УДК 517.948.32:517.544

Л. Н. Колмакова

О сингулярном интегральном уравнении с многозначным на гиперэллиптической римановой поверхности ядром

В работах [1—4] наряду с исследованием краевых задач на конечных римановых поверхностях изучены эквивалентные им сингулярные интегральные уравнения (с. и. у.). Ядрами этих уравнений [1—3] являются рациональные алгебраические функции, однозначные на римановой поверхности и являющиеся аналогами ядра Коши.

В настоящей работе обобщается на случай гиперэллиптической римановой поверхности с. и. у. с многозначным аналогом ядра Коши [4, 5]. Дается полное исследование этого уравнения в случае сложного кусочно-гладкого контура. Решение определяется в классе гельдеровских функций. В качестве приложения рассматривается однородное с. и. у. полиномиального вида на торе. Основное получаемое утверждение — характеризация числа линейно независимых решений (л. н. р.) этого уравнения.

1. Пусть R — двулистная риманова поверхность, алгебраическое уравнение которой $u^2 = \prod_{j=1}^{N} (z - a_j)(z - b_j)$, а род $\rho = N - 1$. Пусть L — сложный кусочно-гладкий контур на R, состоящий из конечного числа гладких ориентированных (замкнутых или разомкнутых) кривых, которые могут иметь конечное число общих точек. На L задан дивизор $\Lambda = (t_1, v_1) \ldots$ $\ldots (t_r, v_r)$ — множество особенностей контура L, причем $L \setminus \Lambda = \bigcup_{j=1}^{n} L_j$, где L_j — гладкие жордановы кривые, гомеоморфные интервалу $(0, 1)$ числовой оси. Каждая кривая L_j имеет начальную и концевую точки, которые содержатся среди точек дивизора Λ и могут, в частности, совпадать. Задан дивизор $J = (t_1, v_1)^{h_1} \ldots (t_{r^*}, v_{r^*})^{h_{r^*}}$ порядка h, составленный из точек дивизора Λ, взятых с произвольными целыми кратностями. На $R \setminus L$ задан дивизор $F = (\tilde{z}_1, \tilde{s}_1)^{\alpha_1} \ldots (\tilde{z}_\nu, \tilde{s}_\nu)^{\alpha_\nu}$ порядка d и дивизор $D = (\infty, \pm\infty)^m$, $m \geqslant 0$, порядка $2m$, исчерпывающий все бесконечно удаленные точки поверхности R.

Введем функции $\alpha((t, v), L_j) = \delta_{kj}$ при $(t, v) \in L_k$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, где δ_{kj} — символ Кронекера. На каждой кривой L_j заданы H-непрерывные функции $G_j(t, v)$, $a_j(t, v)$, $b_j(t, v)$, конечные и не обращающиеся в нуль, H-непрерывно продолжимые на начальную и концевую точки кривой L_j, причем предельные значения предполагаются конечными, отличными от нуля и не обязательно различными. Обозначим

$$G(t, v) = \sum_{j=1}^{n} \alpha((t, v), L_j)\, G_j(t, v), \quad (t, v) \in L \setminus \Lambda,$$

$$a(t, v) = \sum_{j=1}^{n} \alpha((t, v), L_j)\, a_j(t, v), \quad (t, v) \in L \setminus \Lambda,$$

$$b(t, v) = \sum_{j=1}^{n} \alpha((t, v), L_j)\, b_j(t, v), \quad (t, v) \in L \setminus \Lambda$$

и потребуем $a^2(t, v) - b^2(t, v) \neq 0$ на L.

На поверхности R рассмотрим следующее с. и. у.:

$$a(t,v)\,\delta(t,v)+b(t,v)(\pi i)^{-1}\int_L \delta(\tau,s)\,d\omega=y(t,v),\quad J^{-1}D^{-1}F^{-1}/(\delta),\quad (t,v)\in L. \tag{1}$$

Здесь $d\omega\equiv d\omega\,(t,v;\ z_0,\ u_0;\ \tau,\ s)$ — разрывный аналог ядра типа Коши на R, где $(z_0,\ u_0)$ — произвольная точка на R [5]. В основу построения ядра $d\omega$ положено выражение $(u+v)\,dt/(2v\,(t-z))$, $y\,(t,\ v)\in H$ — заданная на L функция.

2. Следуя методу, изложенному в [6, 7], введем в рассмотрение кусочно-аналитическую функцию

$$\Delta\,(z,u)=(2\pi i)^{-1}\int_L \delta\,(\tau,s)\,d\omega. \tag{2}$$

Интеграл типа Коши (2) представляет функцию, разрывную вдоль кривых контура L, канонических сечений $A_1,\ \ldots,\ A_\rho$, аналитическую на остальной части поверхности R. Во внутренних точках контура L предельные значения функции (2) связаны формулами Сохоцкого [5], на основании которых с. и. у. (1) сводится к следующей задаче Римана: найти все функции $\Delta\,(z,\,u)$, мероморфные на $R\diagdown L$, кратные там дивизору $D^{-1}F^{-1}$, H-непрерывно продолжимые на $L\diagdown\Lambda$, где должно выполняться краевое условие

$$\Delta^+(t,v)=(a(t,v)-b(t,v))/(a(t,v)+b(t,v))\,\Delta^-(t,v)+y(t,v)/(a(t,v)+\\+b(t,v)),\quad J^{-1}D^{-1}F^{-1}/(\Delta),\quad (t,v)\in L. \tag{3}$$

В окрестности точек дивизора Λ поведение искомых функций определяется требованием: функции $\Delta\,(z,\,u)$ должны быть кратными дивизору J^{-1}. Кроме того, мероморфные решения задачи (3) должны обладать еще некоторыми свойствами. Для точек $(t,\ v)$ линий $A_1,\ \ldots,\ A_\rho$ предельные значения функций (2) связаны формулами

$$\Delta^+(t,v)-\Delta^-(t,v)=-\int_L \delta\,(\tau,s)\,dw_j\,(\tau,\ s),\quad j=\overline{1,\rho},\quad (t,v)\in A_j,$$

где $\{dw_j\,(\tau,\ s)\}$ — комплексно-нормированный базис абелевых дифференциалов I рода на R. При устранении разрывов функции (2) вдоль линий A_j для решения $\delta\,(t,\,v)$ с. и. у. (1) возникает система дополнительных условий

$$\int_L \delta\,(\tau,s)\,dw_j\,(\tau,s)=0,\quad j=\overline{1,\rho}. \tag{4}$$

3. Для решения однородной $(y\,(t,\ v)\equiv 0)$ задачи (3) воспользуемся методикой работ [5—8]. Функция

$$\tilde\Delta\,(z,u)=\varphi\,(z,u)\exp\Bigg\{(2\pi i)^{-1}\int_L \ln G\,(t,v)\,d\omega-\sum_{k=1}^{\rho}\int_{(z^*,s^*)}^{(m_k,\mu_k)} d\omega-\\-\sum_{k=1}^{r}[\varkappa_k]\int_{(z^*,s^*)}^{(t_k,v_k)} d\omega-\sum_{k=1}^{r^*}h_k\int_{(z^*,s^*)}^{(t_k,v_k)} d\omega+\operatorname{sign}(\varkappa+\rho+h+d)\times\\\times\sum_{k=1}^{|\varkappa+\rho+h+d|}\int_{(z^*,s^*)}^{(z_k,s_k)} d\omega\Bigg\} \tag{5}$$

является ее общим решением. Здесь $\varphi\,(z,\ u)$ — произвольная мероморфная всюду на R функция, кратная дивизору $D^{-1}T^{-1}$,

$$T=\prod_{j=1}^{\rho}(m_j,\mu_j)^{-1}\prod_{j=1}^{|\varkappa+\rho+h+d|}(z_j,s_j)^{\operatorname{sign}(\varkappa+\rho+h+d)}, \tag{6}$$

$\varkappa = \sum_{k=1}^{r} [\varkappa_k]$ — индекс $G(t, v) = (a(t, v) - b(t, v))/(a(t, v) + b(t, v))$, $(z^*, s^*) \neq \neq (z_0, s_0)$, (z_k, s_k) — произвольные точки поверхности R, $(m_1, \mu_1), \ldots, (m_\rho, \mu_\rho)$ — точки на R, являющиеся решением проблемы обращения Якоби [5].

Зафиксируем структуру дивизора T, а именно, выберем его точки (z_j, s_j) следующим образом: α) $(z_1, \pm s_1), \ldots, (z_k, \pm s_k)$ при $|\varkappa + \rho + h + d| = 2k$, β) $(z_1, \pm s_1), \ldots, (z_{k-1}, \pm s_{k-1}) (z_k, + s_k)$ при $|\varkappa + \rho + h + d| = 2k - 1$.

Пусть решение проблемы обращения Якоби содержит s сопряженных пар $(m_k, \pm\mu_k)$, $k = \overline{1, s}$ (s означает минимальный из наименьших порядков нетривиальной частной производной соответствующей Θ-функции по абелевым интегралам I рода).

Из условий, обеспечивающих кратность функции $\varphi(z, u)$ дивизору $D^{-1}T^{-1}$, находим число $\tilde{l}$ л. н. р. однородной задачи (3): для случая α)

$$\tilde{l} = \sigma - \rho + 1 \text{ при } (a)\ \sigma > \rho + 2s,$$

$$\tilde{l} = (\sigma - \rho)/2 + s + 1 \text{ при } (b)\ \rho - 2s \leqslant \sigma \leqslant \rho + 2s,$$

$$\tilde{l} = 0 \text{ при } (c)\ \sigma < \rho - 2s,$$

для случая β)

$$\tilde{l} = \sigma - \rho + 1 \text{ при } (a)\ \sigma > \rho + 2s - 1,$$

$$\tilde{l} = (\sigma - \rho + 1)/2 + s \text{ при } (b)\ \rho - 2s - 1 < \sigma \leqslant \rho + 2s - 1,$$

$$\tilde{l} = 0 \text{ при } (c)\ \sigma \leqslant \rho - 2s - 1,$$

где $\sigma = \varkappa + 2m + h + d$.

4. Определим задачу, союзную к однородной задаче (3), равенством

$$d\Psi^-(t, v) = G(t, v)\, d\Psi^+(t, v), \quad JDF/(d\Psi), \quad (t, v) \in L. \tag{7}$$

Методом, аналогичным предыдущему, можно построить ее общее решение $d\Psi(z, u) = d\psi(z, u) \exp\{\ldots.\}$. Произвольный абелев дифференциал $d\psi(z, u)$ $(DT/(d\psi))$ ищется в виде $(P(z) + Q(z)u)\, dz/(R(z)u)$, P, Q, R — многочлены от z, степени и коэффициенты которых находятся из условий, обеспечивающих кратность дивизору DT.

Числа $\tilde{l}$ и l' (l' — число л. н. р. задачи (7)) связаны соотношением

$$\tilde{l} - l' = \sigma - \rho + 1. \tag{8}$$

Справедливость соотношения (8) непосредственно следует из теоремы Римана—Роха.

Для разрешимости неоднородной задачи (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\int_L y(t, v)\, d\Psi^+(t, v)/(a(t, v) + b(t, v)) = 0 \tag{9}$$

для всех решений $d\Psi(z, u)$. При выполнении условий (a) неоднородная задача (3) разрешима безусловно ($d\Psi(z, u) \equiv 0$). Из условий (b) и (c) вытекают l' условий разрешимости (9).

Частное решение неоднородной задачи (3) в зависимости от рассматриваемого случая будет представлено известными аналитическими выражениями из [5].

Общее решение уравнения (1) (в случае безусловной разрешимости задачи (3)) зависит линейно от $\tilde{l} - \xi$ произвольных постоянных, где ξ — ранг линейной однородной системы уравнений, полученной при выполнении дополнительных условий (4), $0 \leqslant \xi \leqslant \min\{\rho, l\}$.

5. На основе данного решения уравнения (1) рассмотрим на торе ($\rho = 1$) однородное с. и. у.

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \Pi^j \delta(t, v) = 0, \qquad D^{-1}F^{-1}/(\delta), \quad (t, v) \in L, \tag{10}$$

где $\Pi\delta(t, v) = (\pi i)^{-1} \int\limits_L \delta(\tau, s)\, d\omega$ — аналог оператора сингулярного интегрирования вдоль контура L, c_j — постоянные ($c_n \equiv 1$).

Уравнение (10) сведем к равносильной системе с. и. у.

$$(\Pi - \lambda_i I)\,\delta_i(t, v) = \delta_{i-1}(t, v), \quad i = \overline{1, n}, \ (t, v) \in L. \tag{11}$$

Здесь λ_i — корни алгебраического уравнения $\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + c_0 \equiv 0$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $\lambda_i^2 \neq 1$) $\delta_0 \equiv 0$, $\delta_n \equiv \delta$, I — тождественный оператор.

При решении системы (11) используются обозначения; $\varkappa^{(i)} = \sum\limits_{k=1}^{r} [\varkappa_k^{(i)}]$ — индекс коэффициента G_i i-го с. и. у. системы (11), $\sigma_i = \varkappa^{(i)} + 2m + d$, $\tilde{l}_i$ — число л. н. р. i-й однородной задачи Римана, эквивалентной i-му с. и. у., ξ_i — ранг линейной однородной системы уравнений, полученной при выполнении условий разрешимости i-й неоднородной задачи Римана (решение строится в классе функций, ограниченных в точках дивизора Λ, $h \equiv 0$). Число l_i — л. н. р. i-го с. и. у. системы (11) определяется следующим образом:

$$l_i = \begin{cases} l_{i-1} + \tilde{l}_i - 1 & \text{при } \sigma_i \geqslant 0, \\ l_{i-1} - \xi_i - 1 & \text{при } \sigma_i < 0, \end{cases} \quad (l_0 = 0, \quad l_n = l). \tag{12}$$

Рассматривая последовательно систему (11), $i = \overline{1, n}$, приходим к решению искомого с. и. у. (10). Число $l \geqslant 0$ л. н. р. определяется по формуле (12). В частности, при $\sigma_i \geqslant 0$ для любого i, упорядочивая корни λ_i, $i = \overline{1, n}$, таким образом, что $G_1, \ldots, G_j$ — вещественные положительные числа ($\varkappa^{(1)} = \ldots = \varkappa^{(j)} = 0$), $G_{j+1}, \ldots, G_n$ — отрицательные либо комплексные числа ($\varkappa^{(j+1)} = \ldots = \varkappa^{(n)} = -p$, p — число разомкнутых кривых контура L), число l определяем по формуле $l = n(2m + d - p - 1) + jp$.

1. *Koppelman W.* Singular integral equations, boundary value problem and Rieman — Poeh theorem.— J. Math. and Mech., 1961, **10**, N 2, p. 247—277.
2. *Родин Ю. Л.* Об условиях разрешимости краевых задач Римана и Гильберта на римановых поверхностях.— Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 6, с. 1234—1237.
3. *Круглов В. Е.* Об одном сингулярном интегральном уравнении на римановой поверхности алгебраической функции.— Дифференц. уравнения, 1977, **13**, № 3, с. 564—566.
4. *Мерлин А. В.* О сингулярном интегральном уравнении с многозначным на римановой поверхности ядром.— Тр. семинара по краевым задачам, 1969, № 6, с. 167—178.
5. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях.— Успехи мат. наук, 1971, **26**, № 1/157, с. 113—179.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М. : Наука, 1977.— 640 с.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М. : Наука, 1968.— 511 с.
8. *Круглов В. Е.* О структуре частных индексов задачи Римана с матрицей подстановочного типа.— Мат. заметки, 1984, **35**, № 2, с. 169—176.
9. *Дмитриева И. Ю., Круглов В. Е.* О частных индексах одной матричной задачи Римана на торе.— Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 2, с. 247—252.

Одес. ун-т Получено 18.09.84