УДК 519.21

Т. А. Скороход

О сходимости бесконечных произведений почти линейных случайных независимых операторов

Пусть $\{X_k,\ k \geqslant 1\}$ — последовательность почти линейных сильных независимых операторов в гильбертовом вещественном сепарабельном пространстве H (см. [1, с. 147]). Будем изучать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} (E + X_k) = (E + X_1)(E + X_2)\ldots, \qquad (1)$$

где $X_k \in X_s^2$ (см. [1, с. 156]), т. е. операторы X_k удовлетворяют соотношению

$$\sup_{|x| \leqslant 1} M\,|X_k(x)|^2 = \| MX_k^* X_k \| = d(X_k) < \infty.$$

Здесь $x \in H$, $|x|^2 = (x, x)$ ($d^{1/2}(\cdot)$ — норма $|\cdot|_5$, определенная в [2]). Как показано в [2], для независимых $X_k \in X_s^2$ произведение (1) определено. Заметим, что X_s^2 — банахово пространство почти линейных сильных операторов с нормой $d^{1/2}(\cdot)$ (см. [1, с. 156]).

Теорема 1. *Если* $MX_k = 0$, $\Sigma d(X_k) < \infty$, *то бесконечное произведение* (1) *сходится в норме пространства* X_s^2.

Доказательство. Обозначим $\prod_{k=1}^{n} (E + X_k) = Z_n$, $\prod_{k=n}^{m} (E + X_k) = Z_n^m$. Укажем два простых свойства $d(\cdot)$:

1) если X и Y независимы, то $d(XY) \leqslant d(X)\,d(Y)$;
2) если $MX = 0$, то $d(E + X) \leqslant 1 + d(X)$.

Оценим $d(Z_n - Z_m)$;

$$d(Z_n - Z_m) \leqslant d(Z_n)\,d(Z_{n+1}^m - E). \qquad (2)$$

Оценим первый сомножитель в (2):

$$d(Z_n) < d(E + X_1)\,d(E + X_2)\ldots d(E + X_n) \leqslant \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} d(X_k)\right\}.$$

Очевидно, $d(Z_{n+1}^m - E) = \| M(Z_{n+1}^m)^* Z_{n+1}^m - E \|$. Легко доказать по индукции, что $M(Z_{n+1}^m)^* Z_{n+1}^m - E = \sum_{i=n}^{m-1} MX_{i+1}^* (Z_{n+1}^i)^* Z_{n+1}^i X_{i+1}$, $Z_{n+1}^n = E$. Отсюда следует

$$d(Z_{n+1}^m - E) \leqslant \sum_{i=n}^{m-1} d(Z_{n+1}^i X_{i+1}). \qquad (3)$$

Оценим каждое слагаемое в (3) отдельно:

$$d(Z_{n+1}^{i} X_{i+1}) \leqslant \prod_{k=n+1}^{i} (1 + d(X_k))\, d(X_{i+1}).$$

Таким образом,

$$d(Z_{n+1}^{i} X_{i+1}) \leqslant \exp\left\{\sum_{k=n+1}^{i} d(X_k)\right\} d(X_{i+1}), \qquad i = \overline{n, m-1}. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем окончательную оценку

$$d(Z_{n+1}^{m} - E) \leqslant \sum_{i=n}^{m-1} \exp\left\{\sum_{k=n+1}^{i} d(X_k)\right\} d(X_{i+1}) \underset{m,n\to\infty}{\to} 0.$$

Следовательно, $\Pi(E + X_k)$ — почти линейный сильный оператор и принадлежит X_s^2. Теорема доказана.

Обозначим $\prod_{k=1}^{\infty} (E + X_k)^{-1} = \ldots (E + X_n)^{-1} \ldots (E + X_2)^{-1} (E + X_1)^{-1}$.

Теорема 2. *Если* $MX_k = 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} M \| X_k \|^2 < \infty$ *и* $E + X_k$, $k = \overline{1, \infty}$, *обратимы, то* $\overleftarrow{\prod_{k=1}^{\infty}} (E + X_k)$ *и* $\overleftarrow{\prod_{k=1}^{\infty}} (E + X_k)^{-1}$ *сильно сходятся с вероятностью* 1.

Доказательство. Рассмотрим случайную последовательность в $H: \xi_n = Z_n x$. Это мартингал, для его сходимости достаточно, чтобы $\sup M |\xi_n|^2 < \infty$ (см. [3, с. 73]). Проверим, что это условие выполняется:

$$M|\xi_n|^2 = (MZ_n^* Z_n x, x) \leqslant \| Mz_n^* Z_n \| \, | x^2 | = d(Z_n) |x|^2.$$

Проводя оценку аналогично теореме 1, получаем

$$\sup d(Z_n) \leqslant \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} M \|X_k\|^2\right\} < \infty.$$

Таким образом, с вероятностью 1 существует предел $Z(x) = \lim \xi_n$. Это случайный сильный оператор и принадлежит X_s^2, как показано в теореме 1.

Теперь покажем, что бесконечное произведение $\overleftarrow{\prod_{k=1}^{\infty}} (E + X_k)^{-1}$ сильно сходится, т. е. при каждом $x \in H$ существует с вероятностью 1 предел $\lim \overleftarrow{\prod_{k=1}^{n}} (E + X_k)^{-1} x$. Сначала предположим, что $\| X_k \| \leqslant c < 1 \pmod P$, $k = \overline{1, \infty}$. Обозначим $\hat{X}_k = (E + X_k)^{-1} - E$. Будем изучать сходимость бесконечного произведения $\overleftarrow{\prod_{k=1}^{\infty}} (E + \hat{X}_k)$. Оценим $\| \hat{X}_k \|$ через $\| X_k \|$. Так как $\hat{X}_k = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_k^n = -X_k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X_k^n$, то $\| \hat{X}_k \| \leqslant (1 - c)^{-1} \| X_k \|$. Аналогично оценим $\| M\hat{X}_k \|$. Поскольку $M\hat{X}_k = M \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_k^n = MX_k^2 \times$ $\times (E + X_k)^{-1}$, то $\| M\hat{X}_k \| \leqslant (1 - c)^{-1} M \| X_k \|^2$.

Рассмотрим бесконечное произведение $\overleftarrow{\prod_{k=1}^{\infty}}(E+M\hat{X}_k)$. Оно сходится, так как сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\|M\hat{X}_k\|$.

Введем вспомогательную последовательность случайных операторов

$$\tilde{Z}_n=\overleftarrow{\prod_{k=1}^{n}}(E+\tilde{X}_k)=\overleftarrow{\prod_{k=1}^{n}}V_k^{-1}(E+\hat{X}_k)V_k,$$

где $V_n=\overleftarrow{\prod_{k=1}^{n}}(E+M\hat{X}_k)$, и покажем, что она сильно сходится.

Легко видеть, что

$$M\tilde{X}_k=0,\quad \sum_{k=1}^{\infty}M\|\tilde{X}_k\|^2\leqslant k_1\sum_{k=1}^{\infty}M\|\hat{X}_k-M\hat{X}_k\|^2\leqslant k_2\sum_{k=1}^{\infty}M\|X_k\|^2$$

(k_1, k_2 — некоторые постоянные). Применяя первую часть теоремы, убеждаемся, что последовательность $\tilde{Z}_n$ сильно сходится с вероятностью 1. Но так как $\overleftarrow{\prod_{k=1}^{n}}(E+\hat{X}_k)=V_n^{-1}\tilde{Z}_n$, а V_n^{-1} сходится, то и бесконечное произведение $\overleftarrow{\prod_{k=1}^{\infty}}(E+\hat{X}_k)$ сходится.

Мы предполагали, что $\|X_k\|\leqslant c<1$. В общем случае введем случайные операторы

$$X_k^c=\begin{cases}X_k, & \|X_k\|\leqslant c,\\ 0, & \|X_k\|>c.\end{cases}$$

Тогда $\overleftarrow{\prod_{k=1}^{\infty}}(E+X_k^c)^{-1}$ сильно сходится. Но

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\{\|X_k\|>c\}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}M\|X_k\|^2c^{-2}<\infty.$$

Следовательно, по лемме Бореля — Кантелли бесконечные произведения $\Pi(E+X_k)^{-1}$ и $\Pi(E+X_k^c)^{-1}$ отличаются почти наверное конечным числом сомножителей и сходятся одновременно.

Следствие 1. *Если* $\|X_k\|\leqslant c<1$, $MX_k=0$, $k=\overline{1,\infty}$, $\Sigma M\|X_k\|^2<\infty$, *то* $\Pi(E+X_k)$ *и* $\Pi(E+X_k)^{-1}$ *сходятся в норме пространства* X_s^2.

Теорема 3. *Если* $\prod_{k=1}^{\infty}(E+MX_k)$ *сходится*, $\Sigma d(X_k-MX_k)<\infty$, *то справедливо утверждение теоремы* 1.

Доказательство. Рассмотрим бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}(E+\tilde{X}_k)=\prod_{k=1}^{\infty}V_{k-1}(E+X_k)V_k^{-1},$$

где $V_n=\prod_{k=1}^{n}(E+MX_k)$. Очевидно, $M\tilde{X}_k=0$. Покажем, что $\sum_{k=1}^{\infty}d(\tilde{X}_k)<\infty$. Так как $\tilde{X}_k=V_{k-1}(X_k-MX_k)V_k^{-1}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}d(\tilde{X}_k)<\sum_{k=1}^{\infty}\|V_{k-1}\|^2\|V_k^{-1}\|d(X_k-MX_k)\leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}d(X_k-MX_k)$$

(c — некоторая постоянная).

Применяя теорему 1, убеждаемся, что бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}(E+\widetilde{X}_k)$ сходится в норме пространства X_s^2. Но $\prod_{k=1}^{n}(E+X_k)=\prod_{k=1}^{n}(E+\widetilde{X}_k)V_n$, а $d(V_n-V_m)\leqslant\|(V_n-V_m)^*\|\,\|V_n-V_m\|\underset{m,n\to\infty}{\to}0$. Следовательно, $\Pi(E+X_k)$ сходится в норме пространства X_s^2. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если* $M\|X_k\|^2<\infty$, $\prod_{k=1}^{\infty}(E+MX_k)$ *сходится и* $\sum_{k=1}^{\infty}M\|X_k-MX_k\|^2<\infty$, *то справедливо утверждение теоремы* 2.

Доказательство. Применяя обозначения предыдущей теоремы и используя результаты теоремы 2, убеждаемся, что бесконечные произведения $\prod_{k=1}^{\infty}(E+\widetilde{X}_k)$ и $\Pi(E+\widetilde{X}_k)^{-1}$ сильно сходятся с вероятностью 1. Но

$$\prod_{k=1}^{n}(E+\widetilde{X}_k)=\prod_{k=1}^{n}(E+X_k)V_n^{-1}, \tag{5}$$

а

$$\overleftarrow{\prod_{k=1}^{n}}(E+\widetilde{X}_k)^{-1}=V_n\overleftarrow{\prod_{k=1}^{n}}(E+X_k)^{-1}. \tag{6}$$

Так как V_n и V_n^{-1} по условию сходятся, то, домножая (5) справа на V_n, а (6) слева на V_n^{-1}, получаем, что бесконечные произведения $\prod_{k=1}^{\infty}(E+X_k)$ и $\overleftarrow{\prod_{k=1}^{\infty}}(E+X_k)^{-1}$ сильно сходятся с вероятностью 1. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если* $\|X_k\|\leqslant c<1$, $\prod_{k=1}^{\infty}(E+MX_k)$ *сходится и* $\sum_{k=1}^{\infty}M\|X_k-MX_k\|^2<\infty$, *то справедливо утверждение следствия* 1.

Доказательство. Обозначим $V_m^n=\prod_{k=m}^{n}(E+MX_k)$. Выбирая m $(m<n)$ достаточно большим, можно сделать $\|V_m^n\|$ и $\|(V_m^n)^{-1}\|$ одновременно как угодно близкими к 1. Рассмотрим бесконечное произведение

$$\prod_{k=m}^{\infty}V_m^{k-1}(E+X_k)(V_m^k)^{-1}=\prod_{k=m}^{\infty}(E+\widetilde{X}_k),$$

где $\widetilde{X}_k=V_m^{k-1}(X_k-MX_k)(V_m^k)^{-1}$. Выбором m можно добиться, чтобы $\|\widetilde{X}_k\|\leqslant\alpha<1$. Тогда по следствию 1 $\prod_{k=m}^{\infty}(E+\widetilde{X}_k)$ и $\overleftarrow{\prod_{k=m}^{\infty}}(E+\widetilde{X}_k)^{-1}$ сходятся в норме $d^{1/2}(\cdot)$. Но $\prod_{k=m}^{n}(E+X_k)=\prod_{k=m}^{n}(E+\widetilde{X}_k)V_m^n$, а $\overleftarrow{\prod_{k=m}^{n}}(E+X_k)^{-1}=(V_m^n)^{-1}\overleftarrow{\prod_{k=m}^{n}}(E+X_k)^{-1}$. Следовательно, утверждение доказано.

1. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы.— Киев : Наук. думка, 1977.— 213 с.
2. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы : Автореф. дис. ... д-ра физ.- мат. наук.— Киев, 1978.— 258 с.
3. *Скороход А. В.* Случайные линейные операторы.— Киев : Наук. думка, 1978.— 151 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев — Получено 23.05.84