \rho_n \leqslant (5/16)^{1/2} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \rho_n.$$

Следствие. *Существует предел* (1) *и* $\rho = (5/16)^{1/2}$.

2. Введем ряд обозначений, которые используются в настоящей работе:

$$R_u^i(n) = \{\max_{k=\overline{0,n}} U_k - i,\ \min_{k=\overline{0,n}} U_k + i\},\quad \| R_u(n) \| = \max_{k=\overline{0,n}} U_k - \min_{k=\overline{0,n}} U_k,$$

$$\| R_n \| = \min(\| R_u(n) \|,\ \| R_v(n) \|),\quad R_u^{0,m}(n) = \bigcup_{i=0}^m R_u^i(n),$$

$$P_u^i(n) = P(U_n \in R_u^i(n),\ V_n \in R_v^0(n),\ \| R_N \| > k,\ B_n),$$

$$P_{(n)}^{0,m} = P(U_n \in R_u^{0,m}(n),\ V_n \in R_v^{0,m}(n),\ \| R_N \| \geqslant k,\ B_n).$$

Величины $R_v^i(n)$, $P_v^i(n)$, $R_v^{0,m}(n)$, $\| R_v(n) \|$ определяются на последовательности $\{V_n\}_0^\infty$ аналогично $R_u^i(n)$, $P_u^i(n)$, $R_u^{0,m}(n)$, $\| R_u(n) \|$;

$$L(n) = P(U_{n-1} \in R_u^0(n-1),\ V_{n-1} \in R_v^0(n-1),\ \| R_N \| \leqslant k/B_{n-1}). \tag{2}$$

Величины N, k, неявно входящие в $P_u^i(n)$, $P^{0,m}(n)$, $L(n)$, каждый раз будут уточняться.

Из (2) имеем

$$\rho_n = P(B_n, (U_{n-1} \in R_u^0(n-1)) \cup (V_{n-1} \in R_v^0(n-1)),\ B_{n-1})/P(B_{n-1}) =$$
$$= P(B_n/U_{n-1} \in R_u^0(n-1),\ V_{n-1} \overline{\in} R_v^0(n-1),\ B_{n-1}) P(U_{n-1} \in R_u^0(n-1),$$
$$V_{n-1} \overline{\in} R_v^0(n-1)/B_{n-1}) + P(B_n/U_{n-1} \overline{\in} R_u^0(n-1),\ V_{n-1} \in R_v^0(n-1),\ B_{n-1}) \times$$
$$\times P(U_{n-1} \overline{\in} R_u^0(n-1),\ V_{n-1} \in R_v^0(n-1)/B_{n-1}) + P(B_n/U_{n-1} \in R_u^0(n-1),$$
$$V_{n-1} \in R_v^0(n-1),\ B_{n-1}) P(U_{n-1} \in R_u^0(n-1),\ V_{n-1} \in R_v^0(n-1)/B_{n-1}) =$$
$$= (1/2) P(U_{n-1} \in R_u^0(n-1),\ V_{n-1} \overline{\in} R_v^0(n-1)/B_{n-1}) + (1/2) P(U_{n-1} \overline{\in}$$
$$\overline{\in} R_u^0(n-1),\ V_{n-1} \in R_v^0(n-1)/B_{n-1}) + (3/4) P(U_{n-1} \in R_u^0(n-1),$$
$$V_{n-1} \in R_v^0(n-1)/B_{n-1}) = 1/2 + (1/4) P(U_{n-1} \in R_u^0(n-1),$$
$$V_{n-1} \in R_v^0(n-1)/B_{n-1}). \tag{3}$$

Здесь использованы следующие элементарные вероятностные соображения: при условии, что на n-м шаге выполнено событие $(U_n \in R_u^0(n))$, событие $(U_{n+1} \overline{\in} (U_0, \dots, U_n))$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$(u_{n+1} = 1, U_n = \max_{k=\overline{0,n}} U_k) \cup (u_{n+1} = -1, U_n = \min_{k=\overline{0,n}} U_k).$$

Из равенства (3) получаем

$$\rho_n \geqslant 1/2, \quad P(B_n) \geqslant (1/2)^{n-1}. \tag{4}$$

3. Лемма 1. *При фиксированном* $k > 1$, $N + k = n$

$$\lim_{n\to\infty} L(n) = 0.$$

При доказательстве леммы 1 используются неравенства (4) и соотношение $P(\lim_{n\to\infty} \| R_u(n) \| = \infty) = 1$.

Лемма 2. *Пусть в определении величин* $P^{0,m}(n)$ *в* (2) $k > m$, $N < n - m$. *Тогда*

$$P^{0,0}(n) = P^{0,1}(n-1)/4, \tag{5}$$

$$P^{0,i}(n) = (P^{0,i-1}(n-1) + P^{0,i+1}(n-1) + P^{0,0}(n-1))/4, \quad i \geqslant 1. \tag{6}$$

Доказательства равенств (5), (6) аналогичны. Докажем равенство (6) с помощью индукции. При $i = 1$ равенство (6) справедливо:

$$P^{0,1}(n) = P^{0,0}(n) + P_u^1(n) + P_v^1(n) = (1/4) P^{0,1}(n-1) + (1/4)(P_u^2(n-1) + P^{0,0}(n-1)) + (1/4)(P_v^2(n-1) + P^{0,0}(n-1)) = (1/4)(2P^{0,0}(n-1) + P^{0,2}(n-1)).$$

Если (6) справедливо при $i-1$, то

$$P^{0,i}(n) = P^{0,i-1}(n) + P_u^i(n) + P_v^i(n) = (1/4)(P^{0,i-2}(n-1) + P^{0,i}(n-1) + P^{0,0}(n-1)) + (1/4)(P_u^{i-1}(n-1) + P_u^{i+1}(n-1)) + (1/4)(P_v^{i-1}(n-1) + P_v^{i+1}(n-1)) = (1/4)(P^{0,i-1}(n-1) + P^{0,i+1}(n-1) + P^{0,0}(n-1)).$$

Более подробное рассмотрение этих выкладок по существу эквивалентно доказательству равенства (3).

Лемма 3. *Пусть последовательность векторов* $\{M_k^i,\ k = \overline{0, i}\}$, $i = 0, 1, \dots$, *связана рекуррентным соотношением*

$$M_{i+1}^0 = M_i^0 + M_i^1, \quad M_{i+1}^k = M_i^{k-1} + M_i^{k+1}, \quad k = \overline{1, i-1},$$
$$M_{i+1}^i = M_i^{i-1}, \quad M_{i+1}^{i+1} = M_i^i, \quad M_0^0 = 1. \tag{7}$$

Тогда $F(s) = \sum_{i=0}^{\infty} M_i^0 s^i = (2s + 1 - (1 - 4s^2)^{1/2})/2s(1 - 4s^2)^{1/2}$.

Доказательство. Положим

$$M_i^k = C_i^{[(i-k)/2]}, \tag{8}$$

$[x]$ — целая часть x. Из известного соотношения для биномиальных коэффициентов $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k-1}$ следует равенство $C_{n+1}^{z(1)} = C_n^{z(1)} + C_n^{z(-1)}$, $z(i) = [(n - k + i)/2]$. Отсюда, подставляя (8) в (7), получаем эквивалентность соотношений (7), (8). Следовательно, $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{[n/2]} s^n$. Теперь $F(s)$ можно легко вычислить, если исходить из равенства [3, с. 61] $\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n s^n/(n+1) = (1 - (1 - 4s)^{1/2})/2s$.

Лемма 4. *Пусть последовательность векторов* $\{n_i^k,\ k=\overline{0,\ i}\}$, $i = 0, 1, \ldots$, *связана рекуррентным соотношением*

$$n_{i+1}^0=\sum_{k=1}^{i} n_i^k+n_i^1,\quad n_{i+1}^k=n_i^{k-1}+n_i^{k+1},\quad k=\overline{1, i-1},$$
$$n_{i+1}^i=n_i^{i-1},\quad n_{i+1}^{i+1}=n_i^i,\quad n_0^0=1. \tag{9}$$

Если $N_i=\sum\limits_{k=0}^{i} n_i^k$, *то* $N_i \sim c^{-1}5^{(i+1)/2}$, *где* $0<c=(2F'(5^{-1/2})/F^2(5^{-1/2}))-1<\infty$, $F(s)$ *определена в лемме 3.*

Доказательство. Положим $N_i^k=\sum\limits_{j=k}^{i} n_i^j$, $k=\overline{0, i}$. По определению $N_i^0=N_i$. Нетрудно заметить, что рекуррентное соотношение (9) эквивалентно следующему:

$$N_{i+1}^0=N_i^0+2N_i^1,\quad N_{i+1}^k=N_i^{k-1}+N_i^{k+1},\quad k=\overline{1, i-1},$$
$$N_{i+1}^i=N_i^{i-1},\quad N_{i+1}^{i+1}=N_i^i,\quad N_0^0=1. \tag{10}$$

Пусть $F(s)$ — производящая функция последовательности M_i^0, определяемой рекуррентным соотношением (7):

$$G(s)=\sum_{i=0}^{\infty} N_i^0 s^i,\quad U_G(s)=1-1/G(s),\quad U_F(s)=1-1/F(s)=\sum_{i=0}^{\infty} u_i s^i. \tag{11}$$

Следовательно, $M_{i+1}^0=\sum\limits_{k=0}^{i+1} u_k M_{i+1-k}^0$. Сопоставляя рекуррентные соотношения (7), (10), получаем

$$N_{i+1}^0=u_0N_{i+1}^0+u_1N_i^0+2\sum_{k=2}^{i+1} u_k N_{i+1-k}.$$

Так как $u_0=0$, $u_1=1$, то

$$U_G(s)=2U_F(s)-s=2-2/F(s)-s. \tag{12}$$

Для нахождения радиуса сходимости ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} N_i^0 s^i$ необходимо решить уравнение $U_G(s)=1$, $0<s<1$, которое с учетом (11), (12) сводится к следующему:

$$2/(1-s)=(2s+1-(1-4s^2)^{-1/2})/2s(1-4s^2)^{1/2},\quad 0<s<1.$$

Элементарные преобразования приводят к равенству $s=5^{-1/2}$. Нетрудно также заметить, что

$$U_G'(s^{-1/2})=(2F'(5^{-1/2})/F^2(5^{-1/2}))-1\neq 0, \infty.$$

Из соотношения (10) немедленно следует монотонность последовательности N_i^0, $N_i^0>0$. Применяя классическую тауберову теорему Харди—Литлвуда [2, с. 513], завершаем доказательство.

Лемма 5. *Пусть последовательность* $\{n_i^k,\ k=\overline{0, 2}\}_{i=0}^{\infty}$ *задается рекуррентным соотношением*

$$n_{i+1}^0=n_i^0+n_i^1,\quad n_{i+1}^1=2n_i^0+n_i^2,\quad n_{i+1}^2=n_i^1,\quad n_0^0=1,\quad n_0^1=n_0^2=0. \tag{13}$$

Тогда $n_i^0 \sim cr^{-i}$, *где* $5^{-1/2}<r<1/2$, $U(r)=1$, $U(s)=s+2s^2/(1-s^2)$.

Доказательство. Из (13) имеем

$$n_{i+1}^0=n_i^0+2n_{i-1}^0+n_{i-2}^1=n_i^0+2n_{i-3}^0+n_{i-4}^1=n_i^0+$$
$$+2(n_{i-1}^0+n_{i-3}^0+n_{i-5}^0+\ldots). \tag{14}$$

Пусть $F(s)=\sum_{i=0}^{\infty} n_i^0 s^i$, $U(s)=s+2s^2/(1-s^2)$. Тогда (14) приводит к равенству

$$F(s)=1/(1-U(s)).$$

Нетрудно проверить, что $0<U'(s)<\infty$ при $0<s<1$, $U(1/2)>1$, $U(5^{-1/2})<1$. Следовательно, существует $r\in(5^{-1/2}, 1/2)$ такое, что $U(r)=1$. Для завершения доказательства остается сослаться на тауберову теорему [2, с. 513].

4. Доказательство теоремы. Пусть $P^{0,m}(n)$ определены в (2). Тогда при $i\leqslant k$, $n-i\geqslant N+1$, используя равенства (5), (6), имеем

$$P^{0,0}(n-1)=4^{-i}\sum_{j=0}^{i} P^{0,j}(n-i-1)\,n_i^j, \tag{15}$$

где последовательность n_i^j удовлетворяет рекуррентному соотношению (9). Из (15), (3) получаем

$$\rho_n=1/2+P^{0,0}(n-1)/4P(B_{n-1})+L(n)/4=1/2+\left(4^{i+1}\prod_{j=n-i}^{n-1}\rho_j\right)^{-1}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{i} P^{0,j}(n-i-1)\,n_i^j/P(B_{n-i-1})+L(n)/4. \tag{16}$$

Положим $N=n-k$, $\underline{\lim}_{n\to\infty}\rho_n=\rho'$, $N_i=\sum_{j=0}^{i} n_i^j$. Пусть $\rho'>(5/16)^{1/2}$. При фиксированном i можно подобрать подпоследовательность $\{n_k\}_0^\infty$ такую, чтобы последовательности $\{\rho_{n_k-j}\}_{k=0}^\infty$, $j=\overline{0,i}$, сходились к ρ'. Переходя к пределу по подпоследовательности $\{n_k\}_0^\infty$ в неравенстве

$$\rho_n\leqslant 1/2+N_i\left(4^{i+1}\prod_{j=n-i}^{n-1}\rho_i\right)^{-1}+L(n), \tag{17}$$

находим $\rho'\leqslant 1/2+N_i(4\rho')^{-i}/4$, поскольку согласно лемме 1 $\lim_{n\to\infty}L(n)=0$. Справедливость (17) следует из (16).

Учитывая асимптотику $N_i\sim c5^{1/2}$ (лемма 4) и произвольность i, приходим к противоречию с предположением $\rho'>(5/16)^{1/2}$. Следовательно, $\underline{\lim}_{n\to\infty}\rho_n\leqslant(5/16)^{1/2}$. Пусть теперь $\overline{\lim}_{n\to\infty}\rho_n=\rho_n''=1/2+c<(5/16)^{1/2}$, $c>0$. Отсюда следует, что существует подпоследовательность $\{n_k\}_0^\infty$ такая, что $\lim_{k\to\infty}P^{0,0}(n_k-i-1)/P(B_{n_k-i-1})=4c$ и существуют пределы последовательностей $\{\rho_{n_k-i+j}\}_0^\infty$, $j=\overline{0,i-1}$. Из (16) непосредственно следует неравенство

$$\rho_n\geqslant 1/2+N_i\left(4^{i+1}\prod_{j=n-i}^{n-1}\rho_j\right)^{-1}P^{0,0}(n-i-1)/P(B_{n-i-1}). \tag{18}$$

Переходя к пределу по подпоследовательности $\{n_k\}_0^\infty$ в неравенстве (18), получаем $\rho''\geqslant 1/2+N_i(4\rho'')^{-i}c/4$. При больших i в наших предположениях приходим к противоречию. Для завершения доказательства теоремы необходимо показать, что $\overline{\lim}_{n\to\infty}\rho_n>1/2$. Будем исходить из равенств

$$\begin{gathered}P^0(n)=P_u^0(n)=P_v^0(n),\quad P^0(n+1)=(P^0(n)+P_u^1(n)+P_v^1(n))/4,\\ P_u^1(n+1)+P_v^1(n+1)=(2P^0(n)+P_u^2(n)+P_v^2(n))/4,\\ P_u^2(n+1)+P_v^2(n+1)=(P_u^1(n)+P_v^1(n)+P_u^3(n)+P_v^3(n))/4.\end{gathered} \tag{19}$$

В определении (2) предполагается, что $N \leqslant n-2$, $k>2$. Равенства (19) эквивалентны равенствам (5), (6). Положим $n_i^0 = 4^i P^0(i)$, $n_i^1 = 4^i (P_u^1(i) + P_v^1(i))$, $n_i^2 = 4^i (P_u^2(i) + P_v^2(i))$. Используя неравенство $P(B_n) \geqslant P^0(n)$, равенства (19) и лемму 5, получаем $P(B_n) \geqslant c(4r)^{-n}$, $c>0$, $r<1/2$. Отсюда непосредственно следует неравенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \rho_n > 1/2$. Теорема доказана.

Справедливость следствия вытекает из теоремы и работ [5, гл. 1, задача 98; 6].

1. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания.— М. : Мир, 1969.— 472 с.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей : В 2-х т.— М. : Мир, 1967.— Т. 2. 752 с.
3. *Єжов І. І., Скороход А. В., Ядренко М. І.* Елементи комбінаторики.— К. : Вища шк., 1972.— 83 с.
4. *Fisher M. E., Sykes M. F.* Excluded — volum problem end ising model of ferromagnetism.— Phys. Rev., 1959, **114**, N 1, p. 45—58.
5. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа : В 2-х т.— М. : Наука, 1978.— Т. 1. 391 с.
6. *Зайдман Р. А.* Об асимптотике некоторых последовательностей, встречающихся в задачах немарковских блужданий и теории информации.—Вестн. Ленингр. ун-та, 1965, 1 № 1, с. 24—33.

Укр. фил. ЦНИИКИВР, Киев

Получено 27.12.83