УДК 517.53

Г. Г. Цегелик, Л. И. Захаревич

Построение теории мажорант и диаграмм Ньютона лакунарных рядов

Теория мажорант и диаграмм Ньютона имеет многочисленные приложения. Пюизе, Дюма, Адамар использовали аппарат мажорант и диаграмм Ньютона функций одной комплексной переменной, представленных степенными рядами, при изучении алгебраических функций, p-аддических чисел и нулей целых функций. Валирон [1], Островский [2] и А. Н. Костовский [3] с помощью мажорант и диаграмм Ньютона исследовали расположение нулей степенных рядов и рядов Лорана функций одной комплексной переменной. В [4] теория мажорант и диаграмм Ньютона переносится на ряды Дирихле функций одной комплексной переменной. Как приложение этой теории получены достаточные условия существования полос, не содержащих нулей этих рядов. Обобщению теории мажорант и диаграмм Ньютона на функции двух комплексных переменных, представленных степенными рядами, рядами Лорана и Дирихле, посвящены работы А. Н. Костовского, А. И. Кардаша и И. И. Чулыка [5—9].

Рассмотрим построение теории мажорант и диаграмм Ньютона лакунарных рядов на примере ряда [10, 11]

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu z^{\varphi(\nu)} \tag{1}$$

с радиусом сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{A_n}{A_{n+1}} \right|^{\frac{1}{\varphi(n+1)-\varphi(n)}},$$

где $0 \leqslant \varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n) < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} [\varphi(n+1) - \varphi(n)] > 0$.

Пусть $a_\nu = |A_\nu|$, $\nu = 0, 1, \ldots$, E — множество индексов ν, для которых $A_\nu \neq 0$.

Определение 1. *Точку P_ν, $\nu \in E$, в плоскости $\xi\eta$ с координатами $\xi = \varphi(\nu)$, $\eta = -\ln a_\nu$ будем называть точкой представления коэффициента A_ν ряда* (1).

Допустим, что точки представления P_ν коэффициентов A_ν, $\nu \in E$, в плоскости $\xi\eta$ построены. Из каждой точки P_ν проведем параллельно оси ординат в положительном направлении полупрямую l_ν. Обозначим через S

множество точек полупрямых l_ν, $\nu \in E$. Построим выпуклую оболочку $C(S)$ множества точек S. Границей выпуклой оболочки будет некоторая выпуклая вниз ломаная линия $\mathfrak{D}_f$.

Определение 2. *Ломаную линию* $\mathfrak{D}_f$ *будем называть диаграммой Ньютона ряда* (1).

Диаграмма Ньютона лакунарного ряда обладает следующими свойствами: 1) каждая вершина $\mathfrak{D}_f$ расположена в одной из точек представления P_ν коэффициента A_ν, $\nu \in E$; 2) каждая точка представления P_ν, $\nu \in E$, находится на $\mathfrak{D}_f$ или расположена над ней; 3) $\mathfrak{D}_f$ может содержать луч, расположенный в правой полуплоскости, на котором может находиться бесконечное множество точек представления P_ν или конечное число точек $P_{\nu_0}, P_{\nu_1}, \ldots, P_{\nu_n}$, $0 \leqslant n < \infty$. В последнем случае всегда существует возрастающая подпоследовательность индексов $\{\mu_j\}$, $\mu_j > \nu_n$, такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{-\ln a_{\mu_j}}{\varphi(\mu_j)} = \operatorname{tg}\psi, \quad \frac{-\ln a_{\mu_j}}{\varphi(\mu_j)} = \operatorname{tg}\psi_j > \operatorname{tg}\psi,$$

где $\operatorname{tg}\psi_j$ — угловой коэффициент прямой, соединяющей начало координат с точкой P_{μ_j}, $\operatorname{tg}\psi$ — угловой коэффициент луча.

Пусть $B_\nu(\varphi(\nu), \varkappa_\nu)$ — точка диаграммы Ньютона $\mathfrak{D}_f$, абсцисса которой $\xi = \varphi(\nu)$, а ордината $\varkappa_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots$. Обозначим $T_\nu = \exp(-\varkappa_\nu) > 0$. Лакунарный ряд с положительными коэффициентами

$$\mathfrak{M}_f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu z^{\varphi(\nu)} \tag{2}$$

является мажорантой ряда (1). Действительно, из построения $\mathfrak{D}_f$ следует, что $-\ln a_\nu \geqslant -\ln T_\nu$ или $|A_\nu| = a_\nu \leqslant T_\nu$.

Определение 3. *Ряд* $\mathfrak{M}_f(z)$ *будем называть мажорантой Ньютона ряда* (1).

Определение 4. *Величины*

$$R_\nu = (T_{\nu-1}/T_\nu)^{\frac{1}{\varphi(\nu)-\varphi(\nu-1)}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots; \qquad R_0 = 0, \quad D_\nu = R_{\nu+1}/R_\nu,$$
$$\nu = 0, 1, \ldots,$$

будем называть соответственно ν*-числовым наклоном и* ν*-отклонением* $\mathfrak{M}_f(z)$ *или* $f(z)$.

Определение 5. *Если точка* P_ν, $\nu \in E$, *находится в вершине* $\mathfrak{D}_f$, *то индекс* ν *будем называть вершинным индексом, если на* $\mathfrak{D}_f$, — *диаграммным индексом* $\mathfrak{M}_f(z)$ *или* $f(z)$.

Пусть ψ_ν — угол между отрезком $B_{\nu-1}B_\nu$ диаграммы Ньютона и положительным направлением оси абсцисс. Тогда угловой коэффициент k_ν отрезка $B_{\nu-1}B_\nu$ будет

$$k_\nu = \operatorname{tg}\psi_\nu = \frac{\varkappa_\nu - \varkappa_{\nu-1}}{\varphi(\nu) - \varphi(\nu-1)} = \ln\left(\frac{T_{\nu-1}}{T_\nu}\right)^{\frac{1}{\varphi(\nu)-\varphi(\nu-1)}} = \ln R_\nu.$$

Отсюда

$$R_\nu = e^{\operatorname{tg}\psi_\nu}, \quad D_\nu = e^{\operatorname{tg}\psi_{\nu+1} - \operatorname{tg}\psi_\nu}.$$

Если $\{\nu_i\}$ — последовательность вершинных индексов, то $0 = R_0 < R_{\nu_1} < R_{\nu_2} < \ldots$, $R_{\nu_{i-1}+1} = R_{\nu_{i-1}+2} = \ldots = R_{\nu_i}$, $D_\nu \geqslant 1$, $D_{\nu_i} > 1$.

Для произвольного индекса ν, который лежит между двумя последовательными вершинными индексами ν_{i-1} и ν_i, имеет место формула

$$T_\nu = \sqrt[\varphi(\nu_i)-\varphi(\nu_{i-1})]{a_{\nu_{i-1}}^{\varphi(\nu_i)-\varphi(\nu)} a_{\nu_i}^{\varphi(\nu)-\varphi(\nu_{i-1})}}, \quad \nu_{i-1} \leqslant \nu \leqslant \nu_i.$$

Если диаграмма Ньютона содержит луч L_{ν_n}, проведенный из точки представления P_{ν_n} вправо с угловым коэффициентом $k = \ln R$, то

$$T_{\nu_n+k} = a_{\nu_n} R^{\varphi(\nu_n) - \varphi(\nu n+k)}, \quad k = 0,\ 1, \ldots.$$

Теорема 1. *Для того чтобы лакунарный ряд* (1) *обладал диаграммой Ньютона $\mathfrak{D}_f$, отличной от прямой линии, необходимо и достаточно, чтобы он имел радиус сходимости $R > 0$.*

Доказательство. Пусть $f(z)$ обладает диаграммой Ньютона $\mathfrak{D}_f$, отличной от прямой линии. Тогда существует такое число $r > -\infty$, что для всех n

$$-\infty < r < \ln \left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right)^{\frac{1}{\varphi(n)-\varphi(n-1)}}$$

или

$$0 < e^r < \left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right)^{\frac{1}{\varphi(n)-\varphi(n-1)}}.$$

Отсюда

$$0 < e^r \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right)^{\frac{1}{\varphi(n)-\varphi(n-1)}} = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{T_{\mu_j}}{T_{\mu_{j+1}}}\right)^{\frac{1}{\varphi(\mu_{j+1})-\varphi(\mu_j)}} =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{a_{\mu_j}}{a_{\mu_{j+1}}}\right)^{\frac{1}{\varphi(\mu_{j+1})-\varphi(\mu_j)}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{\frac{1}{\varphi(n+1)-\varphi(n)}} = R,$$

где $\{\mu_j\}$ — последовательность диаграммных индексов.

Обратно, пусть лакунарный ряд $f(z)$ имеет радиус сходимости $R > 0$. Тогда существует такая константа M, что для произвольной точки z_0, $0 < |z_0| = \rho < R$, и для всех $\nu \in E$

$$|A_\nu z_0^{\varphi(\nu)}| \leqslant M.$$

Обозначая $b = -\ln M$, $k = \ln \rho$, из последнего неравенства получаем $-\ln a_\nu \geqslant k\varphi(\nu) + b$, или $\eta_\nu \geqslant k\varphi(\nu) + b$. Это означает, что все точки представления P_ν, $\nu \in E$, лежат на прямой $\eta = k\xi + b$ или над ней. Так как $0 < \rho < R$, то $k \neq \pm\infty$ и $f(z)$ имеет диаграмму Ньютона, отличную от прямой линии.

Пусть

$$R' = \varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{T_n}{T_{n+1}}\right)^{\frac{1}{\varphi(n+1)-\varphi(n)}}$$

— радиус сходимости мажоранты Ньютона (2).

Теорема 2. *Радиусы сходимости ряда* (1) *и его мажоранты Ньютона* (2) *совпадают.*

Доказательство. Покажем, что $R = R'$. Поскольку $a_\nu \leqslant T_\nu$, то $R \leqslant R'$. Если лакунарный ряд $f(z)$ имеет бесконечную последовательность диаграммных индексов $\{\mu_j\}$, то из того, что $a_{\mu_j} = T_{\mu_j}$, следует

$$R' = \varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{T_n}{T_{n+1}}\right)^{\frac{1}{\varphi(n+1)-\varphi(n)}} = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{T_{\mu_j}}{T_{\mu_{j+1}}}\right)^{\frac{1}{\varphi(\mu_{j+1})-\varphi(\mu_j)}} =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{a_{\mu_j}}{a_{\mu_{j+1}}}\right)^{\frac{1}{\varphi(\mu_{j+1})-\varphi(\mu_j)}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{\frac{1}{\varphi(n+1)-\varphi(n)}} = R.$$

Если же диаграмма Ньютона лакунарного ряда $f(z)$ имеет луч L_{ν_n}, то существует возрастающая подпоследовательность индексов $\{\mu_j\}$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{-\ln a_{\mu_j}}{\varphi(\mu_j)} = \operatorname{tg}\psi = k, \quad \mu_j > \nu_n,$$

где k — угловой коэффициент луча L_{ν_n}. Тогда

$$R \geqslant \lim_{l\to\infty}\left(\frac{a_{\mu_j}}{a_{\mu_{l+1}}}\right)^{\frac{1}{\varphi(\mu_{l+1})-\varphi(\mu_j)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{T_n}{T_{n+1}}\right)^{\frac{1}{\varphi(n+1)-\varphi(n)}} = R'.$$

Таким образом, с одной стороны $R \leqslant R'$, а с другой — $R \geqslant R'$, что и доказывает теорему.

Как и в [3, 4], для коэффициентов $\mathfrak{M}_f(z)$, числовых наклонов и отклонений выполняются соотношения

$$\frac{T_{k+\nu}}{T_k} = R_k^{-[\varphi(k+\nu)-\varphi(k)]}\prod_{j=0}^{\nu-1} D_{k+j}^{-[\varphi(k+\nu)-\varphi(k+j)]}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$\frac{T_{k-\nu}}{T_k} = R_k^{[\varphi(k)-\varphi(k-\nu)]}\prod_{j=1}^{\nu-1} D_{k-j}^{-[\varphi(k-j)-\varphi(k-\nu)]}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, k. \tag{4}$$

Теорема 3. *Если для некоторого фиксированного индекса* k, $0 < k < \infty$, *выполняются условия*

$$D_k > u_k^2 > 1, \quad D_\nu \geqslant u_k^{\tau_\nu} \geqslant 1, \quad \tau_\nu \geqslant 0, \quad \nu \neq k, \tag{5}$$

где u_k — *положительный корень уравнения*

$$H_k(u) = -1 + \sum_{\nu=1}^{k} u^{-[\varphi(k)-\varphi(k-\nu)] - \sum_{j=1}^{\nu-1}[\varphi(k-j)-\varphi(k-\nu)]\tau_{k-j}} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} u^{-[\varphi(k+\nu)-\varphi(k)] - \sum_{j=1}^{\nu-1}[\varphi(k+\nu)-\varphi(k+j)]\tau_{k+j}} = 0,$$

то лакунарный ряд (1) *не обращается в нуль в кольце*

$$R_k u_k \leqslant |z| \leqslant \frac{R_{k+1}}{u_k}. \tag{6}$$

Доказательство. Заметим сначала, что ряд $H_k(u)$ сходится при $|u| > a \geqslant 1$ и имеет единственный положительный корень $u_k > a$.

Допустим, от противного, что в некоторой точке z_0, $|z_0| = \rho$, кольца (6) $f(z_0) = 0$. Тогда $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} A_\nu z_0^{\varphi(\nu)} = 0$ или $1 \leqslant \sum\limits_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq k}}^{\infty} \frac{a_\nu}{a_k}\rho^{\varphi(\nu)-\varphi(k)}$. Так как $a_k = T_k$ и $a_\nu \leqslant T_\nu$, из последнего неравенства получаем

$$0 \leqslant -1 + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{a_{k-\nu}}{a_k}\rho^{\varphi(k-\nu)-\varphi(k)} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_{k+\nu}}{a_k}\rho^{\varphi(k+\nu)-\varphi(k)} \leqslant$$

$$\leqslant -1 + \sum_{\nu=1}\frac{T_{k-\nu}}{T_k}\rho^{\varphi(k-\nu)-\varphi(k)} + \sum_{\nu=1}\frac{T_{k+\nu}}{T_k}\rho^{\varphi(k+\nu)-\varphi(k)}.$$

Используя формулы (3), (4), находим

$$0 \leqslant -1 + \sum_{\nu=1}^{k}\prod_{j=1}^{\nu-1} D_{k-j}^{-[\varphi(k-j)-\varphi(k-\nu)]}\left(\frac{R_k}{\rho}\right)^{\varphi(k)-\varphi(k-\nu)} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\nu-1} D_{k+j}^{-[\varphi(k+\nu)-\varphi(k+j)]}\left(\frac{\rho}{R_{k+1}}\right)^{\varphi(k+\nu)-\varphi(k)}.$$

Из того, что $R_k u_k \leqslant \rho \leqslant R_{k+1}/u_k$ и для отклонений выполняются условия (5), следует

$$0<-1+\sum_{\nu=1}^{k}\prod_{j=1}^{\nu-1} u_k^{-\tau_{k-j}[\varphi(k-j)-\varphi(k-\nu)]} u_k^{-[\varphi(k)-\varphi(k-\nu)]}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\nu-1} u_k^{-\tau_{k+j}[\varphi(k+\nu)-\varphi(k+j)]} u_k^{-[\varphi(k+\nu)-\varphi(k)]}$$

или $0<H_k(u_k)$, что невозможно, ибо u_k — корень уравнения $H_k(u)=0$. Таким образом, сделанное допущение неверно, теорема доказана.

Аналогично можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Если $A_0 \neq 0$, $\varphi(0)=0$ и для индекса $k=0$ выполняется условие*

$$D_\nu \geqslant u_0^{\tau_\nu} \geqslant 1, \quad \tau_\nu \geqslant 0; \qquad \nu=1,\ 2,\ \ldots, \tag{7}$$

где u_0 — положительный корень уравнения

$$H_0(u)=-1+\sum_{\nu=1}^{\infty} u^{-[\varphi(\nu)-\varphi(0)]-\sum\limits_{j=1}^{\nu-1}[\varphi(n)-\varphi(j)]\tau_j}=0,$$

то лакунарный ряд (1) не обращается в нуль в круге $|z|<R_1/u_0$.

Заметим, что условие (7) всегда выполняется, например, при $\tau_\nu=0$, $\nu=1, 2, \ldots$. Для лакунарного ряда (1) при $A_0\neq 0$, $\varphi(0)=0$ всегда можно указать круг, не содержащий нулей этого ряда.

Для построения функции $H_k(u)$, $0<k<\infty$, можно положить $\tau_\nu = 2\ln D_\nu/\ln D_k$. Если при этом $D_k>u_k^2$, то $D_\nu \geqslant u_k^{\tau_\nu}$.

1. *Valiron G.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulière les fonctions à correspondance règulière.— Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse sci. math. et sci. phys., 1914, 3, N 5, p. 117—259.
2. *Ostrowski A.* Recherches sur la Mèthode de Graeffe et les zèros des polynomes et des sèries de Laurent.— Acta math., 1940, 72, p. 99—257.
3. *Костовский А. Н.* Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных.— Львов : Изд-во Львов. ун-та, 1967.— 208 с.
4. *Цегелик Г. Г.* Построение теории мажорант и диаграмм Ньютона рядов Дирихле.— Изв. вузов. Математика, 1976, с. 86—94.
5. *Кардаш А. І., Костовський О. М., Чулик І. І.* Мажоранти та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних.— Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1967, вип. 3, с. 97—116.
6. *Кардаш А. І., Чулик І. І.* Властивості мажоранти та діаграми Ньютона цілих функцій двох комплексних змінних.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1969, № 7, с. 583—586.
7. *Кардаш А. І., Чулик І. І.* Дослідження граничних властивостей мажоранти і діаграми Ньютона функцій двох комплексних змінних.— Там же, 1972, № 4, с. 316—319.
8. *Кардаш А. І., Чулик І. І.* Дослідження границі області збіжності степеневих рядів функцій двох комплексних змінних.— Там же, № 5, с. 411—414.
9. *Кардаш А. И., Чулык И. И.* Об области сходимости ряда Дирихле функции двух комплексных переменных и его мажоранты Ньютона.— Докл. АН СССР, 1972, 206, № 4, с. 804—807.
10. *Murgescu V., Climescu A.* On the radius of convergence of lacunary series.— Gaz. Math. si Fiz. A, 1960, 12, N 40, p. 517—522.
11. *Anderson B. D., Ward R. A.* A counterexample concerning $\Sigma a_n z^{\varphi(n)}$.—Gaz. math. A (RSR), 1972, 11, p. 401 — 402.

Львов. ун-т,
Львов. политехн. ин-т

Получено 28.03.82