УДК 517.948

С. В. Переверзев

О скорости сходимости методов типа метода Ю. Д. Соколова для интегральных уравнений с дифференцируемыми ядрами

1. Постановка задачи. Пусть X — линейное нормированное пространство, $\Phi \subset X$, а $\mathscr{H}$ — некоторое множество линейных непрерывных операторов H, действующих из X в X и таких, что уравнение

$$z = Hz + f \tag{1}$$

однозначно разрешимо при любых $H \in \mathscr{H}$, $f \in \Phi$. Класс таких уравнений будем обозначать $[\mathscr{H}, \Phi]$.

Следуя С. Л. Соболеву, прямыми методами решения уравнения (1) будем называть методы, при которых нахождение приближенного решения (1) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Иными словами, тот или иной прямой метод решения (1) есть правило P, по которому оператору $H \in \mathscr{H}$ сопоставляются подпространство $F_N \subset X$, $\dim F_N = N$, и действующий из X в F_N оператор H_N такие, что уравнение

$$z_P = H_N z_P + f \tag{2}$$

однозначно разрешимо, и z_P берется в качестве приближенного решения (1). При фиксированном $F_N \subset X$ множество всех таких прямых методов P будем обозначать $\mathcal{P}_{F_N}$.

В 1952 г. Ю. Д. Соколов предложил метод приближенного решения, получивший название метода осреднения функциональных поправок. В дальнейшем появились работы (см. монографии [1, 2] и библиографию к ним), в которых исследовались методы, являющиеся обобщениями, в том или ином смысле, метода Ю. Д. Соколова. Применительно к уравнению (1) суть этих методов, которые будем называть методами типа метода Ю. Д. Соколова, состоит в следующем. Пусть z_{k-1} — некоторое приближение ($(k-1)$-я итерация) к решению (1). Тогда решение этого уравнения можно представить в виде $z = f + H(z_{k-1} + \Delta_{k-1})$, где $\Delta_{k-1} = z - z_{k-1}$ — решение уравнения

$$\Delta_{k-1} = H\Delta_{k-1} + f - z_{k-1} + Hz_{k-1}. \tag{3}$$

Методы типа метода Ю. Д Соколова состоят в отыскании с помощью того или иного прямого метода $P \in \mathcal{P}_{F_N}$ приближенного решения $\delta_{k-1,N}$ уравнения (3) и в нахождении следующей итерации $z_k = z_k(P)$ по формуле

$$z_k = f + H(z_{k-1} + \delta_{k-1,N}), \tag{4}$$

где $\delta_{k-1,N}$ определяется из уравнения

$$\delta_{k-1,N} = H_N\delta_{k-1,N} + f - z_{k-1} + Hz_{k-1}, \tag{5}$$

а H_N — конечномерный оператор из X в F_N, сопоставляемый оператору H при прямом методе $P \in \mathcal{P}_{F_N}$.

Отметим, что если $\delta_{k-1,N}$ — приближенное решение (3), полученное проекционным методом, то итерационный процесс (4) представляет собой ту или иную (в зависимости от подпространства F_N, на которое осуществляется проектирование) разновидность проекционно-итеративного метода [1, с. 10].

Пусть $\Delta_k(P) = z - z_k(P)$ — погрешность k-й итерации метода (4), (5). Из (3)—(5) находим

$$\Delta_k(P) = \Delta_k = H(E - H_N)^{-1}(H - H_N)\Delta_{k-1} = [H(E - H_N)^{-1}(H - H_N)]^k \Delta_0. \tag{6}$$

Здесь E — единичный оператор. Для определенности в дальнейшем будем рассматривать ситуацию, когда в качестве нулевого приближения к решению (1) берется свободный член f и $\Delta_0 = Hz$. Как и в [3] положим

$$q_N([\mathscr{H}, \Phi], X) = \inf_{F_N \subset X} \inf_{P \in \mathscr{P}_{F_N}} \underline{\lim}_{k\to\infty} (\sup_{[\mathscr{H},\Phi]} \| \Delta_k(P) \|_X)^{1/k},$$

$$Q_N[(\mathscr{H}, \Phi], X) = \inf_{F_N \subset X} \inf_{P \in \mathscr{P}_{F_N}} \overline{\lim}_{k\to\infty} (\sup_{[\mathscr{H},\Phi]} \| \Delta_k(P) \|_X)^{1/k},$$

где точная верхняя грань берется по всем уравнениям класса $[\mathscr{H}, \Phi]$. Если имеет место соотношение

$$q_N([\mathscr{H}, \Phi], X) \asymp Q_N([\mathscr{H}, \Phi], X) \asymp \varepsilon(N),$$

то это означает, что для любого подпространства $F_N \subset X$, $\dim F_N \leqslant N$, и метода $P \in \mathscr{P}_{F_N}$ процесс (4), (5) на классе $[\mathscr{H}, \Phi]$ в пространстве X сходится не быстрее геометрической прогрессии, знаменатель которой слабо эквивалентен $\varepsilon(N)$, но в то же время, для класса $[\mathscr{H}, \Phi]$ в X существует подпространство F_N^* и метод $P^* \in \mathscr{P}_{F_N^*}$, для которых процесс (4), (5) сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q(P^*) \asymp \varepsilon(N)$. Такое подпространство F_N^* и метод P^* будем называть оптимальными по порядку для класса $[\mathscr{H}, \Phi]$ в пространстве X в смысле величин q_N, Q_N.

Определим классы уравнений, ограничившись рассмотрением периодического случая. Дело в том, что условия периодичности естественны для рассматриваемых классов, поскольку уравнения из этих классов часто возникают при решении краевых задач в замкнутых областях (см., например, [4]).

Пусть L_2 — пространство суммируемых в квадрате на $(0, 2\pi)$ 2π-периодических функций $f(x)$ с нормой $\|f\| = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$, а L_2^ν — пространство 2π-периодических функций f, у которых $f^{(\nu-1)}$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$, $f^{(\nu)} \in L_2$.

Обозначим через $\mathscr{H}^r(\alpha, \beta)$ класс операторов Фредгольма вида

$$Hz(x) = \int_0^{2\pi} h(x, y) z(y) dy, \tag{7}$$

для которых

$$\|(E - H)^{-1}\|_{L_2^r}^{L_2} \leqslant \beta_1, \quad \|H\|_{L_2^r}^{L_2} \leqslant \beta_2, \quad \beta = \{\beta_1, \beta_2\}, \tag{8}$$

а ядро $h(x, y)$ есть 2π-периодическая по каждой переменной функция такая, что для любой функции $z \in L_2$

$$\left\| d^{r-i}/dx^{r-i} \int_0^{2\pi} \partial^i h(x, y)/\partial y^i z(y) dy \right\| \leqslant \alpha_i \|z\|, \quad i = \overline{0, r}, \quad \alpha = \{\alpha_i\}. \tag{9}$$

Будем рассматривать следующий класс уравнений вида (1):

$$\Psi^r = \Psi^r(\alpha, \beta, \gamma) = [\mathscr{H}^r(\alpha, \beta), L_{2,\gamma}],$$

где $L_{2,\gamma}$ — шар радиуса γ в L_2 $(\gamma \geqslant 1)$.

В настоящей работе для класса Ψ^r в L_2 укажем подпространство F_N и метод $P \in \mathscr{P}_{F_N}$, являющиеся оптимальными по порядку в смысле величин q_N, Q_N.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $\mathscr{T}_{2n-1}$ — пространство тригонометрических полиномов порядка $n - 1$. Как обычно, через $S_n f$ будем обозначать частную сумму ряда Фурье функции f порядка

$n-1$. Кроме того, будем рассматривать операторы $S_{n,x}$, $S_{n,y}$, определяемые соотношениями

$$S_{n,x}h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-n+1}^{n-1} e^{imx} \int_{-\pi}^{\pi} h(t, y) e^{-imt} dt,$$

$$S_{n,y}h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-n+1}^{n-1} e^{imy} \int_{-\pi}^{\pi} h(x, t) e^{-imt} dt.$$

Обозначим через P_n прямой метод из $\mathcal{P}_{\mathcal{T}_{2n-1}}$, ставящий в соответствие каждому оператору H вида (7) конечномерный оператор $\widetilde{H}_{2n-1}f(x) = S_n Hf(x)$. Отметим, что метод P_n ранее рассмотрен в [5].

В дальнейшем нам потребуется следующая оценка приближения функции $f \in L_2^{\nu}$ частной суммой порядка $n-1$ ее ряда Фурье (см., например, [6, с. 125]):

$$\| f - S_n f \| \leqslant n^{-\nu} \| f^{(\nu)} \|. \tag{10}$$

Лемма. *Если* $H \in \mathcal{H}^r(\alpha, \beta)$, $r \geqslant 1$ *и* $\widetilde{H}_{2n-1}f(x) = S_n Hf(x)$, *то*

$$\| H (H - \widetilde{H}_{2n-1}) \|_{L_2}^{L_2} \leqslant \alpha_0 \alpha_r n^{-2r}.$$

Доказательство. Для любой функции $f \in L_2$ в силу (9) и (10)

$$\| Hf - S_n Hf \| \leqslant n^{-r} \| d^r/dx^r Hf \| \leqslant \alpha_0 n^{-r} \| f \|. \tag{11}$$

Теперь заметим, что функция $\varphi(x) = (H - \widetilde{H}_{2n-1}) f(x)$ ортогональна тригонометрическим многочленам степени не выше $n-1$. Учитывая этот факт, находим

$$\| H (H - \widetilde{H}_{2n-1}) f \| = \| H\varphi \| = \left\| \int_0^{2\pi} [h(x, y) - S_{n,y}h(x, y)] \varphi(y) dy \right\| =$$

$$= \left\| \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \partial^r h(x, t)/\partial t^r \left(\sum_{k=n}^{\infty} \int_0^{2\pi} k^{-r} \cos[k(y-t) - \pi r/2] \varphi(y) dy \right) dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_r \left\| \pi^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} k^{-r} \int_0^{2\pi} \cos[k(t-y) - \pi r/2] \varphi(y) dy \right\| = \alpha_r \| F - S_n F \|, \tag{12}$$

где $F(t)$ — r-й 2π-периодический интеграл от функции $\varphi(t)$. Утверждение леммы следует теперь из (10)—(12).

Замечание 1. Из соотношения (11) и теоремы об обратимости линейного оператора, близкого к обратимому [7, с. 212], следует, что для $H \in \mathcal{H}^r(\alpha, \beta)$ оператор $E - \widetilde{H}_{2n-1}$ будет иметь ограниченный обратный при выполнении условия

$$\| H - \widetilde{H}_{2n-1} \|_{L_2}^{L_2} \leqslant \alpha_0 n^{-r} < \beta_1^{-1} \leqslant (\| (E - H)^{-1} \|_{L_2}^{L_2})^{-1},$$

из которого находим, что $(E - \widetilde{H}_{2n-1})^{-1}$ ограничен при $n > \sqrt[r]{\alpha_0 \beta_1}$. Кроме того,

$$\| (E - \widetilde{H}_{2n-1})^{-1} \|_{L_2}^{L_2} \leqslant \beta_1/(1 - \alpha_0 \beta_1 n^{-r}) = \beta_n. \tag{13}$$

Теорема 1. *При* $n > (\alpha_0 \beta_1)^{1/r}$ *для любого уравнения класса* $\Psi^r(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\| \Delta_h (P_n) \| \leqslant n^{-2rk} \beta_1 \beta_2 \gamma [\alpha_0 \alpha_r \beta_1/(1 - \alpha_0 \beta_1 n^{-r})]^k.$$

Доказательство. Воспользовавшись представлением (6), запишем

$$\Delta_k(P_n) = \Delta_k = H(E-H)^{-1}(H-\widetilde{H}_{2n-1})\Delta_{k-1} +$$
$$+ H(E-H)^{-1}(\widetilde{H}_{2n-1}-H)(E-\widetilde{H}_{2n-1})^{-1}(H-\widetilde{H}_{2n-1})\Delta_{k-1}. \qquad (14)$$

Оценим норму каждого слагаемого в (14). Из леммы следует

$$\| H(E-H)^{-1}(H-\widetilde{H}_{2n-1})\Delta_{k-1}\| = \|(E-H)^{-1}H(H-\widetilde{H}_{2n-1})\Delta_{k-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant \beta_1\alpha_0\alpha_r n^{-2r}\|\Delta_{k-1}\|. \qquad (15)$$

Для оценки второго слагаемого напомним, что при $n > (\alpha_0\beta_1)^{1/r}$ выполняется соотношение (13). Но тогда из леммы и (11) имеем

$$\| H(E-H)^{-1}(\widetilde{H}_{2n-1}-H)(E-\widetilde{H}_{2n-1})^{-1}(H-\widetilde{H}_{2n-1})\Delta_{k-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_0^2\alpha_r\beta_1\beta_n n^{-3r}\|\Delta_{k-1}\|. \qquad (16)$$

Объединяя (15), (16) и учитывая, что $\|\Delta_0\| = \|Hz\| \leqslant \beta_2\beta_1\gamma$, находим

$$\|\Delta_k(P_n)\| \leqslant n^{-2r}\alpha_0\alpha_r\beta_1(1-\alpha_0\beta_1 n^{-r})^{-1}\|\Delta_{k-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant n^{-2rk}\beta_1\beta_2\gamma[\alpha_0\alpha_r\beta_1/(1-\alpha_0\beta_1 n^{-r})]^k.$$

Теорема доказана.

3. Основной результат. Теорема 2. *При* $r = 1, 2, \ldots$

$$q_N(\Psi^r, L_2) \asymp Q_N(\Psi^r, L_2) \asymp N^{-2r}.$$

Оптимальными по порядку в смысле величин q_N, Q_N *для класса* Ψ^r *в* L_2 *являются подпространство* $\mathcal{T}_{2n-1}$, $n = [(N+1)/2]$ ($[\nu]$ — *целая часть числа* ν) *тригонометрических полиномов порядка* $n-1$ *и прямой метод* $P_n \in \mathcal{P}_{\mathcal{T}_{2n-1}}$, *ставящий в соответствие каждому оператору* H *вида* (7) *конечномерный оператор* $\widetilde{H}_{2n-1}f(x) = S_nHf(x)$.

Доказательство. Необходимая оценка сверху для величины Q_N следует из теоремы 1. Получим оценку снизу для q_N.

Пусть $M_{n,r}$ — множество всех 2π-периодических идеальных сплайнов порядка r с $2n$ узлами, т. е. множество всех функций f из L_2^r, у которых $f^{(r)}$ имеет не более $2n$ перемен знака на периоде и $|f^{(r)}(x)| = 1$ почти всюду на $[0, 2\pi]$. Известно (см., например, [8, с. 253]), что

$$\inf_{f\in M_{n,r}} \|f\| \geqslant cn^{-r}, \qquad (17)$$

где c — некоторая абсолютная постоянная. Зафиксируем произвольное N-мерное подпространство $F_N \subset L_2$ с базисом $l_1(x)$, $l_2(x), \ldots, l_N(x)$. Из [8, с. 48] следует существование такого сплайна $\varphi \in M_{n,r}$, $n = [N/2]+1$, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\, l_i(x)\, dx = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \qquad (18)$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$z = H_0 z + f_0 = \int_0^{2\pi} h_0(x, y)\, z(y)\, dy + f_0(x), \qquad (19)$$

где $h_0(x, y) = \lambda n^{-r}\|\varphi\|^{-2}\varphi(x)\varphi(y)$, $f_0(x) = \|\varphi\|^{-1}(1-\lambda n^{-r})\varphi(x)$, а параметр $\lambda > 0$ будет выбран в дальнейшем. Легко видеть, что решением (19) является $z(x) = \|\varphi\|^{-1}\varphi(x)$ и

$$\|\Delta_0\| = \|H_0 z\| = \lambda n^{-r}. \qquad (20)$$

Кроме того,

$$H_0^m f = (\lambda n^{-r})^{m-1} H_0 f. \tag{21}$$

Заметим теперь, что для любой $f \in L_2$ в силу неравенства Харди—Литлвуда для производных, определения множества $M_{n,r}$ и (17) имеем

$$\left\| d^{r-i}/dx^{r-i} \int_0^{2\pi} \partial^i h_0(x, y)/\partial y^i f(y)\, dy \right\| \leqslant \lambda n^{-r} \|\varphi\|^{-2} \|\varphi^{(r-i)}\| \|\varphi^{(i)}\| \|f\| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2\pi} \lambda n^{-r} \|\varphi\|^{-1} \|f\| \leqslant \sqrt{2\pi} \lambda c^{-1} \|f\|.$$

Таким образом, параметр λ можно выбрать так, чтобы уравнение (19) принадлежало классу $\Psi^r(\alpha, \beta, \gamma)$, и такой выбор λ определяется только значениями α, β, γ, c.

Рассмотрим произвольный прямой метод $P \in \mathcal{P}_{F_N}$. Соотношения (18) означают, что для любой функции $f \in F_N$ $H_0 f = 0$. Но тогда из (6), (20) и (21) находим, что для уравнения (19)

$$\|\Delta_k(P)\| = (\lambda n^{-r})^{2k} \|\Delta_0\| = (\lambda n^{-r})^{2k+1}. \tag{22}$$

Учитывая (22) и произвольность выбора F_N и $P \in \mathcal{P}_{F_N}$, окончательно заключаем, что $q_N(\Psi^r, L_2) \geqslant \lambda^2 n^{-2r}$. Теорема доказана.

Замечание 2. В работе [1] исследовалась скорость сходимости методов типа метода Д. Ю. Соколова в ситуации, когда для решения уравнения (3) на каждом шаге итерации используется проекционный прямой метод. Из [1, с. 163] следует, что в этом случае $c_1 N^{-r(k+1)} \leqslant \sup_{\Psi^r} \|\Delta_k\| \leqslant \leqslant c_2 N^{-rk}$. Интересно сравнить этот результат с теоремами 1 и 2.

1. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1980.— 263 с.
2. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1968.— 244 с.
3. *Переверзев С. В.* Об оптимизации адаптивных методов приближенного решения интегральных уравнений.— Докл. АН СССР, 1982, **267**, № 6, с. 1304—1308.
4. *090Ализняк С. Н., Мельник Ю. И., Подлипенко Ю. К.* О приближенном решении интегральных уравнений теории потенциала.— Укр. мат. журн., 1981, **33**, № 3, с. 385—391.
5. *Дзядык В. К.* О применении линейных методов к приближению полиномами функций, являющихся решениями интегральных уравнений Фредгольма второго рода.— Там же, 1970, **22**, № 4, с. 461—480.
6. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1972.— 496 с.
8. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 350 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 12.09.84