УДК 517.9

В. Д. Кошманенко

Построение волновых операторов по возмущенной полугруппе

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ задана пара самосопряженных операторов h_1, $h_2 \geqslant 0$, для которых существуют волновые операторы

$$w^{\pm}(h_2, h_1) := s - \lim_{t \to \pm\infty} \exp(ith_2) \exp(-ith_1) P_{1,ac}, \tag{1}$$

где $P_{j,ac}$ — ортопроектор на подпространство абсолютной непрерывности оператора h_j, $j = 1, 2$. Покажем, что волновые операторы $w^{\pm}(h_2, h_1)$ можно вводить без наличия унитарной группы $\exp(ith_2)$, используя вместо нее полугруппу $\exp(-\tau h_2)$, $\tau \geqslant 0$. Идея построений основана на следующем утверждении. В замкнутой комплексной полуплоскости $\overline{\mathbb{C}^-} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$ существует достаточно большое по запасу элементов множество аналитических функций $F(z)$, $z = t + i\tau$, таких, что операторы

$$\exp(ith_2) \tilde{F}(h_2), \quad \int_0^\infty \exp(-\tau h_2) F(t - i\tau)\, d\tau \tag{2}$$

асимптотически близки в сильном смысле при $t \to +\infty$ либо $t \to -\infty$, где $\tilde{F}(\lambda)$ — фурье-образ сужения $F(z)$ на вещественную ось.

Функции, удовлетворяющие указанному условию, определяются следующим образом. Пусть $F(z)$ — функция комплексного переменного $z = t + i\tau$ аналитична в $\overline{\mathbb{C}^-}$ и обладает свойством: для каждого $t \in \mathbb{R}^1$

$$\int_{\Gamma_t^+} \exp(-i\lambda z) F(z)\, dz = 0, \quad \lambda \geqslant 0. \tag{3}$$

Здесь Γ_t^+ — граница сектора в $\overline{\mathbb{C}^-}$ с вершиной в точке t и углом $\pi \leqslant \arg z \leqslant 3\pi/2$. Множество всех таких функций обозначаем $\mathbb{Z}^+$. Аналитическая в $\overline{\mathbb{C}^-}$ функция $F \in \mathbb{Z}^-$, если для нее при каждом $t \in \mathbb{R}^1$ справедливо равенство вида (3), в котором Γ_t^+ заменено на Γ_t^- — границу дополнительного в $\overline{\mathbb{C}^-}$ сектора.

Предложение. *Для любой точки $\lambda_0 \in \mathbb{R}^1$ в каждом из множеств $\mathbb{Z}^{\pm}$ существует функция F такая, что $\tilde{F}(\lambda_0) \neq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию Миттаг-Леффлера $E(z)$ [1], определенную следующим образом. Вне полуполосы $\mathfrak{G} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < \pi\}$ она задана формулой

$$E(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\exp(\exp \xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \bar{\in} \mathfrak{G}, \tag{4}$$

где L — граница $\mathfrak{G}$. В точках $z \in \mathfrak{G}$ функция $E(z)$ задается аналитическим продолжением исходя из (4). Определим $F^{\theta}(z) := E(\exp(-i\theta) z)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Учитывая асимптотическое поведение функции $F(z)$ [1]:

$$E(z) = 1/z + O(1/z^2), \quad z \to \infty, \quad z \bar{\in} \mathfrak{G},$$

$$E(z) = 1/z - \exp(\exp z) + O(1/z^2), \quad z \to \infty, \quad z \in \mathfrak{G},$$

нетрудно убедиться, что для любой фиксированной наперед точки $\lambda_0 \in \mathbb{R}^1$ и каждого знака $+$, $-$ существуют угол θ и точка $\mu \in \mathbb{R}^1$ такие, что функция $F(z) := \exp(-i\mu z)(F^{\theta}(z))^2$ принадлежит $\mathbb{Z}^{\pm}$ и для нее $\tilde{F}(\lambda_0) \neq 0$. При этом игра т роль тот факт, что функция $\tilde{F}(\lambda)$ не является финитной.

Отметим, что при доказательстве этого предложения фигурировали функции $F(z)$, для которых $\tilde{F}(\lambda)$ непрерывны и убывают на бесконечности. В дальнейшем мы используем только такие функции без дополнительного напоминания.

Введем ограниченную операторную функцию

$$\check{F}_t^{\pm}(h_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_0^{\infty} \exp(-\tau h_2) F(t - i\tau)\, d\tau, \quad F \in \mathbb{Z}^{\pm}, \tag{5}$$

где несобственный интеграл можно понимать как предел по норме при $s \to \infty$ интегралов Римана $\int_0^s$, определяемых в сильном смысле.

Теорема. *Существование волновых операторов* (1) *эквивалентно существованию для всех* $\varphi \in \mathfrak{H}_{1,ac} := P_{1,ac}\mathfrak{H}$ *пределов*

$$\varphi_F^{\pm} = s - \lim_{t \to \pm\infty} \check{F}_t^{\pm}(h_2) \exp(-ith_1)\varphi, \; F \in \mathbb{Z}^{\pm}, \tag{6}$$

таких, что

$$\| \varphi_F^{\pm} \| = \| \tilde{F}(h_1)\varphi \|. \tag{7}$$

При этом волновые операторы $w^{\pm}(h_2, h_1)$ *совпадают с замыканиями изометрических отображений*

$$\tilde{F}(h_1)\varphi \to \varphi_F^{\pm}. \tag{8}$$

Доказательство основано на следующей цепочке равенств, в которой для определенности $F \in Z^{+}$:

$$\check{F}_t^{+}(h_2) = \int_{\mathbb{R}^1} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_0^{\infty} \exp(-\tau\lambda) F(t - i\tau)\, d\tau \right] dE_\lambda^{h_2} = \tag{9}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} \exp(it\lambda) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_0^{\infty} \exp(-i\lambda(t - i\tau)) F(t - i\tau)\, d\tau \right] dE_\lambda^{h_2} \tag{10}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} \exp(it\lambda) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^{t} \exp(-i\lambda s) F(s - i\tau)|_{\tau=0} ds \right] dE_\lambda^{h^2} \tag{11}$$

$$= \exp(ith_2)\, \tilde{F}_t^{+}(h_2), \tag{12}$$

где $E_\lambda^{h_2}$ — разложение единицы оператора h_2, а

$$\tilde{F}_t^{+}(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp(-i\lambda z) F(s - i\tau)|_{\tau=0} ds. \tag{13}$$

Равенство (9) получаем из (5), используя теорему Фубини. К (10) приходим введением множителя $\exp(it\lambda)\exp(-it\lambda)$. Наиболее важное равенство (11) следует из свойства (3) функции $F \in \mathbb{Z}^{+}$. Наконец, (12) справедливо в силу определения функции от самосопряженного оператора. Теперь заметим, что операторы $\tilde{F}_t^{+}(h_2)$ ограничены и при $t \to +\infty$ сильно сходятся к $\tilde{F}(h_2)$. Поэтому, учитывая перестановочность $\exp(ith_2)$ и $F_t^{+}(h_2)$ и предполагая существование $w^{\pm}(h_2, h_1)$, имеем: для $\varphi \in \mathfrak{H}_{1,ac}$

$$s - \lim_{t \to +\infty} \check{F}_t^{+}(h_2) \exp(-ith_1)\varphi = \tilde{F}(h_2)\, w^{+}(h_2, h_1)\varphi. \tag{14}$$

Аналогичное соотношение справедливо и для $F \in \mathbb{Z}^{-}$. Таким образом, пределы (6) существуют, причем

$$\varphi_F^{\pm} = \tilde{F}(h_2)\, w^{\pm}(h_2, h_1)\, \varphi. \tag{15}$$

Из (15) в силу переплетающего свойства волновых операторов и их изометричности получаем (7). Далее, благодаря доказанному выше предложению, замыкание каждого из множеств (отдельно для — и +): $\{\tilde{F}(h_1)\varphi \mid \varphi \in \mathfrak{H}_{1,ac},\ F \in \mathbb{Z}^{\pm}\}$ совпадает с $\mathfrak{H}_{1,ac}$. Аналогично, замыкания множеств $\{\tilde{F}(h_2)\, w^{\pm}(h_2, h_1)\varphi \mid \varphi \in \mathfrak{H}_{1,ac},\ F \in \mathbb{Z}^{\pm}\}$ совпадают с областями значений операторов $w^{\pm}(h_2, h_1)$. Поэтому замыкания отображений (8) совпадают с операторами $w^{\pm}(h_2, h_1)$.

Докажем теорему в обратную сторону. Используя установленное равенство

$$\check{F}_t^{\pm}(h_2)\exp(-ith_1) = \tilde{F}_t^{\pm}(h_2)\exp(ith_2)\exp(-ith_1),$$

покажем вначале, что из существования пределов (6) следует существование волновых операторов в слабом смысле. Действительно, обозначая $w(t) := \exp(ith_2)\exp(-ith_1)\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{H}_{1,ac}$ и учитывая, что $|(w(t)\varphi, \tilde{F}_t^{\pm}(h_2)^*\psi)| \leqslant \|\varphi\|\,\|\tilde{F}_t^{\pm}(h_2)^*\psi\|$, $\psi \in \mathfrak{H}_{2,ac}$, получаем

$$|(\varphi_F^{\pm}, \psi)| \leqslant \|\varphi\|\,\|\tilde{F}(h_2)^*\psi\|.$$

Следовательно, величина $l_{\varphi,F}^{\pm}(\psi) := (\varphi_F^{\pm}, \psi)$ задает линейный непрерывный функционал на векторах вида $\tilde{F}(h_2)^*\psi \in \mathfrak{H}_{2,ac}$, которые, очевидно, образуют тотальное подмножество в $\mathfrak{H}_{2,ac}$. Поэтому справедливо представление $l_{\varphi,F}^{\pm}(\psi) = (\varphi^{\pm}, \tilde{F}(h_2)^*\psi)$. А это означает существование слабого предела у операторной функции $w(t)$ при $t \to \pm\infty$. Благодаря условию (7) отображежения $\varphi \to \varphi^{\pm}$ изометричны. Но, как известно, существование слабых изометрических волновых операторов влечет их существование в сильном смысле. Теорема полностью доказана.

Заметим, что в предложенной здесь конструкции волновых операторов (см. формулы (5), (6)) можно пользоваться полугруппой вместо группы не только для возмущенного оператора, но и для невозмущенного. Однако в приложениях построение унитарной группы $\exp(-it\,h_1)$, отвечающей невозмущенному оператору h_1, обычно не вызывает затруднений, в то время как построение $\exp(ith_2)$, $t \in \mathbb{R}^1$,— принципиально более сложная задача, чем построение полугруппы $\exp(-\tau h_2)$, $\tau \geqslant 0$.

Отметим в заключение, что доказанная здесь теорема допускает обобщение [2] на случай, когда из-за сингулярности возмущения построить оператор h_2 в $\mathfrak{H}$ невозможно и вместо полугруппы $\exp(-\tau h_2)$ для введения волновых операторов используется обобщенный аналог функции $(\exp(-\tau h_2)\varphi, \psi)$, $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$. Такой вариант данного результата имеет приложение в квантовой теории поля при формулировке теории рассеяния Хаага—Рюэля на языке функций Швингера [2].

1. *Евграфов М. А.* Аналитические функции.— М. : Наука, 1979.— 423 с.
2. *Кошманенко В. Д.* Волновые операторы для полугрупп и переходных функций.— Докл. АН СССР, 1984, 276, № 2, с. 347—350.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 17.10.84