УДК 517.9

Ф. С. Рофе-Бекетов

Необходимые и достаточные условия конечной скорости распространения для эллиптических операторов

1. Достаточным условием существенной самосопряженности полуограниченного снизу минимального эллиптического оператора L в $L^2(\mathbb{R}^n)$ с гладкими коэффициентами, порожденного выражением

$$l = -\Sigma\,[\partial_j + ib_j(x)]\,a_{jk}(x)\,[\partial_k + ib_k(x)] + q(x), \tag{1}$$

$$(A(x)\,\xi, \xi) > 0 \text{ при } 0 \neq \xi \in \mathbb{C}^n,\ A(x) = (a_{jk})_{j,k=1}^n,\ \partial_j = \partial/\partial x_j$$

является, по теореме Березанского, глобально конечная скорость распространения (ГКСР), т. е. компактность $\operatorname{supp}_x u(x, t)\ \forall t$, для решений гиперболического уравнения $u_{tt} + l[u] = 0$, если компактен носитель начальных данных, иначе — конечность области зависимости для соответствующей задачи Коши, невозможность локальному возмущению распространиться на бесконечность за конечное время. (Для оператора Шредингера условие ГКСР выполнено всегда и теорема Березанского переходит в теорему Повзнера—Глазмана.) Приведенная теорема стимулировала ряд исследований [1—5], где выяснялись достаточные условия ГКСР для оператора L. Одним из интересных результатов [1] является утверждение о том, что если риманово многообразие

$$M = (\mathbb{R}^n, A^{-1}(x)), \tag{2}$$

т. е. $\mathbb{R}^n$ с метрикой, определенной матрицей $A^{-1}(x)$, является полным, то для операции l (1) имеет место ГКСР. Докажем, что условие полноты M (2) является не только достаточным, но и необходимым для ГКСР.

Теорема 1. *Для того чтобы операция l (1) обладала свойством ГКСР, необходимо и достаточно, чтобы риманово многообразие M (2) было полным.*

Доказательство необходимости. Обозначим через $\overline{B}_t(p)$ замкнутый шар в $M(2)$ с центром p и радиусом t (в римановой метрике). Всякая фундаментальная в M последовательность содержится в некотором шаре $\overline{B}_t(p) \subset M$. В силу свойства ГКСР любой такой шар ограничен в $\mathbb{R}^n$, так как является областью, на которую за время t распространяется возмущение из центра p. В силу непрерывности естественного вложения M в $\mathbb{R}^n$ этот шар также и замкнут в $\mathbb{R}^n$, а потому и компактен в $\mathbb{R}^n$. Но и вложение из $\mathbb{R}^n$ в M непрерывно, поэтому из компактности $\overline{B}_t(p)$ в $\mathbb{R}^n$ следует компактность, а потому и полнота $\overline{B}_t(p)$ в индуцированной из M римановой метрике. Поэтому всякая фундаментальная в M, а следовательно, и в подходяще выбранном шаре $\overline{B_t}(p)$ последовательность является сходящейся в $\overline{B}_t(p) \subset M$, а потому и в M. Значит, M полно. Необходимость условий теоремы доказана, а достаточность известна [1]. Теорема доказана.

2. Приведем теперь некоторые достаточные условия ГКСР. Пусть $0 \leqslant P(x) \to \infty$ (при $|x| \to \infty$) есть вещественная локально липшицева функция, $x \in \mathbb{R}^n$, $c(x) = \limsup |P(x + \Delta x) - P(x)| \cdot |\Delta x|^{-1}$ при $|\Delta x| \to 0$, где $\sup c(x) < \infty$ при $|x| < \text{const}$. Обозначим через Γ_s границы замкнутых областей $\Omega_s = \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) \leqslant s\}$.

Положим $s(t) = \sup P(x)$ $(x \in B_t(0))$. Очевидно, $s(t) \in AC_{\text{loc}}$ — локально абсолютно непрерывная на области существования функция, возрастающая монотонно, но не обязательно строго. Обратная функция $t(s)$ строго монотонна, но не обязательно непрерывна; она представляет собою минимальное время, за которое возмущение из начала 0 достигает Γ_s. Если $\tau(x)$ — риманово расстояние от 0 до x в $M(2)$, то $t(s) = \inf \tau(x)$, $(x \in \Gamma_s)$.

Положим $\Gamma_s^\nabla = \{x \in \Gamma_s : \exists \nabla P(x)\}$, $\Gamma_s^* = \Gamma_s \setminus \Gamma_s^\nabla$, $\Gamma_{s0}^\nabla = \Gamma_s^\nabla \cap \Gamma_{s0}$, $\Gamma_{s0}^* = \Gamma_s^* \cap \Gamma_{s0}$, где $\Gamma_{s0} = \{x \in \Gamma_s : \tau(x) = t(s)\}$,

$$a_0(s) = \max \{\sup_{x \in \Gamma_{s0}^\nabla} |A^{1/2}(x) \nabla P(x)|; \quad \sup_{x \in \Gamma_{s0}^*} (\|A(x)\|^{1/2} c(x))\} \tag{3}$$

$a(s)$ определим аналогично, заменив в (3) Γ_{s0}^∇, Γ_{s0}^* на Γ_s^∇, Γ_s^* соответственно. Очевидно, $a(s) \geqslant a_0(s)$.

Теорема 2. *$a_0^{-1}(s) \in L_{1, \text{loc}}$, и если существует такая функция $P(x)$ описанного вида, что*

$$\int_0^\infty [a_0(s)]^{-1} ds = \infty, \tag{4}$$

то для операции l (1) *имеет место ГКСР.* (*Очевидно, если условие* (4) *выполняется при замене $a_0(s)$* на $a(s)$ *или на какую-нибудь другую функцию $\varphi(s) \geqslant a_0(s)$, то ГКСР имеет место*).

Доказательство. Для любого луча $x(t)$ на характеристической поверхности $t = \psi(x)$ имеем $dx/dt = A(x)\nabla\psi(x)$ и, так как $(A(x)\nabla\psi, \nabla\psi) = 1$, то там, где $\nabla P(x)$ существует, т. е. где $P(x)$ дифференцируема, $|dP(x(t))/dt| = |(A\nabla\psi, \nabla P)| \leqslant |A^{1/2}(x) \nabla P(x)|$. Отсюда, используя построение Гюйгенса, можно заключить, что почти всюду $0 \leqslant ds/dt \leqslant a_0(s)$, а потому почти всюду имеем $0 \leqslant a_0^{-1}(s) \leqslant dt/ds = t'(s)$, и так как $\int_{P(0)}^{s} t'(\sigma) d\sigma \leqslant t(s) < \infty$ при $s < \infty$, то $a_0^{-1}(s) \in L_{1,\text{loc}}$ и, в частности, $\operatorname{mes}\{s \in \mathbb{R}^+ : a_0(s) = 0\} = 0$. В силу условия (4) имеем $t(s) \to \infty$ при $s \to \infty$, а это означает наличие ГКСР.

Теорема доказана. Она обобщает теорему 1 из [4], а также результаты [3] и применительно к гладким коэффициентам [5], потому, в частности, что вместо оценок через матричную норму $\|A(x)\|$, принятых в [2, 3, 5], использует более точные оценки вида (3), (4).

Примеры вычисления $a(s)\,(\geqslant a_0(s), (3)):1)$. Если $P(x)=|x|$, то $a(s)=\sup(A(x)x^0, x^0)^{1/2}$, где x^0 — орт вектора x. Близкого вида оценка использована в [6, следствие] в связи с условиями существенной самосопряженности. 2). Если $x=\{x_1, x_2\}\in\mathbb{R}^2, P(x)=\max\{|x_1|, |x_2|\}$, то $a(s)= \max\limits_{|\sigma|\leqslant s}\{a_{11}^{1/2}(\pm s,\sigma);\ a_{22}^{1/2}(\sigma,\pm s);\ \|A^{1/2}(\pm s,\pm s)\|\}$. 3). Если $P(x)=\operatorname{dist}(x, G)$, где $G\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная выпуклая область, то $a(s)=\sup\limits_{x:P(x)=s}(A(x)\nabla P(x), \nabla P(x))^{1/2}$, $|\nabla P(x)|=1$. 4). Критерий ГКСР, подобный известным в вопросах существенной самосопряженности условиям типа Хартмана — Исмагилова (ср. [6, теорема 4] и [2, 3]), можно получить из теоремы 2, если взять $P(x)$ меняющейся лишь на последовательности телесных слоев $T_k=\Omega_{2k+1}\setminus\Omega_{2k}$, где $\Omega_k\subset\Omega_{k+1}\subset\mathbb{R}^n$ — конечные области, $\bigcup\Omega_k=\mathbb{R}^n$ и $P(x)=\mathrm{const}$ на каждом из промежутков между слоями T_k. Тогда теорема 2 налагает ограничения на поведение $A(x)=(a_{jk}(x))$ лишь на слоях T_k и никаких ограничений (кроме гладкости и эллиптичности) между этими слоями.

В заключение отметим, что обобщения теоремы Березанского и соответствующая библиография даны в обзоре [7].

1. *Чумак А. А.* Самосопряженность оператора Бельтрами—Лапласа на полном паракомпактном римановом многообразии без края.—Укр. мат. журн., 1973, **25**, № 6, с. 784—791.
2. *Орочко Ю. Б.* Конечная скорость распространения и существенная самосопряженность некоторых дифференциальных операторов.— Функцион. анализ, 1979, **13**, с. 95—96.
3. *Орочко Ю. Б.* О свойстве глобальной конечной скорости распространения эллиптического дифференциального выражения второго порядка.— Дифференц. уравнения, 1982, **18**, № 10, с. 1764—1772.
4. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О позитивных дифференциальных операторах (Индексы дефекта, факторизация, возмущения).—Харьков, 1983.— 21 с.—(Препринт/АН УССР, ФТИНТ; 23-83).
5. *Перельмутер М. А., Семенов Ю. А.* О конечности скорости распространения возмущений для гиперболических уравнений.— Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 1, с. 56—63.
6. *Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М.* Условия самосопряженности операторов эллиптического типа второго порядка общего вида.— Теория. функций, функцион. анализ и их приложения, 1973, вып. 17, с. 41—51.
7. *Березанский Ю. М., Самойленко В. Г.* Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных и эволюционные уравнения.— Успехи мат. наук, 1981, **36**, № 5, с. 3—56.

Физ.-техн. ин-т низких температур
АН УССР, Харьков

Получено 11.12.84