УДК 519.21

С. А. Алиев

Предельная теорема для ветвящихся процессов Гальтона — Ватсона с иммиграцией

Если в обычном ветвящемся процессе Гальтона—Ватсона наряду с раз множением и превращением частиц имеется постоянный приток частиц извне, число которых случайно и не зависит от числа существующих в данном поколении частиц, то такие процессы называют ветвящимися процессами Гальтона—Ватсона с иммиграцией. Иммигрировавшие частицы развиваются так же, как и частицы процесса Гальтона—Ватсона. Критичность таких процессов определяется в соответствии с общей классификацией ветвящихся процессов.

Пусть $F(s)$ и $G(s)$ — производящие функции числа непосредственных потомков одной частицы в процессе Гальтона—Ватсона и иммигрирующих частиц соответственно. Известно, что матрица переходных вероятностей P_{ij} ветвящегося процесса Гальтона—Ватсона с производящей функцией $F(s)$ задается следующим образом: $\sum\limits_{j=0}^{\infty} P_{ij}s^j = [F(s)]^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Матрица переходных вероятностей ветвящегося процесса Гальтона—Ватсона с иммиграцией и соответствующими производящими функциями $[F(s), G(s)]$ имеет вид

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}s^j = [F(s)]^i G(s), \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

m-й шаг матрицы переходных вероятностей P_{ij} в случае процесса Гальтона—Ватсона —

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{(m)}s^j = [F_m(s)]^i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

а в случае процесса Гальтона — Ватсона с иммиграцией —

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{(m)}s^j = [F_m(s)]^i \prod_{k=0}^{m-1} G(F_k(s)), \tag{1}$$

где $F_m(s)$ — m-я итерация $F(s) = F_1(s)$.

В дальнейшем нам понадобится определение и некоторые свойства процесса Иржины с иммиграцией [1]. Марковский процесс $\mu(t)$, $t \geqslant 0$, принимающий вещественные неотрицательные значения, является процессом Иржины с иммиграцией, если

$$M[e^{\lambda\mu(t)} \mid \mu(0) = x] = Q(t;\lambda)e^{xK(t;\lambda)}, \ x \geqslant 0, \ \lambda \leqslant 0. \tag{2}$$

Функция $Q(t;\lambda)$ задается следующим образом:

$$Q(t;\lambda) = \exp\left\{\int_0^t g(K(s;\lambda))\,ds\right\}.$$

Здесь $g(\lambda) = d\lambda + \int\limits_0^{\infty} (e^{\lambda u} - 1)N(du)$, $d \geqslant 0$, $\lambda \leqslant 0$, а мера N такова, что интеграл сходится. Функция $K(t;\lambda)$ в соотношении (2) при каждом $t \geqslant 0$ есть логарифм преобразования Лапласа некоторого безгранично делимого распределения в $[0, \infty)$ и, следовательно, имеет вид $K(t;\lambda) = a_t\lambda + \int\limits_0^{\infty} (e^{\lambda x} - 1)\Pi_t(dx)$, где $a_t \geqslant 0$, а мера Π_t такова, что интеграл сходится.

Функция $K(t;\lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial K(t,\lambda)/\partial t = H(K(t;\lambda)), \quad K(0;\lambda)=\lambda,$$

в котором $H(\lambda) = c\lambda + \gamma\lambda^2 + \int\limits_0^\infty (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x)\Lambda(dx)$, $\lambda \leqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$, а мера Λ такова, что интеграл сходится.

Для каждых $t, s \geqslant 0$ функции $Q(t;\lambda)$ и $K(t;\lambda)$ имеют следующие свойства:

$$Q(0;\lambda) = 1, \quad Q(t+s;\lambda) = Q(t;\lambda)\,Q(s;K(t;\lambda)),$$

$$K(0;\lambda) = \lambda, \quad K(t+s;\lambda) = K(t;K(s;\lambda)).$$

В частном случае, если в соотношении (1) $Q(t;\lambda) \equiv 1$, то процесс $\mu(t)$ является процессом Иржины без иммиграций.

Пусть теперь $\xi_m^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, — последовательность ветвящихся процессов Гальтона — Ватсона с иммиграцией с соответствующими производящими функциями $[F^{(n)}(s), G^{(n)}(s)]$, $n = 1, 2, \ldots$

Параметр критичности процесса обозначим через $A_n = \left.\dfrac{dF^{(n)}(s)}{ds}\right|_{s=1}$. Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$\mu_m^{(n)}(t) = \frac{\xi_{[mt]}^{(n)}}{b_m^{(n)}}, \qquad \mu_m^{(n)}(0) = \frac{[xb_m^{(n)}]}{b_m^{(n)}}, \quad x \geqslant 0,$$

где $b_m^{(n)} \uparrow \infty$ и $[b]$ равно целой части b.

Следующая теорема вместе с теоремами 1 и 2 из работы [2] дополняет и уточняет предельные теоремы работы [1].

Теорема. *Пусть $n \to \infty$, $m \to \infty$, $m(A_n - 1) \to c$. Тогда, если выполняются условия*

$$mb_m^{(n)}[F^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}}) - e^{\lambda/b_m^{(n)}}] \to H(\lambda), \quad H(-0) = 0, \quad H'(0) = c, \tag{3}$$

$$m[G^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}}) - 1] \to g(\lambda), \quad g(-0) = 0, \tag{4}$$

то частные распределения процессов $\mu_m^{(n)}(t)$ слабо сходятся к частным распределениям процесса Иржины с иммиграцией.

Доказательство. Рассмотрим правую часть соотношения (1). В схеме серий она имеет следующий вид:

$$[F_m^{(n)}(s)]^i \prod_{k=0}^{m-1} G^{(n)}(F_k^{(n)}(s)). \tag{5}$$

Заменим m на $[mt]$ и положим $s = e^{\lambda/b_m^{(n)}}$. Тогда (5) принимает вид

$$[F_{[mt]}^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}})]^i \prod_{k=0}^{[mt]-1} G^{(n)}(F_k^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}})).$$

В рассматриваемом случае $i = \xi_0^{(n)} = [xb_m^{(n)}]$ и по теореме 1 работы [2] из условия (3) следует

$$\{F_{[mt]}^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}})\}^{[xb_m^{(n)}]} \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ m(A_n-1)\to c}]{} e^{xK(t;\lambda)}.$$

Рассмотрим второй множитель:

$$\prod_{k=0}^{[mt]-1} G^{(n)}(F_k^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}})) = \exp\left\{\sum_{k=0}^{[mt]-1} \log G^{(n)}(F_k^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}}))\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{k=0}^{[mt]-1} \log G^{(n)}(e^{[b_m^{(n)}\log F_k^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}})]/b_m^{(n)}})\right\}.$$

Если обозначить $g_m^{(n)}(\lambda) = m \log G^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}})$, то

$$\prod_{k=0}^{[mt]-1} G^{(n)}(F_k^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}})) = \exp\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{[mt]-1} g_m^{(n)}(b_m^{(n)} \log F_k^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}}))\right\}.$$

Положим $K_m^{(n)}(t;\lambda) = b_m^{(n)} \log F_{[mt]}^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}})$. Тогда

$$\prod_{k=0}^{[mt]-1} G^{(n)}(F_k^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}})) = \exp\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{[mt]-1} g_m^{(n)}\left(K_m^{(n)}\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right)\right\}.$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^t g(K(s;\lambda))\,ds$. Ясно, что

$$\int\limits_0^t g(K(s;\lambda))\,ds = \int\limits_{[mt]/m}^t g(K(s;\lambda))\,ds + \int\limits_0^{[mt]/m} g(K(s;\lambda))\,ds -$$

$$-\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{[mt]-1} g\left(K\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right) + \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{[mt]-1} g\left(K\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right).$$

Если абсолютную величину суммы первых трех слагаемых обозначить через $\varepsilon_m(t;\lambda)$, то $\varepsilon_m(t;\lambda)\to 0$, $m\to\infty$, равномерно по t и λ в каждом конечном интервале $0\leqslant t\leqslant T$, $\Lambda\leqslant\lambda\leqslant 0$. Далее

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{[mt]-1} g_m^{(n)}\left(K_m^{(n)}\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right) - \int\limits_0^t g(K(s;\lambda))\,ds\right| \leqslant \varepsilon_m(t;\lambda) +$$

$$+\frac{1}{m}\left|\sum_{i=0}^{[mt]-1} g_m^{(n)}\left(K_m^{(n)}\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right) - \sum_{i=0}^{[mt]-1} g\left(K\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right)\right| \leqslant \varepsilon_m(t;\lambda) +$$

$$+\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{[mt]-1}\left|g_m^{(n)}\left(K_m^{(n)}\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right) - g_m^{(n)}\left(K\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right)\right| + \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{[mt]-1}\left|g_m^{(n)}\left(K\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right) -\right.$$

$$\left.-g\left(K\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right)\right|. \qquad (6$$

В теореме 2 работы [2] доказано, что $K_m^{(n)}(t;\lambda)\to K(t;\lambda)$ равномерно по t на каждом конечном интервале, т. е. $\sup\limits_t |K_m^{(n)}(t;\lambda) - K(t;\lambda)|\to 0$ Тогда

$$\sup_{0\leqslant i\leqslant [mt]-1}\left|K_m^{(n)}\left(\frac{i}{m};\lambda\right) - K\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right|\to 0.$$

Так как $G-1\sim\log G$ при $G\to 1$, то соотношение (4) эквивалентно $g_m^{(n)}(\lambda)\to g(\lambda)$, $g(-0)=0$.

Если условие (4) выполняется, то $g_m^{(n)}(\lambda)\to g(\lambda)$ равномерно на каждом конечном интервале, и так как функция $g(\lambda)$ непрерывна, то семейство $g_m^{(n)}(\lambda)$ равностепенно непрерывно на конечном интервале по теореме Арцела, т. е.

$$\sup_{n,m}|g_m^{(n)}(\lambda) - g_m^{(n)}(\gamma)| \xrightarrow[\lambda-\gamma\to 0]{} 0,\ \theta\leqslant\lambda,\quad \gamma\leqslant 0.$$

Если обозначим

$$\delta(h) = \sup_{\substack{|\lambda-\gamma|\leqslant h\\ \theta\leqslant\lambda,\gamma\leqslant 0}}\ \sup_{n,m}|g_m^{(n)}(\lambda) - g_m^{(n)}(\gamma)|,$$

то $\delta(h)\downarrow 0$ при $h\downarrow 0$.

Теперь рассмотрим второе слагаемое в правой части соотношения (6). С учетом изложенного выше получаем

$$\left| g_m^{(n)}\left(K_m^{(n)}\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right) - g_m^{(n)}\left(K\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right)\right| \leqslant \delta\,(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |K_m^{(n)}(s;\lambda) - K(s;\lambda)|).$$

Отсюда следует, что второе слагаемое в правой части соотношения (6) не превышает

$$\frac{[mt]}{m}\,\delta(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|K_m^{(n)}(s;\lambda) - K(s;\lambda)|) \leqslant t\delta(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|K_m^{(n)}(s;\lambda) - K(s;\lambda)|).$$

Из $g_m^{(n)}(\lambda) \to g(\lambda)$ равномерно на каждом конечном интервале следует, что третье слагаемое в правой части соотношения (6) не превышает $\frac{[mt]}{m}\,\delta_m^{(n)} \leqslant t\delta_m^{(n)}$, $\delta_m^{(n)} \to 0$. Таким образом, находим

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{[mt]-1} g_m^{(n)}\left(K_m^{(n)}\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right) - \int_0^t g(K(s;\lambda))\right| \leqslant \varepsilon_m(t;\lambda) +$$

$$+ t\delta(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|K_m^{(n)}(s;\lambda) - K(s;\lambda)|) + t\delta_m^{(n)}.$$

Поскольку $0 \leqslant t \leqslant T$ и $\Lambda \leqslant \lambda \leqslant 0$, то

$$\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{[mt]-1} g_m^{(n)}\left(K_m^{(n)}\left(\frac{i}{m};\lambda\right)\right) \underset{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}{\to} \int_0^t g(K(s;\lambda))\,ds,$$

или

$$\prod_{k=0}^{[mt]-1} G^{(n)}(F_k^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}})) \underset{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}{\longrightarrow} \exp\left\{\int_0^t g(K(s;\lambda))\,ds\right\} = Q(t;\lambda).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$[F_{[mt]}^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}})]^{[xb_m^{(n)}]} \prod_{k=0}^{[mt]-1} G^{(n)}(F_k^{(n)}(e^{\lambda/b_m^{(n)}})) \underset{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty\\ m(A_n-1)\to c}}{\longrightarrow} Q(t;\lambda)\,e^{xK(t;\lambda)},$$

т. е. одномерные распределения процессов $\mu_m^{(n)}(t)$ слабо сходятся к одномерным распределениям процесса Иржины с иммиграцией.

Из сходимости одномерных распределений тривиально следует сходимость частных распределений.

1. *Kawazu K., Watanabe S.* Branching processes with immigration and related limit theorems.— Теория вероятностей и ее применения, 1971, 16, № 1, с. 34—51.
2. *Алиев С. А., Щуренков В. М.* Переходные явления и сходимость процессов Гальтона—Ватсона к процессам Иржины.— Там же, 1982, 27, № 3, с. 443—445.

Ин-т математики и механики
АН АзССР, Баку

Получено 24.02.84