УДК 517.946

В. Гр. Самойленко, А. К. Прикарпатский

Преобразования Бэклунда для нелинейного уравнения Кортевега — де Фриза с алгебро-геометрической точки зрения

Пусть задано нелинейное уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t = 6uu_x + u_{xxx}, \quad u|_{t=t_0} = \varphi, \tag{1}$$

где $\varphi \in C_l^{(\infty)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^1)$ — пространство l-периодических гладких функций на $\mathbb{R}^1$, $t \in \mathbb{R}^1$ — эволюционный параметр. Используя представление Лакса для уравнения (1), можно дать полное описание всех конечнозонных его решений в явном виде через θ-функции Римана [1]:

$$u(x, t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta((x - x_0)\alpha + \beta(t - t_0) + \gamma) + c(\Gamma). \tag{2}$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^N$, $c(\Gamma) \in \mathbb{R}^1$ — числовые параметры, зависящие только от гиперэллиптической римановой поверхности Γ рода $N \in \mathbb{Z}_+$, где N — число зон в спектре ассоциированного с (1) оператора Штурмана — Лиувилля. Решение (2) ищется с помощью алгебро-геометрических методов [1], сущность которых здесь сводится к следующей задаче: решить проблему Якоби обращения абелевых интегралов первого рода на римановой поверхности $\Gamma = \{\lambda, w = \sqrt{P(\lambda)} : P(\lambda) = \sum_{k=0}^{2N+1} p_k\lambda^k,\ p_k \in \mathbb{R}^1,\ \lambda, w \in \mathbb{C}^1\}$:

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{\mu}^{\mu_k(x,t)} d\omega(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mu}^{\mu_k(x_0,t_0)} d\omega(\lambda) + \alpha(x - x_0) + \beta(t - t_0). \tag{3}$$

Здесь $d\omega(\lambda)$, $\lambda \in \Gamma$, — нормированный вектор-базис абелевых дифференциалов первого рода на Γ, $\mu \in \Gamma$ — произвольная фиксированная точка на Γ, функции $\mu_k : \mathbb{R}^2 \to \Gamma$, $k = \overline{1, N}$, таковы, что

$$u(x, t) = -2 \sum_{j=1}^{N} \mu_j(x, t) + \sum_{j=0}^{2N} E_j, \tag{4}$$

где $E_j \in \mathbb{R}^1$, $j = \overline{0, 2N}$, — точки ветвления поверхности Γ.

Пусть на множестве M решений уравнения Кортевега—де Фриза (1) задано следующее глобальное отображение Бэклунда $B_z : M \to M$, где $z \in R^1$ — некоторый параметр. В силу представления (4) будем считать, что это отображение действует на множестве данных Коши уравнений для функций $\mu_j \in \Gamma$, $j = \overline{1, N}$, в классе конечнозонных потенциалов с фиксированным числом зон. Тогда, решая проблему обращения Якоби (3) для преобразованных данных Коши $\mu_j(x_0, t_0 \mid z) = B_z\mu_j(x_0, t_0)$, $j = \overline{1, N}$, получаем представление отображения $B_z : M \to M$ в виде (2). Предположив зависимость отображения $B_z : M \to M$ от параметра $z \in \mathbb{R}^1$ гладкой, рассмотрим инфинитезимальное отображение $b_z(\varepsilon) = B_{z+\varepsilon} B_z^{-1} : M \to M$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$, имеющее свойства

$$b_z(\varepsilon)\, u\,|_{\varepsilon=0} = u, \quad b_z(\varepsilon)\, \mu_j(x_0, t_0)|_{\varepsilon=0} = \mu_j(x_0, t_0; \varepsilon)\,|_{\varepsilon=0} = \mu_j(x_0, t_0) \in \Gamma, \quad j = \overline{1, N},$$

$$\left.\frac{d\mu_j(x_0, t_0; \varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \{p(z), \mu_j(x_0, t_0)\}. \tag{5}$$

Здесь скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\} = \int_0^l dx\, \mathrm{grad}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{grad}(\cdot)$, $p(z)$ — производящая функция законов сохранения динамической системы (1), удовлетворяющая рекурсионному свойству Леннарта:

$$(\partial^3 + 2u\partial + 2\partial u)\, \mathrm{grad}\, p(z) = z\partial\, \mathrm{grad}\, p(z), \tag{6}$$

где $\partial = \partial/\partial x$, $z \in \mathbb{R}^1$ — произвольное число. Отображению (5) соответствует отображение на M вида

$$\frac{d}{d\varepsilon} b_z(\varepsilon)\, u\,|_{\varepsilon=0} = \{p(z), u\}, \tag{7}$$

что приводит к следующему результату:

$$\frac{dB_{z+\varepsilon}}{d\varepsilon} B_z^{-1}\, u\,|_{\varepsilon=0} = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\, \mathrm{grad}\, H_j z^{-\frac{1}{2}j}, \tag{8}$$

где $p(z) \simeq \sum_{j=1}^{\infty} H_j z^{-\frac{1}{2}j}$, $z \in \mathbb{R}^1$ — асимптотическое разложение при $z \to \infty$.

Результат вида (8), установленный ранее другими методами в [2—5] немедленно следует из (3) с помощью следующих вычислений:

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{\mu}^{\mu_k(x,t;\varepsilon)} d\omega(\lambda)=\sum_{k=1}^{N}\int_{\mu}^{\mu_k(x_0,t_0;\varepsilon)} d\omega(\lambda)+\alpha(x-x_0)+\beta(t-t_0)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int_{\mu}^{\mu_k(x_0,t_0)} d\omega(\lambda)+\sum_{k=1}^{N}\frac{d\omega(\mu_k(x_0,t_0))}{d\lambda}\left.\frac{d\mu_k(x_0,t_0;\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varepsilon+O(\varepsilon^2)+$$

$$+\alpha(x-x_0)+\beta(t-t_0)=\sum_{k=1}^{N}\int_{\mu}^{\mu_k(x_0,t_0)} d\omega(\lambda)+z\frac{d\omega(z)}{dz}\varepsilon+O(\varepsilon^2)+$$

$$+\alpha(x-x_0)+\beta(t-t_0), \qquad (9$$

где использованы результаты [6] при вычислении суммы

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{d\omega(\mu_k(x_0,t_0))}{d\lambda}\left.\frac{d\mu_k(x_0,t_0;\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Выражение (9) означает, что в первом порядке по $\varepsilon\to 0$ отображени $b_z(\varepsilon): M\to M$ гамильтоново и справедливо равенство (7). Равенство (8) мож но, очевидно, представить в виде

$$\frac{dB_z}{dz}B_z^{-1}u=-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{grad}H_j\cdot z^{-\frac{1}{2}j}. \qquad (1($$

Так как в силу (6) справедливы формулы рекурренции.

$$\operatorname{grad}H_{2j}=\Lambda^{j-1}\operatorname{grad}H_2,\quad \operatorname{grad}H_{2j+1}=\Lambda^{j-1}\operatorname{grad}H_3, \qquad (1]$$

где $j=\overline{1,\infty}$, $\Lambda=\partial^{-1}(\partial^3+2u\partial+2\partial u)$, $\partial^{-1}=\frac{1}{2}\int_0^x(\cdot)\,dx-\frac{1}{2}\int_x^l(\cdot)\,dx$, $H_2=$ $=0$, $H_3=\frac{1}{2}\int_0^l dxu^2$, то суммируя ряд Неймана (10), получаем

$$\frac{dB_z}{dz}B_z^{-1}u=z^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\Lambda^{-1}(\Lambda-z)^{-1}u. \qquad (1?$$

Выражение (12) связывает преобразование Бэклунда $B_z: M\to M$ с ре курсионным оператором Λ уравнения Кортевега—де Фриза (1). Аналогич ное (12) выражение для динамических систем, ассоциированных со спект ральной задачей Дирака [6], получено в [3—4] в случае быстроубывающи начальных условий на всей оси $\mathbb{R}^1$.

Следует отметить, что формулы, аналогичные (12), имеются также в пе риодическом (и почти периодическом) случае для всех динамических гамилн тоновых систем, обладающих представлением типа Лакса. Исключением яв ляется нелинейное уравнение Бюргерса $u_t=uu_x+u_{xx}$, для которого н существует адекватного гамильтонового формализма. Гамильтонова пере формулировка этого уравнения, имеющаяся в работе [7], пока не вкладыва ется в схему метода обратной задачи теории рассеяния [1], хотя для нег имеются нетривиальные формулы для преобразований Бэклунда.

Важным свойством рассмотренных преобразований Бэклунда $B_z: M\to M$ $z\in\mathbb{R}^1$, согласно (7), является коммутативность множества $\left\{\frac{dB_z}{dz}B_z^{-1};\ z\in\mathbb{R}^1\right\}$ так как в силу рекурсионного тождества Леннарта (6) справедливо равенст во $\{p(z),p(\lambda)\}=0$ для всех $\lambda, z\in\mathbb{R}^1$.

Коммутативность преобразований Бэклунда $B_z : M \to M$, $z \in \mathbb{R}^1$, из этого свойства не следует, и условия ее реализации остаются открытыми. Отметим только, что найденные в настоящее время элементарные преобразования Бэклунда для нелинейных уравнений типа Кортевега — де Фриза являются коммутативными.

1. *Теория* солитонов / Под ред. С. П. Новикова.— М. : Наука, 1980.— 319 с.
2. *Tu G.* Infinitesimal canonical transformation of generalized Hamiltonian equations.— J. Phys. A, 1982, 15, N 2, p. 277—285.
3. *Hou B.*, *Tu G.* A formula relating infinitesimal Bäcklund transformations to hierarchy generating operators.— Ibid., 1983, **16**, N 23, p. 3955—3960.
4. *Tu G.* On the permutability of Bäcklund transformations.— Lett. Math. Phys., 1982, **6**, N 1, p. 63—71.
5. *Steudal H.* On symmetry of integrable equations.— Ann. Phys., 1975, **32**, N 2, p. 205—211.
6. *Прикарпатский А. К.*, *Самойленко В. Г.* Динамические системы, ассоциированные с периодическим оператором Дирака, и их полная интегрируемость. — Киев, 1983.—31 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 83.44).
7. *Taflin E.* Analitic linearization, Hamiltonian formalizm and infinite sequences of constant of motion for the Burgers equation.— Phys. Rev. lett., 1981, **47**, N 20, p. 1425—1428.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 16.04.85