УДК 517.5

А. И. Степанец

Отношение порядка для $(\psi, \bar\beta)$-производных

Пусть $f \in L(0, 2\pi)$ и

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x)$$

— ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi = \psi(k)$ и $\bar\beta = \beta(k)$ — произвольные функции натурального аргумента со значениями в $\mathbb{R}$; Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} (a_k(f) \cos(kx + \beta(k)\pi/2) + b_k(f) \sin(kx + \beta(k)\pi/2))$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(0, 2\pi)$. Эту функцию обозначим через $f_{\bar\beta}^{\psi}(x)$ и назовем $(\psi, \bar\beta)$-производной функции $f(x)$, а множество функций $f(\cdot)$, удовлетворяющих таким условиям, обозначим через $L_{\bar\beta}^{\psi}$. Если $f \in L_{\bar\beta}^{\psi}$ и при этом $f_{\bar\beta}^{\psi} \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $L(0, 2\pi)$, то будем говорить, что $f(\cdot)$ принадлежит классу $L_{\bar\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$. Подмножества непрерывных функций из $L_{\bar\beta}^{\psi}$ и $L_{\bar\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ обозначаются через $C_{\bar\beta}^{\psi}$ и $C_{\bar\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$; если последовательность $\bar\beta = \beta(k)$ состоит из одинаковых чисел β, то везде вместо $\bar\beta$ и $\beta(k)$ пишем β.

Если $\psi(k) \equiv k^{-r}$, $r > 0$ и $\beta = r$, классы $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ совпадают с известными классами $W^r\mathfrak{N}$, определяющимися r-й производной в смысле Вейля, которые при $r \in N$ переходят в классы r раз дифференцируемых функций; если при этом $\beta \neq r$, получаем классы Вейля — Надя $W_{\beta}^{r}\mathfrak{N}$.

Классы $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ и $C_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ введены в [1]. Там же было положено начало изучению аппроксимативных свойств функций из этих классов. Продолжение исследований в этом направлении см., например, в [2 — 8].

В настоящей работе вводится отношение порядка для $(\psi, \bar\beta)$-производных, позволяющее указать аналоги «младших» производных для функций из множеств $L_{\bar\beta}^{\psi}$.

Определение 1. *Пусть $\psi_1(k)$, $\bar\beta_1(k)$, $\psi_2(k)$ и $\bar\beta_2(k)$ — произвольные последовательности действительных чисел. Скажем, что пара $(\psi_1, \bar\beta_1)$ L-предшествует паре $(\psi_2, \bar\beta_2)$, если $L_{\bar\beta_2}^{\psi_2} \subseteq L_{\bar\beta_1}^{\psi_1}$. В этом случае будем писать $(\psi_1, \bar\beta_1) \overset{L}{\leqslant} (\psi_2, \bar\beta_2)$. Если $L_{\bar\beta_2}^{\psi_2} \subset L_{\bar\beta_1}^{\psi_1}$, то пишем $(\psi_1, \bar\beta_1) \overset{L}{<} (\psi_2, \bar\beta_2)$.*

Итак, меньшим парам отвечают бóльшие множества.

Теорема 1. *Если функция $f(\cdot)$ принадлежит $L_{\bar\beta_2}^{\psi_2}$ и $(\psi_1, \bar\beta_1) \overset{L}{\leqslant} (\psi_2, \bar\beta_2)$, то у нее существует производная $f_{\bar\beta_1}^{\psi_1}(\cdot)$, которая находится в множестве $L_{\bar\beta}^{\psi}$, $\psi = \psi(k) \equiv \psi_2(k)/\psi_1(k)$, $\bar\beta = \bar\beta(k) \equiv \bar\beta_2(k) - \bar\beta_1(k)$. При этом*

$$S[(f_{\bar\beta_1}^{\psi_1})_{\bar\beta}^{\psi}] = S[f_{\bar\beta}^{\psi_2}]. \qquad (1)$$

Действительно, существование производной $f_{\bar\beta_1}^{\psi_1}(\cdot)$ обеспечивается включением $L_{\bar\beta_1}^{\psi_1} \subseteq L_{\bar\beta_2}^{\psi_2}$. Отсюда также следует, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_i(k)} (a_k(f) \cos(kx + \beta_i(k)\pi/2) + b_k(f) \sin(kx + \beta_i(k)\pi/2)), \quad i = 1, 2,$$

являются рядами Фурье функций $f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_1}(x)$ и $f_{\bar{\beta}_2}^{\psi_2}(x)$ соответственно. При $i = 1$ имеем

$$S[f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_1}] = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_1}) \cos kx + b_k(f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_1}) \sin kx),$$

где

$$\begin{aligned} a_k(f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_1}) &= \frac{1}{\psi_1(k)} (a_k(f) \cos \beta_1(k) \pi/2 + b_k(f) \sin \beta_1(k) \pi/2), \\ b_k(f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_1}) &= \frac{1}{\psi_1(k)} (b_k(f) \cos \beta_1(k) \pi/2 - a_k(f) \sin \beta_1(k) \pi/2). \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_1(k)}{\psi_2(k)} (a_k(f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_1}) \cos(kx + (\beta_2(k) - \beta_1(k)) \pi/2) + b_k(f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_1}) \sin(kx + + (\beta_2(k) - \beta_1(k)) \pi/2)).$$

Пользуясь равенствами (2), убеждаемся, что он совпадает с $S[f_{\bar{\beta}_2}^{\psi_2}]$ и в то же время является рядом Фурье $(\psi, \bar{\beta})$-производной функции $f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_1}$.

Из доказанного предложения, в частности, следует, что если $(\psi_1, \bar{\beta}_1) \overset{L}{\leqslant} (\psi_2, \bar{\beta}_2)$, то

$$f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_2} \in L_{\bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_1}^{\psi_2/\psi_1} \mathfrak{N} \ \ \forall f \in L_{\bar{\beta}_2}^{\psi_2} \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N} \subset L^0 = \{\varphi : \varphi \in L(0, 2\pi), \ \varphi \perp 1\}. \tag{3}$$

Таким образом, устанавливается отношение порядка $(\psi, \bar{\beta})$-производных. Ясно, что «самый малый» порядок дает пара, у которой $\psi(k) \equiv 1$ и $\beta(k) \equiv 0$, поскольку в этом случае $L_{\bar{\beta}}^{\psi} = L\ (0, 2\pi)$.

Рассматривая множества $C_{\bar{\beta}}^{\psi}$ и желая добиться непрерывности «младших» производных, замечаем, что это свойство тесно связано со свойствами множества, содержащего $(\psi, \bar{\beta})$-производные. В связи с этим введем еще одно понятие.

Определение 2. *Пусть $\psi_1(k)$, $\bar{\beta}_1(k)$, $\psi_2(k)$ и $\bar{\beta}_2(k)$ — как и раньше, произвольные последовательности действительных чисел. Будем говорить, что пара $(\psi_1, \bar{\beta}_1)$ $C\mathfrak{N}$-предшествует паре $(\psi_2, \bar{\beta}_2)$, и писать $(\psi_1, \bar{\beta}_1) \overset{C\mathfrak{N}}{\leqslant} (\psi_2, \bar{\beta}_2)$, если из включения $f \in C_{\bar{\beta}_2}^{\psi_2} \mathfrak{N}$ следует $f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_1} \in C(0, 2\pi)$.*

Если $f \in C_{\bar{\beta}_2}^{\psi_2} \mathfrak{N}$ и $(\psi_1, \bar{\beta}_1) \overset{C\mathfrak{N}}{\leqslant} (\psi_2, \bar{\beta}_2)$, то по определению $f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_1} \in C(0, 2\pi)$ (и уж заведомо $f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_1} \in L^0$). Стало быть и в этом случае будет выполняться равенство (1), вследствие которого получаем аналог соотношения (3):

$$f_{\bar{\beta}_1}^{\psi_1} \in C_{\bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_1}^{\psi_2/\psi_1} \mathfrak{N} \quad \forall f \in C_{\bar{\beta}_2}^{\psi_2} \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N} \subset L^0.$$

Разумеется, не любые пары $(\psi_1, \bar{\beta}_1)$ и $(\psi_2, \bar{\beta}_2)$ связаны отношениями $\overset{L}{\leqslant}$ или $\overset{C\mathfrak{N}}{\leqslant}$.

Пусть, например, $\psi_1(k) \equiv \psi_2(k) \equiv k^{-2}$, $\bar{\beta}_1(k) \equiv 0$ и $\bar{\beta}(k) \equiv 1$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \ln^{-1} k \cos kx.$$

Хорошо известно, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln^{-1} k \cos kx$ является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln^{-1} k \sin kx$ таковым быть не может. Поэтому функция $g(x)$ обладает $(\psi_1, \bar\beta_1)$-производной и не имеет $(\psi_2, \bar\beta_2)$-производной, т. е. $g \in L^{\psi_1}_{\bar\beta_1}$ и $g \bar\in L^{\psi_2}_{\bar\beta_2}$. Аналогично заключаем, что функция

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \ln^{-1} k \sin kx$$

находится в $L^{\psi_2}_{\bar\beta_2}$ и не принадлежит $L^{\psi_1}_{\bar\beta_1}$. Стало быть, ни отношение $(\psi_1, \bar\beta_1) \overset{L}{\leqslant} (\psi_2, \bar\beta_2)$, ни ему противоположное места не имеют.

Отмеченный факт был бы недостатком, если бы нашей целью было упорядочение множества пар последовательностей. В данном случае он свидетельствует о многообразии множеств $L^{\psi}_{\bar\beta}$.

Вместе с тем можно указать достаточно простые условия, обеспечивающие L- и $C\mathfrak{N}$-предшествование таких пар.

Теорема 2. *Пусть $\psi_i(k)$ и $\beta_i(k)$, $i = 1, 2,$ — произвольные последовательности действительных чисел. Тогда, если для пары $(\psi, \bar\beta) = (\psi_2/\psi_1, \bar\beta_2 - \bar\beta_1)$ ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_2(k)}{\psi_1(k)} \cos(kx + (\beta_2(k) - \beta_1(k))\pi/2) \tag{4}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $D_{\psi,\bar\beta}(x)$, то

$$(\psi_1, \bar\beta_1) \overset{L}{\leqslant} (\psi_2, \bar\beta_2). \tag{5}$$

При этом, если $\mathfrak{N}$ — подмножество множества M существенно ограниченных функций, то и

$$(\psi_1, \bar\beta_1) \overset{C\mathfrak{N}}{\leqslant} (\psi_2, \bar\beta_2). \tag{5'}$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости (5), следует показать, что $L^{\psi_2}_{\bar\beta_2} \subseteq L^{\psi_1}_{\bar\beta_1}$, т. е. что $\forall f \in L^{\psi_2}_{\bar\beta_2}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_1(k)} (a_k(f) \cos(kx + \beta_1(k)\pi/2) + b_k(f) \sin(kx + \beta_1(k)\pi/2) \tag{6}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $f^{\psi_1}_{\bar\beta_1}(\cdot)$. Для этого рассмотрим функцию

$$J(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi_2}_{\bar\beta_2}(x+t) D_{\psi,\bar\beta}(t)\, dt.$$

Так как $f^{\psi_2}_{\bar\beta_2}(\cdot)$ и $D_{\psi,\bar\beta}(\cdot)$ суммируемы, то такой же будет и их свертка — функция $J(x)$. Выписывая для нее ряд Фурье с учетом равенств (2), убеждаемся, что он совпадает с рядом (6). Этим соотношение (5) доказано.

Если $f \in C^{\psi_2}_{\bar\beta_2}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \subset M$, то $J(x)$ непрерывна, а так как $S[J]$ совпадает с рядом (6), то в этом случае ряд (6) — ряд непрерывной функции, что и доказывает соотношение (5').

Приведем один из примеров, когда реализуются условия теоремы 2. Пусть $\psi_2(k)/\psi_1(k) \equiv k^{-r}$, $r > 0$, $k \in N$, а $\beta_1(k)$ и $\beta_2(k)$ принимают фиксированные значения $\beta_1(k) \equiv \beta_1$, $\beta_2(k) \equiv \beta_2$ $\forall k \in N$, так что $\beta_2 - \beta_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma$. В этом случае, как хорошо известно, ряд (4) всегда является рядом Фурье суммируемой функции. Значит, в рассматриваемом случае всегда будут выполняться соотношения (5) и (5'). В частности, при $\psi_1(k) \equiv k^{-r_1}$, $\psi_2(k) \equiv k^{-r_2}$, $r_1, r_2 > 0$ из теоремы 2 следует, что если $r_2 > r_1$, то пара (ψ_1, β_1) L- и $C\mathfrak{N}$-предшествует паре (ψ_2, β_2) при любых значениях β_1 и β_2. Напомним, что, как показывают примеры функций $g(x)$ и $h(x)$, при $r_1 = r$ эти факты в общем случае места не имеют.

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.— Киев, 1983.— 58 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 83.10).
2. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье.— Киев, 1983.— 58 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 83.69/.
3. *Рукасов В. И.* Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье.— Киев, 1983.— 56 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 83.62).
4. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций.— Киев, 1984.— 44 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 84.15).
5. *Степанец А. И.* Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье.— В кн. : Приближение периодических функций суммами Фурье. Киев, 1984, с. 3—25. (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 84.43).
6. *Степанец А. И., Новикова А. К.* Приближение периодических функций.— Там же, с. 26—54.
7. *Кушпель А. К.* Экстремальные свойства сплайнов и поперечники классов периодических функций в пространстве $C_{2\pi}$.— Киев, 1984.— 42 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 84.25).
8. *Степанец А. И.* Уклонения сумм Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций.— Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 6, с. 750—758.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 10.10.85