УДК 517.53

Я. И. Савчук

Структура множества дефектных векторов целых и аналитических кривых конечного порядка

В настоящей работе используются основные результаты теории целых и аналитических кривых, а также обозначения, использованные в [1].

Для целой p-мерной ($p \geqslant 2$) кривой $\vec{G}$ обозначим через $E_N(\vec{G}) = \{\vec{a} \in \mathbb{C}^p : \delta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}$ множество всех ее дефектных векторов, а через $\varkappa(\vec{G}) = \{\delta \in (0, 1] : (\exists \vec{a} \in \mathbb{C}^p) \{\delta(\vec{a}, \vec{G}) = \delta\}\}$ — множество величин ее дефектов.

1. В силу известной [1] связи между двумерными целыми кривыми и мероморфными функциями известная теорема Неванлинны о множестве дефектных значений мероморфной функции эквивалентна утверждению, что при $p = 2$ множество $E_N(\vec{G}) \cup \{\vec{0}\}$ является не более чем счетным объединением одномерных подпространств в $\mathbb{C}^p$. С другой стороны, теорема А. А. Гольдберга [2, гл. IV, § 4] эквивалентна утверждению, что для любого множества в $\mathbb{C}^2$, представимого в виде не более чем счетного объединения одномерных подпространств, найдется целая кривая $\vec{G}$ наперед заданного положительного порядка такая, что указанное множество совпадает с $E_N(\vec{G}) \cup \{\vec{0}\}$. Таким образом, структура множества $E_N(\vec{G})$ при $p = 2$ полностью описана. В настоящей статье дается полное описание структуры $E_N(\vec{G})$ при $p \geqslant 3$ для кривых конечного порядка. Для кривых бесконечного порядка такое описание не удалось получить, но мы показываем, что в этом случае описание должно существенно отличаться. Кроме того, мы показываем, что для кривых $\vec{G}$ конечного порядка множество $\varkappa(\vec{G})$ не более чем счетно.

Теорема 1. *Для того чтобы множество $A \subset \mathbb{C}^p$ совпадало с множеством $E_N(\vec{G}) \cup \{\vec{0}\}$ для некоторой целой кривой $\vec{G}$ конечного положительного порядка, необходимо и достаточно, чтобы A было не более чем счетным объединением подпространств $A_j \subset \mathbb{C}^p$ размерности $\leqslant p - 1$.*

Заметим, что достаточность теоремы была доказана (без требования конечности порядка) в работе [3]. Поэтому в настоящей статье ограничимся доказательством необходимости (включая нулевой порядок).

Теорема 2. *Существует трехмерная целая кривая $\vec{G}$ бесконечного порядка, для которой множество $E_N(\vec{G}) \cup \{\vec{0}\}$ не является счетным объединением подпространств размерности $\leqslant 2$.*

Теорема 3. *Для любой целой кривой $\vec{G}$ конечного порядка множество $\varkappa(\vec{G})$ не более чем счетно.*

2. Введем некоторые определения и докажем три леммы.

Определение 1. *Пусть L — некоторое q-мерное подпространство в $\mathbb{C}^p$. Систему векторов M из L назовем допустимой в L, если: при* $\operatorname{card} M \leqslant q$ *все векторы из M линейно независимы; при* $\operatorname{card} M > q$ *любые q векторов из M линейно независимы.*

Определение 2. *Пусть множество S лежит в q-мерном подпространстве пространства $\mathbb{C}^p$ и содержит q линейно независимых векторов. Подмножество $M \subset S$ назовем максимальным допустимым в S, если:* а) *любые q векторов из M линейно независимы;* б) *любой вектор из $S \setminus M$ является линейной комбинацией некоторых $q - 1$ векторов из M.*

Лемма 1. *Для любого множества $S \subset \mathbb{C}^p$ существует максимальное допустимое подмножество M в S.*

Доказательство. Пусть размерность линейной оболочки множества S равна q. Рассмотрим множество всех допустимых систем из S, которое обозначим $\Theta(S)$. Очевидно, это множество частично упорядоченное по включению. По лемме Цорна $\Theta(S)$ содержит максимальный элемент M, т. е. такое множество, что если $M' \in \Theta(S)$ и $M \subset M'$, то $M = M'$. Нетрудно видеть, что M — максимальное допустимое подмножество в S. В самом деле, если это не так, то существует такой вектор $\vec{a} \in S \setminus M$, который не является линейной комбинацией никаких $q - 1$ векторов из S, т. е. $\{\vec{a}\} \cup M \in \Theta(S)$, что невозможно, так как M — максимальный элемент из $\Theta(S)$.

Лемма 2. *Пусть $\vec{G}$ — целая трансцендентная (т. е. такая, что $\ln r = o\{T(r, \vec{G})\}$, $r \to \infty$) кривая в $\mathbb{C}^p$ конечного порядка, B — подпространство в C^p, $1 \leqslant \dim B \leqslant p - 1$. Тогда имеет место один из двух случаев:* 1) *$B \subset E_N(\vec{G}) \cup \{\vec{0}\}$;* 2) *любая допустимая в B система из $E_N(\vec{G}) \cap B$ не более чем счетна.*

Доказательство. Обозначим $\dim B = q$. Покажем, что если случай 1 не имеет места, то будет иметь место случай 2.

Предположим, что существует несчетная допустимая в B система $M \subset \subset E_N(\vec{G}) \cap B$. Так как случай 1 не имеет места, то существует такой вектор $\vec{b}_0 \in B$, что

$$\delta(\vec{b}_0, \vec{G}) = 0. \tag{1}$$

Пусть $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q$ — базис в B. Обозначим $\Lambda = \{\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_q) : \lambda_1\vec{b}_1 + \dots + \lambda_q\vec{b}_q \in M\}$. Очевидно, Λ — допустимая система векторов в $\mathbb{C}^q$. Рассмотрим в $\mathbb{C}^q$ вектор-функцию $\vec{G}_1(z) = (\vec{G}(z)\vec{b}_1, \dots, \vec{G}(z)\vec{b}_q)\cdot\Phi(z)$, где $\Phi(z)$ — некоторая мероморфная в $\mathbb{C}$ функция без нулей, полюсами которой являются общие нули функций $\vec{G}(z)\vec{b}_1, \dots, \vec{G}(z)\vec{b}_q$. В силу линейной независимости векторов $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q$ компоненты $\vec{G}_1(z)$ линейно независимы и, следовательно, $\vec{G}_1(z)$ является q-мерной целой кривой.

Так как для произвольного вектора $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$ и соответствующего ему вектора $\vec{b} = \lambda_1\vec{b}_1 + \dots + \lambda_q\vec{b}_q$ выполняется $\vec{G}(z)\vec{b} = \vec{G}_1(z)\vec{\lambda}/\Phi(z)$, то $N(r, \vec{b}, \vec{G}) = N(r, \vec{\lambda}, \vec{G}_1) + N(r, \Phi)$, откуда в силу первой основной теоремы для целых кривых имеем

$$T(r, \vec{G}) - m(r, \vec{b}, \vec{G}) = T(r, \vec{G}_1) - m(r, \vec{\lambda}, \vec{G}_1) + N(r, \Phi) + O(1),\ r \to \infty. \tag{2}$$

Заметим также, что

$$T(r, \vec{G}_1) + N(r, \Phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left\{\sum_{k=1}^{q} |\vec{G}(re^{i\varphi})\vec{b}_k|^2\right\}^{1/2} d\varphi + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left\{\sum_{k=1}^{q} \|\vec{G}(re^{i\varphi})\|\cdot\|\vec{b}_k\|^2\right\}^{1/2} d\varphi + O(1) = T(r, \vec{G}) + O(1), \quad r \to \infty. \tag{3}$$

На основании (1) существует такая последовательность положительных чисел $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$, что $m(r_n, \vec{b}_0, \vec{G}) = o\{T(r_n, \vec{G})\}$, $n \to \infty$. Поскольку $m(r, \vec{\lambda}, \vec{G}_1) \geqslant 0$, то из (2) и (3) следует

$$T(r_n, \vec{G}_1) + N(r_n, \Phi) = \{1 + o(1)\}\, T(r_n, \vec{G}), \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Так как множество M несчетно и каждый вектор из M является дефектным для целой кривой $\vec{G}$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\delta(\vec{b}, \vec{G}) > \varepsilon \tag{5}$$

для несчетного подмножества векторов $\vec{b}$ из M. Обозначим это подмножество через M_0, а соответствующее ему множество векторов $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$, таких, что $\lambda_1\vec{b}_1 + \dots + \lambda_q\vec{b}_q \in M_0$ — через Λ_0. Очевидно, что $\Lambda_0 \subset \Lambda$.

Для произвольного вектора $\vec{b} \in M_0$ и соответствующего ему вектора $\vec{\lambda} \in \Lambda_0$ в силу (2), (4) и (5) имеем

$$m(r_n, \vec{\lambda}, \vec{G}_1) = m(r_n, \vec{b}, \vec{G}) + o\{T(r_n, \vec{G})\} \geqslant \{\varepsilon + o(1)\}\, T(r_n, \vec{G}) \geqslant \{\varepsilon + o(1)\} \times$$
$$\times\, T(r_n, \vec{G}_1), \quad n \to \infty. \tag{6}$$

С другой стороны, поскольку Λ_0 — допустимая система векторов в $\mathbb{C}^q$, то в силу второй основной теоремы для целых кривых конечного порядка имеем

$$\sum_{\vec{\lambda} \in Q} m(r, \vec{\lambda}, \vec{G}_1) \leqslant \{q + o(1)\}\, T(r, \vec{G}_1), \quad r \to \infty, \tag{7}$$

где Q — любое конечное подмножество из Λ_0. Легко видеть, что если взять Q такое, чтобы $\operatorname{card} Q = [q/\varepsilon] + 2$, то в силу (6) получаем, что (7) не выполняется. Данное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3. *Пусть имеем подмножество B подпространства $L \subset \mathbb{C}^p$, $\dim L = q \leqslant p$, и пусть известно, что любая допустимая в L система из B не более чем счетна. Тогда существует не более чем счетное количество подпространств $B_j \subset L$, $\dim B_j \leqslant q - 1$, таких, что:*

1) $B \subset \bigcup\limits_j B_j$;

2) *для всех j таких, что $\dim B_j \geqslant 2$, множество $B_j \cap B$ содержит несчетную допустимую в B_j систему векторов.*

Доказательство. На основании леммы 1 можем выбрать из B максимальную допустимую в L систему векторов, которую обозначим через M. По условию леммы она не более чем счетна. Если $\operatorname{card} M \leqslant q - 1$, то рассматриваем подпространство S_1 — линейную оболочку M. Любой вектор из B выражается линейно через векторы из M и поэтому $S_1 \supset B$. Если $\operatorname{card} M > q - 1$, то рассмотрим подпространства S_j, которые получаются как линейные оболочки всевозможных наборов векторов из M по $q - 1$ в каждом. Очевидно, множество этих подпространств не более чем счетно. Нетрудно видеть, что

$$B \subset \bigcup_j S_j. \tag{8}$$

Действительно, так как M — максимальная допустимая в B система векторов, то для любого вектора $\vec{b} \in B$ существует $q - 1$ векторов из M, линейной комбинацией которых он является, и, следовательно, существует j такое, что $\vec{b} \in S_j$. В силу (8) множество B можно представить в виде

$$B = \bigcup_j (S_j \cap B).$$

Для j, при которых любая допустимая в S_j система векторов из $S_j \cap B$ не более чем счетна, проделав приведенные выше рассуждения, получим $S_j \cap B = \bigcup\limits_i (S_{ji} \cap B)$, где S_{ji} — подпространства с $\dim S_{ji} \leqslant q - 2$, которые получаются из $S_j \cap B$ точно так же, как S_j из B.

На следующем этапе для тех j и i, при которых $S_{ji} \cap B$ содержит не более чем счетную допустимую в S_{ji} систему векторов, найдем $S_{ji} \cap B = \bigcup\limits_k (S_{jik} \cap B)$. Здесь S_{jik} — подпространства с $\dim S_{jik} \leqslant q - 3$.

Наконец, не более чем через $q - 1$ шагов получим $B = \bigcup\limits_j (B_j \cap B)$, где B_j — или подпространство размерности 1, или такое, что $B_j \cap B$ содержит несчетную допустимую в B_j систему векторов. Здесь через B_j обозначены те $S_j, S_{ji}, S_{jik}, \ldots$, пересечения которых с B содержат несчетные допустимые в соответствующих подпространствах $S_j, S_{ji}, S_{jik}, \ldots$ системы векторов. Тем самым лемма 3 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим случаи трансцендентной целой кривой $\vec{G}$, т. е. такой, что $\ln r = o\{T(r, \vec{G})\}$, $r \to \infty$. В случае, когда $T(r, \vec{G}) = O(\ln r)$, $r \to \infty$, все компоненты целой кривой можно считать полиномами, и как нетрудно видеть, сумма дефектных векторов является дефектным вектором. Тогда множество дефектных векторов совпадает с некоторым подпространством из $\mathbb{C}^p$ размерности не более $p - 1$. Также видно, что в этом случае для любого $\vec{a} \in \mathbb{C}^p$ выполняется $\delta(\vec{a}, \vec{G}) = m/n$, где m — некоторое целое число между 0 и n, а $n = \lim\limits_{r\to\infty} \{T(r, \vec{G}) \ln^{-1} r\}$, т. е. множество $\varkappa(\vec{G})$ в данном случае конечно.

Утверждение необходимости теоремы непосредственно вытекает из лемм 2 и 3. Действительно, применим лемму 3 с $L = \mathbb{C}^p$. Так как любая допустимая в $\mathbb{C}^p$ система дефектных векторов для целой кривой не более чем счетна, то условия леммы выполняются с $B = E_N(\vec{G})$. Таким образом, существует не более чем счетное множество подпространств $A_j \subset \mathbb{C}^p$, $\dim A_j \leqslant p-1$, таких, что: 1) $E_N(\vec{G}) \subset \bigcup_j A_j$; 2) $E_N(\vec{G}) \cap A_j$ содержит несчетную допустимую в A_j систему векторов при $\dim A_j \geqslant 2$. Тогда по лемме 2 имеем $E_N(\vec{G}) \cap A_j = A_j \diagdown \{\vec{0}\}$ при $\dim A_j \geqslant 2$. Если же $\dim A_j = 1$, то $A_j = \{\lambda \vec{a}_j : \lambda \in \mathbb{C}\}$, и в этом случае $E_N(\vec{G}) \cap A_j = A_j \diagdown \{\vec{0}\}$, так как, очевидно, одновременно с вектором $\vec{a}$ и все векторы $\lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{C} \diagdown \{0\}$, являются дефектными. Таким образом, $E_N(\vec{G}) = \bigcup_j A_j \diagdown \{\vec{0}\}$. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 3. В силу рассуждений в п. 3 нам остается доказать теорему для случая трансцендентной целой кривой. Предположим, что существует целая кривая $\vec{G}$ конечного порядка такая, у которой множество $\varkappa(\vec{G})$ несчетно. Для каждого $\alpha \in \varkappa(\vec{G})$ выберем ровно по одному вектору $\vec{a} = \vec{a}(\alpha) \in \mathbb{C}^p$ такому, что $\delta(\vec{a}) = \alpha$. Обозначим это множество векторов через Γ. Оно несчетно, но любая допустимая в $\mathbb{C}^p$ система векторов, которая принадлежит Γ, не более чем счетна. Любые два вектора из Γ линейно независимы, поскольку при $\vec{a}' = \lambda\vec{a}''$ имеем $\delta(\vec{a}') = \delta(\vec{a}'')$. По лемме 3 существует такое не более чем счетное множество подпространств $B_j \subset L = \mathbb{C}^p$, $\dim B_j \leqslant p-1$, что $\Gamma \subset \bigcup_j B_j$, а при $\operatorname{card} B_j \geqslant 2$ множество $\Gamma \cap B_j$ содержит несчетную допустимую в B_j систему векторов. Поскольку Γ несчетно и любые два вектора из Γ линейно независимы, то среди указанных подпространств B_j обязательно найдется такое $B = B_n$, что $\dim B = q \geqslant 2$. Соответствующее несчетное подмножество из $\Gamma \cap B$, которое допустимо в B, обозначим через M. Выберем линейно независимые векторы $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q$ из B и рассмотрим для произвольного вектора $\vec{b} = \lambda_1\vec{b}_1 + \ldots + \lambda_q\vec{b}_q \in B$ вектор $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$.

Множество $\varkappa_M = \{\vec{\delta}(\vec{b}) : b \in M\}$ несчетно, так как $M \subset \Gamma$, и поэтому $\delta(\vec{b}') \neq \delta(\vec{b}'')$ при $\vec{b}' \in M, \vec{b}'' \in M$, $\vec{b}' \neq \vec{b}''$. Очевидно, существуют такие $\alpha_0 \in \varkappa_M$ и $\varepsilon > 0$, что множество $\varkappa_0 = \varkappa_M \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geqslant \alpha_0 + \varepsilon\}$ также несчетно.

Как и в лемме 2, рассмотрим целую q-мерную кривую $\vec{G}_1(z) = (\vec{G}(z)\vec{b}_1, \ldots, \vec{G}(z)\vec{b}_q)\Phi(z)$, где $\Phi(z)$ определяется точно так же.

Так как для вектора $\vec{b} = \vec{b}(\alpha_0) \in M$ выполняется $\delta(\vec{b}) = \alpha_0$, то найдется последовательность положительных чисел $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$, такая, что $m(r_n, \vec{b}, \vec{G}) = \{\alpha_0 + o(1)\} T(r_n, (\vec{G})$, $n \to \infty$. Тогда из (2) аналогично тому, как мы получили неравенство (4), найдем следующее неравенство:

$$T(r_n, \vec{G}_1) + N(r_n, \Phi) \geqslant \{1 - \alpha_0 + o(1)\} T(r_n, \vec{G}), \quad n \to \infty. \tag{4'}$$

Для любого вектора $\vec{b} \in K = \{\vec{b} : \vec{b} \in M,\ \delta(\vec{b}) \in \varkappa_0\}$ и соответствующего ему вектора $\vec{\lambda} \in \Lambda = \{\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q) : \lambda_1\vec{b}_1 + \ldots + \lambda_q\vec{b}_q \in K\}$ получим в силу определения $\varkappa_0$ с учетом (4) и (3) неравенство, аналогичное неравенству (6):

$$m(r_n, \vec{\lambda}, \vec{G}_1) \geqslant m(r_n, \vec{b}, \vec{G}) + \{1 - \alpha_0 + o(1)\} T(r_n, \vec{G}) - T(r_n, \vec{G}) + \\ + O(1) \geqslant \{\delta(\vec{b}) + o(1)\} T(r_n, \vec{G}) - \{\alpha_0 + o(1)\} T(r_n, \vec{G}) = \{\varepsilon + o(1)\} \times \\ \times T(r_n, \vec{G}) \geqslant \{\varepsilon + o(1)\} T(r_n, \vec{G}_1), \quad n \to \infty. \tag{6'}$$

Так как $K \subset M$ и M — допустимая в B система векторов, то, очевидно, Λ —допустимая система векторов в $\mathbb{C}^q$. Тогда, если через Q обозначить любое конечное подмножество из Λ, то для целой кривой $\vec{G}_1$ должно выполняться неравенство (7). С другой стороны, для произвольного вектора $\vec{\lambda} \in \Lambda$ выполняется (6′). Проведя такие же рассуждения, как и в конце доказательства леммы 2, получим противоречие с (7), которое доказывает теорему.

5. Теоремы 1 и 3 справедливы также для аналитических в круге кривых $\vec{h}$ любого конечного порядка таких, что $-\ln(1-r) = o\{T(r, \vec{h})\}$, $r \to 1$. Доказательства аналогичны приведенным выше.

6. Доказательство теоремы 2 следует из предложения.

Предложение. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — множество типа F_σ и емкости нуль. Существует целая трехмерная кривая $\vec{G}_U$ такая, что*

$$B = \{\vec{b} = (-\bar{a}, 1, 0) : a \in U\} \subset E_N(\vec{G}_U), \tag{9}$$

в то время как

$$L = \{\vec{a} = (a_1, a_2, 0) : a_1 \in \mathbb{C},\ a_2 \in \mathbb{C}\} \not\subset E_N(\vec{G}_U). \tag{10}$$

Чтобы доказать теорему 2, выберем множество U несчетным (как известно [4, гл. V, § 6], существуют несчетные замкнутые множества емкости нуль) и рассмотрим соответствующую кривую $\vec{G}_U$. Если бы утверждение теоремы 1 было для $\vec{G}_U$ верным, то мы имели бы $E_N(\vec{G}_U) \cup \{\vec{0}\} = \bigcup\limits_j A_j$, где $\{A_j\}$ — не более чем счетное семейство подпространств в $\mathbb{C}^3$ и $\dim A_j \leqslant 2$. Легко видеть, что если $A_j \neq L$, то A_j может пересекать множество B не более чем в одной точке. Поскольку множество B несчетно, то хотя бы одно из множеств A_j должно совпадать с L. Отсюда в силу (10) следует $E_N(\vec{G}_U) \cup \{\vec{0}\} \neq \bigcup\limits_j A_j$.

Доказательство предложения. Не уменьшая общности, можно считать, что $0 \in U$. Множество U можно представить в виде $U = \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, где $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ — компактные множества нулевой емкости, для которых 0 является изолированной точкой. В [5] показано, что для произвольных положительных функций $v_1(r)$ и $v_2(r)$, $r \in [0, +\infty[$, возрастающих к ∞ при $r \to \infty$, произвольной последовательности компактных множеств $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ нулевой емкости, для которых 0 — изолированная точка, существуют такая целая функция $f(z)$ и такая последовательность положительных чисел $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, возрастающая к ∞, что выполняется следующее

$$T(r_n, f) \geqslant v_2(r_n), \tag{11}$$

$$N(r_n, a, f) \leqslant v_1(r_n) \ln r_n, \quad a \in U_n. \tag{12}$$

Заметим, что, как известно, существует $a_0 \in \mathbb{C}$ такое, что

$$N(r, a_0, f) = \{1 + o(1)\} T(r, f), \quad r \to \infty. \tag{13}$$

В противном случае любое $a_0 \in \mathbb{C}$ было бы валироновским дефектным значением функции f, что невозможно, так как множество этих значений имеет нулевую емкость.

В дальнейшем будем брать $v_1(r) = \ln r$, $v_2(r) = r^2$. Рассмотрим на $[r_1, +\infty[$ функцию $v(r) = (\ln r_n + \ln r_{n-1}) \ln r - \ln r_n \ln r_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $r_{n-1} \leqslant r < r_n$. Очевидно, $v(r)$ — возрастающая, выпуклая от $\ln r$ функция и $v(r_n) = \ln^2 r_n$. Учитывая (12) с $v_1(r) = \ln r$ и то, что функция $N(r, a, f)$ выпуклая от $\ln r$, видим, что при $a \in U_n$, $r \geqslant r_n$ выполняется

$$N(r, a, f) \leqslant v(r). \tag{14}$$

Так как $v(r)$ — возрастающая, выпуклая от $\ln r$ функция, то, как доказано в [6], существует целая функция $g(z)$ такая, что

$$T(r, g) \sim 2v(r), \quad r \to \infty. \tag{15}$$

Поскольку

$$T(r_n, g) = \{2 + o(1)\} v(r_n) = \{2 + o(1)\} \ln^2 r_n = o\{r_n^2\} = o\{T(r_n, f)\}, \ n \to \infty, \tag{16}$$

то функции $h(z) \equiv 1$, $f(z)$, $g(z)$ линейно независимы.

Покажем, что целая кривая $\vec{G}_U(z) = (1, f(z), g(z))$ удовлетворяет нужным требованиям.

Пусть $a \in U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Это значит, что существует $k = k(a)$ такое, что $a \in U_k$. Учитывая (14) и (15), имеем

$$N(r, a, f) \leqslant v(r) = \{1/2 + o(1)\} T(r, g) \leqslant \{1/2 + o(1)\} T(r, \vec{G}_U), \quad r \to \infty. \tag{17}$$

С другой стороны, для $\vec{b} = (-\bar{a}, 1, 0)$ выполнялось следующее:

$$m(r, \vec{b}, \vec{G}_U) = T(r, \vec{G}_U) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi}) - a| \, d\varphi + O(1) =$$

$$= T(r, \vec{G}_U) - N(r, a, f) + O(1), \ r \to \infty.$$

Тогда на основании (17) получим $\delta(\vec{b}, \vec{G}_U) \geqslant 1/2$. Таким образом, (9) доказано.

Чтобы проверить (10), рассмотрим вектор $\vec{b}_0 = (-\bar{a}_0, 1, 0)$. Из (16) следует, что

$$T(r_n, \vec{G}_U) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln \{1 + |f(r_n e^{i\varphi})| + |g(r_n e^{i\varphi})|\} \, d\varphi + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \{\ln^+ |f(r_n e^{i\varphi})| + \ln^+ |g(r_n e^{i\varphi})|\} \, d\varphi + O(1) = T(r_n, f) + T(r_n, g) +$$

$$+ O(1) = \{1 + o(1)\} T(r_n, f), \quad n \to \infty.$$

Тогда в силу (13) имеем

$$m(r_n, \vec{b}_0, \vec{G}_U) = T(r_n, \vec{G}_U) - N(r_n, a_0, f) \leqslant \{1 + o(1)\} T(r_n, f) -$$

$$- N(r_n, a_0, f) = o\{T(r_n, f)\}, \quad n \to \infty.$$

Так как $T(r, f) \leqslant T(r, \vec{G}_U) + O(1)$, $r \to \infty$, то отсюда получаем $\vec{\delta}(b_0, \vec{G}_U) = 0$. Тем самым предложение доказано.

1. *Гольдберг А. А.* Некоторые вопросы теории распределения значений мероморфных функций : Дополнение к кн. : Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М. : Физматгиз, 1960.— 319 с.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.
3. *Савчук Я. И.* О множестве дефектных векторов целых кривых.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 3, с. 385—389.
4. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции.— М. : ОГИЗ, 1941.— 388 с.
5. *Hayman W. K.* On the Valiron deficienies of integral functions of infinite order.— **Ark. mat.**, 1972, **10**, N 2, p. 163—172.
6. *Clunie J.* On integral functions having prescribed asymptotic growth.— **Can. J. Math.**, 1965, **17**, N 3, p. 396—404.

Харьк. ун-т

Получено 14.03.84