УДК 519.21

А. И. Черняк

Предельные теоремы для схем суммирования на стационарной последовательности в схеме серий

Данная работа обобщает результаты работы [1] на схему серий.

Пусть $x_n(k)$, $k \geqslant 0$,— стационарная в узком смысле последовательность случайных величин со значениями в метрическом пространстве (X, B_X, ρ), удовлетворяющая условию равномерно сильного перемешивания (р. с. п) с функцией перемешивания $\varphi_n(k)$, $k \geqslant 0$: $\varphi_n(0) = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \varphi_n(k) = 0$. $F_n(k) = \{\xi_n(k, x), x \in X\}$, $k \geqslant 1$, — независимые от $x_n(\cdot)$ и в совокупности семейства случайных величин, распределение которых не зависит от индекса k и $\forall k$ $\xi_n(k, x) = \xi_n(k, x, \omega)$ — $B_X \times B_\Omega$-измеримая функция, $x \in X$, $\omega \in \Omega$, где B_Ω — σ-алгебра измеримых множеств на Ω (т. е. $\xi_n(k, x_n(k))$ —

случайная величина). При этом

$$\hat{\varphi}_n(\lambda, x) = M \exp\{i\lambda\xi_n(k, x)\} = 1 + i\lambda m_n(x) - |\lambda|^\alpha c_n(x) + \\ + o_n(x, |\lambda|^\alpha), \quad 1 < \alpha \leqslant 2, \quad \lambda \in R, \quad x \in X, \tag{1}$$

где $m_n(x)$ и $c_n(x)$ — некоторые равномерно ограниченные относительно n на множестве X B_X-измеримые действительные функции, причем $c_n(x)$ — положительная. Как и в работе [1], исследуем поведение $\xi_n = n^{-1/\alpha} \times \times \sum_{k=1}^{n} (\xi_n(k, x_n(k)) - m_n)$, где $m_n = \int_X m_n(x)\pi_n(dx)$, $\pi_n(A) = P\{x_n(0) \in A\}$, $A \in B_X$. Тот факт, что последовательность функций $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in X$, обозначим следующим образом: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in X$.

Теорема 1. *Если при* $n \to \infty$

$$\pi_n(\cdot) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \pi(\cdot), \tag{2}$$

где $\pi(A)$, $A \in B_X$, — *некоторая вероятностная мера на* B_X,

$$m_n(x) \rightrightarrows m(x), \quad x \in X, \tag{3}$$

$$c_n(x) \rightrightarrows c(x), \quad x \in X, \tag{4}$$

$m(x)$ *и* $c(x)$ — B_X-*измеримые, почти всюду по мере* $\pi(\cdot)$ *непрерывные функции,*

$$\lim_{\lambda\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{x\in X} |\lambda|^{-\alpha} |o_n(x, |\lambda|^\alpha)| = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k\geqslant N} \sqrt{\varphi_n(k)} = 0 \tag{6}$$

и существует конечный предел

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} M(m_n(x_n(0)) - m_n)(m_n(x_n(k)) - m_n) = h, \tag{7}$$

то 1) *при* $1 < \alpha < 2$

$$\lim_{n\to\infty} Me^{i\lambda\xi_n} = e^{-|\lambda|^\alpha c}, \quad \lambda \in R;$$

2) *при* $\alpha = 2$

$$\lim_{n\to\infty} Me^{i\lambda\xi_n} = \exp\{-\lambda^2(c + (\sigma^2 - r^2)/2)\}, \quad \lambda \in R,$$

где $c = \int_X c(x)\pi(dx)$, $\sigma^2 = \int_X (m(x) - m)^2 \pi(dx) + 2h$, $m = \int_X m(x)\pi(dx)$, $r^2 = \int_X m^2(x)\pi(dx)$.

(Символ $\overset{\text{сл}}{\Rightarrow}$ обозначает слабую сходимость функций распределений случайных величин либо конечномерных распределений случайных процессов и слабую сходимость мер.)

Доказательство. Из представления (1) следует, что равномерно относительно λ в любом конечном интервале $|\lambda| \leqslant T$ $\sup_{x\in X} |\hat{\varphi}_n(\lambda n^{-1/\alpha}, x) - 1| \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, для достаточно больших n при λ, лежащих в произвольном конечном интервале $|\lambda| \leqslant T$, выполняется неравенство $\sup_{x\in X} |\hat{\varphi}_n(\lambda n^{-1/\alpha}, x) - 1| < 1/2$, и поэтому определены $\ln \hat{\varphi}_n(\lambda n^{-1/\alpha}, x)$ (главные значения). Так как величины $\xi_n(k, x_n(k))$ на фиксированной траектории $x_n(\cdot)$ условно независимы, то имеет место представление при достаточно больших n и при $|\lambda| \leqslant T$:

$$Me^{i\lambda\xi_n} = M \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \eta_{nk}(\lambda, x_n(k))\right\},$$

где

$$\eta_{nk}(\lambda, x) = \ln M \exp\{i\lambda n^{-1/\alpha}(\xi_n(k, x) - m_n)\} = \ln(\exp\{-i\lambda m_n n^{-1/\alpha}\} \times$$
$$\times (1 + i\lambda n^{-1/\alpha} m_n(x) - c_n(x)|\lambda|^\alpha/n + o_n(x, |\lambda|^\alpha/n))) \sim i\lambda n^{-1/\alpha}(m_n(x) - m_n) -$$
$$- c_n(x)|\lambda|^\alpha/n + \lambda^2/2n^{-2/\alpha} m_n^2(x) + o_n(x, |\lambda|^\alpha/n), \quad x \in X.$$

Покажем, что при $n \to \infty$

$$n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} (m_n(x_n(k)) - m_n) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} N(0, \sigma^2), \tag{8}$$

где $N(0, \sigma^2)$ — нормальное распределение со средним 0 и дисперсией σ^2. Из условия (2) следует, согласно [2, с. 437], что $\int_X f(x)\pi_n(dx) \to \int_X f(x)\pi(dx)$ при $n \to \infty$ для любой B_X-измеримой ограниченной и почти всюду по мере $\pi(\cdot)$ непрерывной функции $f(x)$, $x \in X$. В силу (3), (4) $m(x)$ и $c(x)$ — ограниченные функции. Тогда из (2) — (4) следует, что $\lim_{n\to\infty} m_n = m$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X c_n(x)\pi_n(dx) = c, \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X m_n^2(x)\pi_n(dx) = r^2. \tag{10}$$

Обозначим $\alpha_{nk} = m_n(x_n(k)) - m_n$. Последовательность α_{nk}, $k \geqslant 0$, обладает следующими свойствами: а) $M\alpha_{nk} = 0$; б) равномерно ограничена с вероятностью единица; в) удовлетворяет условию р. с. п. с функцией перемешивания $\bar{\varphi}_n(k) \leqslant \varphi_n(k)$, $k \geqslant 0$ (см. [3, с. 437]) и выполняется (6); г) $D\left(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk}\right) \to \sigma^2$ при $n \to \infty$. Последнее свойство следует из условий (2), (3), (6), (7).

Таким образом, для сумм стационарно связанных случайных величин, удовлетворяющих условию р. с. п., справедлива центральная предельная теорема, т. е. $n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk} \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} N(0, \sigma^2)$, $n \to \infty$. Доказательство этого факта проводится аналогично доказательству теоремы 20.1 работы [4].

Используя (9), (10) и результаты работы [5], нетрудно видеть, что при $n \to \infty$

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n} c_n(x_n(k)) \xrightarrow{P} c, \quad n^{-1}\sum_{k=1}^{n} m_n^2(x_n(k)) \xrightarrow{P} r^2.$$

Из условия (5) следует, что с вероятностью единица $\sum_{k=1}^{n} o_n(x_n(k), |\lambda|^\alpha/n) \to 0$, $n \to \infty$. Если $1 < \alpha < 2$, то с вероятностью единица $n^{-2/\alpha}\sum_{k=1}^{n} m_n^2(x_n(k)) \to 0$, $n \to \infty$, и согласно (8) $n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{n}(m_n(x_n(k)) - m_n) \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$. Таким образом, при $1 < \alpha < 2$ получим утверждение 1). Если $\alpha = 2$, то $\lim_{n\to\infty} Me^{i\lambda\xi_n} = M\exp\{i\lambda\gamma - \lambda^2(c - r^2/2)\} = \exp\{-\lambda^2(c + (\sigma^2 - r^2)/2)\}$, где γ — случайная величина с нормальным распределением $N(0, \sigma^2)$ и $2c \geqslant r^2$ (следствие представления (1) и условий (2) — (4)).

Пусть теперь $x_n(k)$, $k \geqslant 0$, — однородная эргодическая цепь Маркова с фазовым пространством X, удовлетворяющая условию р. с. п. с функцией перемешивания $\varphi_n(k)$, $k \geqslant 0$, $\pi_n(\cdot)$ — стационарное распределение, $\rho_n(\cdot)$ — произвольное начальное распределение цепи.

Теорема 2. *Если выполняются условия* (1)—(7), *то*

1) *в случае* $1 < \alpha < 2$

$$\lim_{n\to\infty} M_{\rho_n} e^{i\lambda\xi_n} = e^{-|\lambda|^\alpha c}, \quad \lambda \in R;$$

2) *в случае* $\alpha = 2$

$$\lim_{n\to\infty} M_{\rho_n} e^{i\lambda\xi_n} = \exp\{-\lambda^2 (c + (\sigma^2 - r^2)/2)\}, \quad \lambda \in R,$$

где $M_{\rho_n} e^{i\lambda\xi_n} = \int\limits_X M\{e^{i\lambda\xi_n}/x_n(0) = x\}\rho_n(dx)$.

Доказательство проводится аналогично работе [1].

Замечание. 1. Аналогично теоремам 1, 2 можно доказать теоре о слабой сходимости конечномерных распределений случайного процес

$\xi_n(t) = n^{-1/\alpha} \sum\limits_{k=1}^{[nt]} (\xi_n(k, x_n(k)) - m_n)$, $t \in [0, 1]$, к конечномерным распре, лениям однородного процесса с независимыми приращениями $\xi_0(t)$, $t \in [0,$ с кумулянтой $A(\lambda)$ при $n \to \infty$, где

$$A(\lambda) = \begin{cases} -|\lambda|^\alpha c, & 1 < \alpha < 2, \\ -\lambda^2 (c + (\sigma^2 - r^2)/2), & \alpha = 2, \quad \lambda \in R. \end{cases}$$

Обозначим через $p_n(x, A)$, $x \in X$, $A \in B_X$, переходную вероятность один шаг, а $p_n^{(k)}(x, A)$, $x \in X$, $A \in B_X$, — за k шагов цепи $x_n(\cdot)$.

Замечание 2. Пусть при каждом $n = 1, 2, \ldots$ цепь Марк $x_n(k)$, $k \geqslant 0$, удовлетворяет следующим условиям: а) существует конечн мера $\mu_n(\cdot)$ на множествах $A \in B_X$, $\mu_n(X) > 0$, целое число $k_n \geqslant 1$ и пол жительное число ε такие, что для всех $x \in X \varlimsup\limits_{n\to\infty} p_n^{(k_n)}(x, A) \leqslant 1 - \varepsilon$, ес $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) \leqslant \varepsilon$; б) цепь $x_n(\cdot)$ имеет один эргодический класс и апериоди на. Тогда $x_n(\cdot)$ удовлетворяет условию р. с. п. из [6] и выполняет условие (6).

Замечание 3. Используя результаты работы [7], нетрудно видет что если:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x, A) = p(x, A)$ равномерно по $x \in X$, $A \in B_X$, где $p(x, A)$ переходная вероятность некоторой однородной цепи Маркова $x(\cdot)$, име щей стационарное распределение $\pi(\cdot)$, которой соответствует один эргод ческий класс;

б) $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in X} \sup\limits_{A\in B_X} |p^{(k)}(x, A) - \pi(A)| = 0$, то условия (2), (7) будут в полнены и

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X \int\limits_X (m(x) - m)(m(y) - m) p^{(k)}(x, dy)\pi(dx).$$

Этот ряд сходится в силу условия б).

Замечание 4. Если $x_n(k)$, $k \geqslant 0$, — эргодическая цепь Марко такая, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x,y\in X} \sup\limits_{A\in B_X} |p_n(x, A) - p_n(y, A)| < 1$, то она удовлетворя условию р. с. п. и выполняется (6).

Замечание 5. Условия слабой сходимости мер в метрическ пространстве (2) и почти всюду по мере $\pi(\cdot)$ непрерывности функц $m(x)$ и $c(x)$ можно заменить условием равномерной сходимости мер произвольном измеримом пространстве (X, B_X), т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{A\in B_X} |\pi_n(A) - \pi(A)| = 0$.

1. *Анисимов В. В., Черняк А. И.* Некоторые предельные теоремы для стационарных последовательностей и цепей Маркова.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 8, с. 60—63.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. I.— М. : Наука, 1971.— 664 с.
3. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины.— М. : Наука, 1965.— 524 с.
4. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М. : Наука, 1977.— 351 с.
5. *Анисимов В. В., Черняк А. И.* Сходимость сумм случайных величин, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 10, с. 3—5.
6. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1956.— 607 с.
7. *Анисимов В. В.* Асимптотическое укрупнение квазиэргодических марковских процессов.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 1, с. 3—6.

Киев. ун-т

Получено 13.12.83