УДК 517.9

В. П. Шпакович

Метод усреднения для многочастотных систем с запаздыванием

Рассмотрим многочастотную систему с запаздыванием вида

$$dx/dt = \varepsilon X(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta), \quad d\varphi/dt = \omega(x) + \varepsilon Y(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta), \tag{1}$$

где $x \in D \subset R^n$, $x_\Delta = x(t-\Delta) \in D \subset R^n$, $\varphi_\Delta = \varphi(t-\Delta)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, X и Y — 2π-периодические функции по φ и φ_Δ, $\Delta > 0$, D — компактная область.

Пусть при $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$ $x(t) = x_0$, $\varphi(t) = \varphi_0$ и правые части системы (1) являются гладкими функциями своих аргументов в заданных областях. Использовав разложения для $x(t-\Delta)$ и $\varphi(t-\Delta)$, $t \geqslant \Delta$:

$$\begin{gathered} x(t-\Delta) = x(t) - \varepsilon X(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta)\Delta + \varepsilon^2 \ldots, \\ \varphi(t-\Delta) = \varphi(t) - \dot\varphi(t-\theta\Delta)\Delta \end{gathered} \tag{2}$$

(θ — постоянный вектор с компонентами $0 < \theta_i < 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$), запишем систему в преобразованном виде.

В силу второго уравнения системы имеем

$$\begin{gathered} d\varphi(t-\theta\Delta)/dt = \omega(x(t-\theta\Delta)) + \varepsilon Y(x(t-\theta\Delta), x(t-\Delta-\theta\Delta), \varphi(t-\theta\Delta), \\ \varphi(t-\Delta-\theta\Delta)) = \omega(x(t)) + \omega(x(t-\theta\Delta)) - \omega(x(t)) + \varepsilon Y(x(t-\theta\Delta), \\ x(t-\Delta-\theta\Delta), \varphi(t-\theta\Delta), \varphi(t-\Delta-\theta\Delta)), \end{gathered}$$

полагая $x(t-\Delta-\theta\Delta) = x_0$ и $\varphi(t-\Delta-\theta\Delta) = \varphi_0$ при $-\Delta-\theta\Delta \leqslant t \leqslant -\Delta$ Отсюда следует $\| d\varphi(t-\theta\Delta)/dt - \omega(x(t)) \| \leqslant c_1\varepsilon$, где c_1 (и используемые ниже c_i) — положительные постоянные. Следовательно,

$$\begin{gathered} \varphi(t-\Delta) = \varphi(t) - \omega(x(t))\Delta + \varepsilon F_1(x(t-\theta\Delta), x(t-\Delta-\theta\Delta), \varphi(t-\theta\Delta), \\ \varphi(t-\Delta-\theta\Delta)), \end{gathered} \tag{3}$$

и $\| F_1 \|$ ограничена.

Из (2) и (3) следует, что исходная система представима в виде

$$\begin{gathered} dx/dt = \varepsilon X(x(t), x(t), \varphi(t), \varphi(t) - \omega(x(t))\Delta) + \varepsilon^2 X_1(x(t-\theta\Delta), x(t-\Delta-\theta\Delta), \\ \varphi(t-\theta\Delta), \varphi(t-\Delta-\theta\Delta)), \\ d\varphi/dt = \omega(x) + \varepsilon Y(x(t), x(t), \varphi(t), \varphi(t) - \omega(x(t))\Delta) + \varepsilon^2 Y_1(x(t-\theta\Delta), \\ x(t-\Delta-\theta\Delta), \varphi(t-\theta\Delta), \varphi(t-\Delta-\theta\Delta)). \end{gathered}$$

Здесь $\| X_1 \|$ и $\| Y_1 \|$ ограничены.

Поэтому в дальнейшем будем записывать систему (1) в виде

$$\begin{aligned} dx/dt &= \varepsilon X_0(x) + \varepsilon X_1(x, \varphi) + \varepsilon^2 X_2(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta), \\ d\varphi/dt &= \omega(x) + \varepsilon Y_1(x, \varphi) + \varepsilon^2 Y_2(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta), \end{aligned} \tag{4}$$

где $(2\pi)^{-m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} X_1(x, \varphi)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m \equiv 0$, $\| X_2 \|$ и $\| Y_2 \|$ ограничены.

Не умаляя общности будем предполагать, что функции X_2 и Y_2 зависят от x, x_Δ, φ, φ_Δ.

Соответствующая системе (4) усредненная система имеет вид

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon X_0(\bar{x}). \tag{5}$$

Предположим, что $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. Будем рассматривать решения $x(t)$ системы (4) и $\bar{x}(t)$ системы (5) при $0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$, $x(0) = \bar{x}(0)$. Вначале приведем некоторые вспомогательные обозначения и утверждения:

1. Пусть $1 < N < \infty$. Обозначим через D_{kN} множество всех $x \in D$, для которых $|(k, \omega(x))| > c_2 \sqrt{\varepsilon}$ при $0 \leqslant |k| \leqslant N$. Дополнение к D_{kN} в D обозначим через R_{kN}.

2. Предположим, что $x(t)$, $\varphi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon)$ — решение системы (4), причем $x(t) \in D$. Разобьем отрезок $[0, 1/\varepsilon]$ на два множества: A_1, для которого $x(t) \in D_{kN}$ и A_2, для которого $x(t) \in R_{kN}$.

Назовем A_1 временным нерезонансным множеством, а A_2 — временным резонансным множеством.

3. Предположим, что для $\forall x \in D$ $\omega_2(x) \neq 0$. Следуя Арнольду, для системы

$$dx/dt = \varepsilon X_0(x) + \varepsilon X_1(x, \varphi), \quad d\varphi/dt = \omega(x) + \varepsilon Y_1(x, \varphi)$$

предположим, что выполняется условие

$$\det \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_2(x) \\ d\omega_1(x)/dt & d\omega_2(x)/dt \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6}$$

для $\forall \varphi \in T^2$, если $x \in D$.

Если ввести функцию $\lambda(x) = \omega_1(x)/\omega_2(x)$, то условие (6) примет вид

$$c_3^{-1}\varepsilon < |d\lambda(x)/dt| < c_3\varepsilon, \quad \{x \in D, \varphi \in T^2\}. \tag{7}$$

Условия вида (6) или (7) означают, что система (4) не может застрять ни на каком резонансе.

Л е м м а 1 ([3]). *Множество A_2 состоит из не более чем $c_4 N^2$ отрезков, длина каждого из которых не превышает $c_5/\sqrt{\varepsilon}$.*

Обозначим последовательно отрезки, составляющие множество A_1 через $[t_r^{л}, t_r^{п}]$, $r = 1, 2, \ldots$ и для определенности положим, что $t_1^{л} = 0 \in A_1$.

Т е о р е м а 1. *Пусть система уравнений* (4) *такова, что выполняются условия*

1) *функции $X_0(x)$, $X_1(x, \varphi)$, $X_2(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta)$, $\omega(x)$, $Y_1(x, \varphi)$, $Y_2(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta)$ — гладкие функции своих аргументов при $x \in D$, $x_\Delta \in D$, $\varphi \in T^2$, $\varphi_\Delta \in T^2$, где T^2 — двумерный тор;*

2) *функции $X_1(x, \varphi)$ и $\partial X_1(x, \varphi)/\partial x$ имеют непрерывные частные производные по φ до третьего порядка включительно;*

3) *выполняется условие* (6) *или* (7).

Тогда существует такое $\varepsilon_0 \ll 1$, что при всех $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и всех $0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$ справедлива оценка

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant c_6 \sqrt{\varepsilon} \ln^2(1/\varepsilon).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим $X_1(x, \varphi) = X_{1N}(x, \varphi) + R_N$, где

$$X_{1N}(x, \varphi) = \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant N} X_k(x) \exp\{i(k, \varphi)\}.$$

В силу второго предположения теоремы ряд Фурье функции $X_1(x, \varphi)$ равномерно сходится.

Выбираем N порядка $\ln(1/\varepsilon)$, чтобы $\| R_N \|$ имела порядок ε^2.

Введем функцию ([5])

$$u(x, \varphi) = \begin{cases} -\sum\limits_{k\neq 0} i\,(1/(k, \omega(x)))\, X_k(x) \exp\{i(k, \varphi)\}, & (k, \omega(x))| > c_2\sqrt{\varepsilon}, \\ -\sum\limits_{k\neq 0} i\,(-\varepsilon^{-2}(k, \omega(x))^3 + 2\varepsilon^{-1}(k, \omega(x)))\, X_k(x) \exp\{i(k, \varphi)\}, & \\ & |(k, \omega(x))| \leqslant c_2\sqrt{\varepsilon}. \end{cases} \tag{8}$$

Легко проверить, что $u(x, \varphi)$ непрерывно дифференцируема в $D \times T^m$. Эта функция сглаживает стандартную замену переменных метода усреднения в резонансных зонах.

Полагая

$$x = y + \varepsilon u(y, \varphi), \tag{9}$$

получаем

$$dy/dt = \varepsilon X_0(y) + \varepsilon Z(y, \varphi) + \varepsilon^2 \Psi(y, y_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta), \tag{10}$$

где $\| \Psi \| < c_7$ и

$$Z(y, \varphi) = \begin{cases} 0, & |(k, \omega(y))| > c_2\sqrt{\varepsilon}, \\ \sum\limits_{k\neq 0} [1 - (k, \omega)^2/\varepsilon]^2 X_k(x) \exp\{i(k, \varphi)\}, & |(k, \omega(y))| \leqslant c_2\sqrt{\varepsilon}. \end{cases}$$

Оценим норму разности $y - \bar{x}$:

$$\| y - \bar{x} \| \leqslant \varepsilon c_8 \int\limits_0^t \| y - \bar{x} \| d\tau + \varepsilon \int\limits_0^t \| Z(y(\tau), \varphi(\tau)) \| d\tau + \varepsilon c_7.$$

Из (8) и леммы 1 следует

$$\varepsilon \int\limits_0^t \| Z(y, \varphi) \| d\tau = \varepsilon \sum_{r=1}^{c_4 N^2} \int\limits_{t_r^{\text{п}}}^{t_{r+1}^{\text{п}}} \Big\| \sum_{k\neq 0} [1 - (k, \omega)^2/\varepsilon]^2 X_k(y) \exp\{i(k, \varphi\} \Big\| d\tau <$$

$$< c_8 \sqrt{\varepsilon} \ln^2(1/\varepsilon).$$

Используя неравенство Гронуолла — Беллмана, получаем

$$\| y - \bar{x} \| \leqslant c_9 \sqrt{\varepsilon} \ln^2(1/\varepsilon). \tag{11}$$

Из (9) и (11) следует

$$\| x - \bar{x} \| \leqslant \| x - y \| + \| y - \bar{x} \| < c_6 \sqrt{\varepsilon} \ln^2(1/\varepsilon),$$

что и доказывает теорему 1.

Таким образом, норма разности решения двухчастотной системы с запаздыванием и решения соответствующей усредненной системы оценивается величиной порядка $\sqrt{\varepsilon}$, как и двухчастотной системы в [3].

В работе [7], обобщающей метод усреднения для многочастотных систем с запаздыванием, двухчастотная система не рассматривается и предполагается, что $X(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta) = X^1(x, x_\Delta, \varphi) + X^2(x, x_\Delta, \varphi_\Delta)$.

В данной работе не предполагается, что φ и φ_Δ разделены.

Условие (6) гарантирует незастревание решения в резонансных зонах и не имеет аналога для систем с числом частот больше, чем два.

Обобщением теоремы 1 для многочастотных систем с запаздыванием является результат, который излагается ниже. Аналогичный результат для систем без запаздывания получен Нейштадтом в [5].

Рассмотрим решения (4) и (5):

$$x(t) = x(t, x_0, \varphi_0, \varepsilon), \quad \bar{x}(t) = \bar{x}(t, x_0, \varepsilon)$$

с одинаковыми начальными данными (x_0, φ_0). На начальном множестве $[-\Delta, 0]$ $x(t) = x_0$ и $\varphi(t) = \varphi_0$. Обозначим

$$h = h(x_0, \varphi_0, \varepsilon) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon} \| x(t) - \bar{x}(t) \|.$$

Пусть выполняются следующие предположения:

1. Правые части системы (4) определены и являются гладкими функциями своих аргументов при $x, x_\Delta \in D \subset R^n$, $\varphi \pmod{2\pi} \in T^m$, $\varphi_\Delta \pmod{2\pi} \in T^m$, где D — компактная область, T^m — m-мерный тор, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, ε_0 — достаточно малое.

2. $\operatorname{Rang}(\partial\omega/\partial x) = m$.

3. Существует $\rho_1 > 0$ и измеримое подмножество $D_1 \subset D$ такие, что при $x_0 \in D_1$ и $0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$ решение $\bar{x}(t)$, $\bar{x}(0) = x_0$ определено и не подходит к границе D ближе, чем на ρ_1.

Выберем $U = D_1 \times T^m$ и пусть $\Phi(\rho, \varepsilon)$ — множество начальных данных $(x_0, \varphi_0) \in U$ таких, что при $0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$ решение $x(t)$ определено и $\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant \rho$, $\Pi(\rho, \varepsilon) = U \setminus \Phi(\rho, \varepsilon)$. Обозначим $U_1 = \Phi(0{,}5\rho_1, \varepsilon)$, $U_2 = \Pi(0{,}5\rho_1, \varepsilon)$.

При сформулированных выше предположениях справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

$$\int_{U_1} h(x_0, \varphi_0, \varepsilon)\, dx_0 d\varphi_0 < c_{10} \sqrt{\varepsilon}, \ \operatorname{mes} U_2 < c_{11} \sqrt{\varepsilon}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $(x(t), \varphi(t))$ — решение (4), $(x(0), \varphi(0)) = (x_0, \varphi_0)$, $x(t) = x_0$ при $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$, $\varphi(t) = \varphi_0$ при $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$, $\bar{x}(t)$ — решение (5), $\bar{x}(0) = x_0$.

Используя функцию (8) и вводя замену переменных (9), получаем уравнение (10), где $\| \Psi \| < c_{12}$.

Как и при доказательстве теоремы 1, оценим норму разности $y - \bar{x}$:

$$\| y(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant \varepsilon c_{13} \int_0^t \| y - \bar{x} \|\, d\tau + \varepsilon \int_0^t \| Z(y, \varphi) \|\, d\tau + \varepsilon c_{12}.$$

Обозначим $z(t) = \int_{U_1} \| y(t) - \bar{x}(t) \|\, dy_0 d\varphi_0$. Измеримость множества U_1 доказана в [4]. Имеем

$$z(t) \leqslant c_{13}\varepsilon \int_0^t z(\tau)\, d\tau + \varepsilon \int_0^t d\tau \int_{U_1} \| Z(y, \varphi) \|\, dy_0 d\varphi_0 + \varepsilon c_{12} \operatorname{mes} U_1.$$

Покажем, что $\int_{U_1} \| Z(y, \varphi) \|\, dy_0 d\varphi_0 < c_{14} \sqrt{\varepsilon}$.

Действительно, из условия $\operatorname{Rang}(\partial\omega/\partial x) = m$ следует, что $\operatorname{mes} \{ y_0 : |(k, \omega(y_0))| < \sqrt{\varepsilon} \} < c_{15} \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому

$$\int_{U_1} \| Z(y, \varphi) \|\, dy_0 d\varphi_0 = \int_{\{y_0 : |(k,\omega)| < \sqrt{\varepsilon}\} \times T^m} \Big\| \sum_{k \neq 0} [1 - (k, \omega)^2/\varepsilon]^2 X_k(y) \exp\{ i(k, \varphi) \} \Big\| \times$$

$$\times\, dy_0 d\varphi_0 \leqslant c_{16} \int_{\{y_0 : |(k,\omega)| < \sqrt{\varepsilon}\}} \Big\| \sum_{k \neq 0} [1 - (k, \omega)^2/\varepsilon]^2 X_k(y) \Big\|\, dy_0 \leqslant c_{14} \sqrt{\varepsilon}.$$

С помощью неравенства Гронуолла — Беллмана получаем

$$z(t) \leqslant c_{17} \sqrt{\varepsilon}. \tag{13}$$

Так как

$$z(t) = \int_{U_1} \| y(t) - \bar{x}(t) \|\, dy_0 d\varphi_0, \quad h(x_0, \varphi_0, \varepsilon) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon} \| x(t) - \bar{x}(t) \|,$$

используя (9), из (13) получаем

$$\int_{U_1} h(x_0, \varphi_0, \varepsilon)\, dx_0 d\varphi_0 < c_{10} \sqrt{\varepsilon}.$$

Оценка меры множества U_2 проводится как в [5]. Теорема доказана.

Из теоремы 2 непосредственно следует такая теорема.

Теорема 3. *При* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $0 \leqslant \rho \leqslant 0{,}5\rho_1$ $\operatorname{mes} H(\rho, \varepsilon) < c_{18} \sqrt{\varepsilon}/\rho$.

Доказательство. Поскольку при $(x_0, \varphi_0) \in H(\rho, \varepsilon)$ $h > \rho$, из (12) следует $\operatorname{mes}(H(\rho, \varepsilon) \cap U_1) < c_{10} \sqrt{\varepsilon}/\rho$. Поэтому

$$\operatorname{mes} H(\rho, \varepsilon) = \operatorname{mes}(H(\rho, \varepsilon) \cap U_1) + \operatorname{mes}(H(\rho, \varepsilon) \cap U_2) < c_{18} \sqrt{\varepsilon}/\rho,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Оценка (14) содержательна при $\rho > c_{18} (\operatorname{mes} U)^{-1} \sqrt{\varepsilon}$.

В заключение отметим, что теорема 1 справедлива и в случае, когда на начальном множестве $[-\Delta, 0]$ задаются произвольные непрерывные функции.

Теоремы 2 и 3 справедливы, когда на $[-\Delta, 0]$ задаются функции $\alpha(t) + x_0$ и $\beta(t) + \varphi_0$, где $\alpha(0) = 0$ и $\beta(0) = 0$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 535 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
3. *Арнольд В. И.* Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы.— Докл. АН СССР, 1965, **161**, № 1, с. 9—12.
4. *Аносов Д. В.* Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, **24**, № 5, с. 721—742.
5. *Нейштадт А. И.* Об усреднении в многочастотных системах.— Докл. АН СССР, 1976, **226**, № 6, с. 1295—1298.
6. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Новые качественные методы в небесной механике.— М.: Наука, 1971.— 444 с.
7. *Бигун Я. И., Фодчук В. И.* Применение метода усреднения для исследования одного класса многочастотных систем с запаздыванием.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 2, с. 149—154.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 26.04.84