УДК 517.9

Нгуен Донг Ань

Случайные колебания в неавтономных механических системах со случайным параметрическим возбуждением

Для многих задач физики и техники большой интерес представляет исследование влияния параметрической нагрузки на колебания механических систем [1]. В работе [2] на основе метода Крылова — Боголюбова — Митропольского и метода уравнений Колмогорова — Фоккера — Планка [3—5] рассмотрены случайные колебания механических систем с одной степенью свободы при периодически изменяющейся собственной частоте. Рассмотрим аналогичную задачу для неавтономных механических систем со случайным параметрическим возбуждением.

1. Система со случайным и периодическим параметрическим возбуждением. Уравнение движения механической системы с одной степенью свободы имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 [1 + \varepsilon\lambda \cos 2\nu t + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t)]\, x = \varepsilon f(t, x, \dot{x}), \tag{1}$$

где $\dot{\xi}(t)$ — «белый шум» с единичной интенсивностью,

$$f(t, x, \dot{x}) = \sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{i,j=0}^{i+j=s} \gamma_{ij}(t)\, x^i \dot{x}^j \right), \tag{2}$$

$\gamma_{ij}(t)$ — периодические функции. Рассмотрим колебание в главной резонансной области:

$$\omega^2 = \nu^2 + \varepsilon\Delta. \tag{3}$$

Подставляя выражение для ω в уравнение (1) и пренебрегая членами порядка малости выше ε, получаем

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon [-\lambda\nu^2 \cos 2\nu t x - \Delta x + f(t, x, \dot{x})] - \sqrt{\varepsilon}\sigma\nu^2 x\dot{\xi}(t). \tag{4}$$

Используя замену [3]

$$x = a\cos\psi, \quad \dot{x} = -a\nu\sin\psi, \quad \psi = \nu t + \theta, \tag{5}$$

с помощью формулы Ито приводим уравнение (4) к виду

$$da = \varepsilon\left[-\frac{1}{\nu}(f - \lambda\nu^2 \cos 2\nu t x - \Delta x)\sin\psi + \frac{\sigma^2\nu^2 x^2}{2a}\cos^2\psi\right]dt - \\ - \sqrt{\varepsilon}\sigma\nu x \sin\psi d\xi(t), \tag{6}$$

$$d\theta = \varepsilon\left[-\frac{1}{a\nu}(f - \lambda\nu^2 \cos 2\nu t x - \Delta x)\cos\psi - \frac{\sigma^2\nu^2 x^2}{a^2}\sin\psi\cos\psi\right]dt - \\ - \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma\nu}{a} x \cos\psi d\xi(t).$$

Уравнение Колмогорова — Фоккера — Планка составленной для стационарной плотности вероятностей $W(a, \theta)$ системы (6), усредненной согласно [3], имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1 W) + \frac{\partial}{\partial\theta}(K_2 W) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}W) - \frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}(K_{12}W) - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(K_{22}W) = 0, \tag{7}$$

где

$$K_1(a,\theta)=\underset{t}{M}\left\{-\frac{1}{\nu}(f-\lambda\nu^2\cos 2\nu t x-\Delta x)\sin\psi+\frac{\sigma^2\nu^2x^2}{2a}\cos^2\psi\right\}=$$

$$=(3\sigma^2\nu^2/16+\nu\lambda/4\sin 2\theta)\,a-\frac{1}{\nu}\sum_{s=1}^{m}\eta_s(\theta)\,a^s,$$

$$\eta_s(\theta)=\sum_{i,j=0}^{i+j=s}(-\nu)^j\,\underset{t}{M}\left\{\gamma_{ij}\left(\frac{\psi-\theta}{\nu}\right)\cos^i\psi\sin^{j+1}\psi\right\},$$

$$K_2(a,\theta)=\underset{t}{M}\left\{-\frac{1}{a\nu}(f-\lambda\nu^2\cos 2\nu t x-\Delta x)\cos\psi-\frac{\sigma^2\nu^2x^2}{a^2}\sin\psi\cos\psi\right\}=$$

$$=(\Delta/(2\nu)+\nu\lambda/4\cos 2\theta)-\frac{1}{\nu}\sum_{s=1}^{m}\beta_s(\theta)\,a^{s-1},$$

$$\beta_s(\theta)=\sum_{j,i=0}^{i+j=s}(-\nu)^j\,\underset{t}{M}\left\{\gamma_{ij}\left(\frac{\psi-\theta}{\nu}\right)\cos^{i+1}\psi\sin^j\psi\right\}. \tag{8}$$

$$K_{11}(a,\theta)=\underset{t}{M}\{(\sigma\nu x\sin\psi)^2\}=\sigma^2\nu^2a^2/8,$$

$$K_{12}(a,\theta)=\underset{t}{M}\left\{(\sigma\nu x\sin\psi)\left(\sigma\nu\cos\psi\,\frac{x}{a}\right)\right\}=0,$$

$$K_{22}(a,\theta)=\underset{t}{M}\left\{\left(\sigma\nu\cos\psi\,\frac{x}{a}\right)^2\right\}=3\nu^2\sigma^2/8.$$

Выполняя замену

$$W(a,\theta)=\exp\{\Phi(a,\theta)\} \tag{9}$$

с учетом (8), преобразуем уравнение (7) к виду

$$\partial K_1/\partial a+\partial K_2/\partial\theta-1/2\,\partial^2K_{11}/\partial a^2+(K_1-\partial K_{11}/\partial a)\,\partial\Phi/\partial a+K_2\partial\Phi/\partial\theta=$$
$$=K_{11}/2\,[\partial^2\Phi/\partial a^2+(\partial\Phi/\partial a)^2]+K_{22}/2\,[\partial^2\Phi/\partial\theta^2+(\partial\Phi/\partial\theta)^2]. \tag{10}$$

Найдем решение сильно нелинейного уравнения в частных производных (10) с коэффициентами (8). Применим к уравнению (10) метод разложения по обобщенной циклической координате [6], роль которой в данном случае может играть амплитуда a. Следовательно, решение уравнения (10) ищем в виде многочлена с целыми степенями амплитуды

$$\partial\Phi/\partial a=\lambda_1a^{-1}+\sum_{i=0}^{\infty}i\mu_i(\theta)\,a^{i-1}$$

или

$$\Phi(a,\theta)=\ln a^{\lambda_1}+\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i(\theta)\,a^i. \tag{11}$$

Здесь $\lambda_1=\mathrm{const}$, $\mu_i(\theta)$ — неизвестные коэффициенты, зависящие только от фазы θ. Подставляя (11) в уравнение (10) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях a, получаем систему разделяющихся дифференциальных уравнений для λ_1, $\mu_i(\theta)$:

$$3\mu_0''+3\mu_0'^2-\frac{16}{\nu^2\sigma^2}\left(\frac{\Delta}{2\nu}+\frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta-\frac{\beta_1(\theta)}{\nu}\right)\mu_0'+\lambda_1^2-\lambda_1+$$
$$+\frac{16}{\nu^3\sigma^2}\lambda_1\eta_1(\theta)-\frac{16}{\nu^2\sigma^2}\left[\frac{\sigma^2\nu^2}{16}-\frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta+\lambda_1\left(-\frac{\sigma^2\nu^2}{16}+\frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\nu}(\eta_1+\beta_1')\right]=0,$$

$$
\begin{gathered}
3\mu_1'' + \left[6\mu_0' - \frac{16}{\sigma^2\nu^2}\left(\frac{\Delta}{2\nu} + \frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta - \frac{\beta_1}{\nu}\right)\right]\mu_1' + \\
+ \left(2\lambda_1 - \left(-1 + \frac{4\lambda}{\sigma^2\nu}\sin 2\theta - \frac{16\eta_1}{\sigma^2\nu^3}\right)\right)\mu_1 = \\
= 3\mu_n'' + \left[6\mu_0' - \frac{16}{\sigma^2\nu^2}\left(\frac{\Delta}{2\nu} + \frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta - \frac{\beta_1}{\nu}\right)\right]\mu_n' + \\
+ \left[(2\lambda_1 + n - 1)\,n - n\left(-1 + \frac{4\lambda}{\sigma^2\nu}\sin 2\theta - \frac{16\eta_1}{\sigma^2\nu^3}\right)\right]\mu_n = \\
= -\sum_{i,j=1}^{i+j=n}\sum (ij\mu_i\mu_j + 3\mu_i'\mu_j') - \sum_{\substack{i=0\\ s=2}}^{i+s=n+1} \frac{16\beta_s}{\sigma^2\nu^3}\mu_i' - \sum_{i=1,s=2}^{i+s=n+1} \frac{16\eta_s}{\sigma^2\nu^3} i\mu_i - \\
- \frac{16}{\sigma^2\nu^3}\lambda_1\eta_{n+1} - \frac{16}{\sigma^2\nu^3}\left[(n+1)\,\eta_{n+1} + \beta_{n+1}'\right], \quad «'» = \frac{d}{d\theta}, \quad n \geqslant 2.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Уравнения (12) позволяют последовательно определить $\lambda_1, \mu_0, \mu_1, \ldots$. Постоянные интегрирования определяются из условия периодичности функций $\mu_i(\theta)$. Во многих случаях система (12) допускает точное решение вида

$$
\lambda_1 = \tau, \quad \mu_i(\theta) = \varphi_i(\theta), \quad \mu_k(\theta) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad k \geqslant N + 1. \tag{13}
$$

Тогда точное решение уравнения (10) будет таким:

$$
\Phi(a, \theta) = \ln a^\tau + \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(\theta)\, a^i
$$

или

$$
W(a, \theta) = ha^\tau \exp\left\{\sum_{i=0}^{N} \varphi_i(\theta)\, a^i\right\}. \tag{14}
$$

2. Линейная система со случайным и периодическим параметрическим возбуждением при действии внешней периодической силы. Рассмотрим в главной резонансной области (3) колебание механической системы

$$
\ddot{x} + 2\varepsilon\alpha\dot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon\lambda\cos 2\nu t + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t))\,x = \varepsilon P\cos\nu t. \tag{15}
$$

Уравнение (15) исследовано в работе [5] при отсутствии периодического параметрического возбуждения ($\lambda = 0$) методом возмущения. Как в п. 1, решение уравнения (15) ищем в виде (5). По формуле (7) находим коэффициенты сноса и диффузии:

$$
\begin{gathered}
K_1(a,\theta) = (3\sigma^2\nu^2/16 + \nu\lambda/4\sin 2\theta - \alpha)\,a - P\sin\theta/(2\nu), \\
K_2(a, \theta) = -P\cos\theta/(2\nu)\,a^{-1} + (\Delta/(2\nu) + \nu\lambda/4\cos 2\theta), \\
K_{11}(a, \theta) = \sigma^2\nu^2/8a^2, \quad K_{22}(a, \theta) = 3\sigma^2\nu^2/8.
\end{gathered} \tag{16}
$$

С учетом (16) уравнение (10) примет вид

$$
\begin{gathered}
\frac{P\sin\theta}{2\nu}a^{-1} + \left(\frac{\sigma^2\nu^2}{16} - \alpha - \frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta\right) + \left[-\frac{P\sin\theta}{2\nu} + \right. \\
\left. + \left(\frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta - \alpha - \frac{\sigma^2\nu^2}{16}\right)a\right]\frac{\partial\Phi}{\partial a} + \left[-\frac{P\cos\theta}{2\nu}a^{-1} + \right. \\
\left. + \left(\frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta + \frac{\Delta}{2\nu}\right)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{\sigma^2\nu^2}{16}\left\{a^2\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial a^2} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a}\right)^2\right] + \right. \\
\left. + 3\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2\right]\right\}.
\end{gathered} \tag{17}
$$

Применим к уравнению (17) метод разложения по обобщенной циклической координате, роль которой в данном случае будет играть a^{-1} (в этом можно убедиться, разделив обе части уравнения (17) на a^2, т. е. на коэффициент при старшей производной $d^2\Phi/\partial a^2$). Итак, решение уравнений (17) ищем в виде

$$\Phi(a, \theta) = -\tau \ln a^{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(\theta)\, a^{-i}, \tag{18}$$

где $\tau = \text{const}$, $\mu_i(\theta)$ — неизвестные коэффициенты, зависящие только от фазы θ. Подставляя (18) в уравнение (17) и сравнивая коэффициенты при $a^0, a^{-1}, \ldots, a^{-n}, \ldots$, получаем систему разделяющихся дифференциальных уравнений для τ, $\mu_i(\theta)$:

$$3(\mu_0'' + \mu_0'^2) - \frac{16}{\sigma^2\nu^2}\left(\frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta + \frac{\Delta}{2\nu}\right)\mu_0' + \left(\tau^2 - \frac{16}{\sigma^2\nu^2}\left(\frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta - \alpha\right)\tau - \right.$$

$$\left. - 1 + \frac{16}{\sigma^2\nu^2}\left(\alpha + \frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta\right) = 0,\right.$$

$$3\mu_1'' + \left[6\mu_0' - \frac{16}{\sigma^2\nu^2}\left(\frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta + \frac{\Delta}{2\nu}\right)\right]\mu_1' + \left[1 - 2\tau - \frac{16}{\sigma^2\nu^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta - a\right)\right]\mu_1 - \frac{16}{\sigma^2\nu^2}\,\{(1-\tau)\sin\theta - \mu_0'\cos\theta\}\,\frac{P}{2\nu},$$

$$3\mu_n'' + \left[6\mu_0' - \frac{16}{\sigma^2\nu^2}\left(\frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta + \frac{\Delta}{2\nu}\right)\right]\mu_n' + \left[n(n-2\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{16}{\sigma^2\nu^2}\, n\left(\frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta - \alpha\right)\right]\mu_n = -\sum_{i,j=1}^{i+j=n}(ij\mu_i\mu_j + 3\mu_i'\mu_j') + \tag{19}$$

$$+ \frac{16}{\sigma^2\nu^2}\,\{(n-1)\sin\theta\mu_{n-1} - \cos\theta\mu_{n-1}'\}\,\frac{P}{2\nu},\quad «'» = \frac{d}{d\theta},\quad n \geqslant 2.$$

Постоянные интегрирования определяются из условия периодичности функций $\mu_i(\theta)$. Система уравнений (18) упрощается в двух случаях.

1. При отсутствии периодического параметрического возбуждения ($\lambda = 0$). В данном случае первое уравнение системы (18) будет допускать решение

$$\tau = \tau_1 = -1,\quad \tau = \tau_2 = 1 - 16\alpha/(\sigma^2\mu^2),\quad \mu_0 = \text{const}. \tag{20}$$

Следовательно, остальные уравнения системы (19) примут вид

$$\mu_1'' - \frac{8\Delta}{3\sigma^2\nu^3}\,\mu_1' + \frac{1}{3}\left[1 - 2\tau_k + \frac{16\alpha}{\sigma^2\nu^2}\right]\mu_1 = \frac{8P}{3\sigma^2\nu^3}(1-\tau_k)\sin\theta,$$

$$\mu_n'' - \frac{8\Delta}{3\sigma^2\nu^3}\,\mu_n + \frac{n}{3}\left[n - 2\tau_k + \frac{16}{\sigma^2\nu^2}\,\alpha\right]\mu_n = -\frac{1}{3}\sum_{i,j=1}^{i+j=n}(ij\mu_i\mu_j + 3\mu_i'\mu_j') +$$

$$+ \frac{8P}{3\sigma^2\nu^3}\,[(n-1)\mu_{n-1}\sin\theta - \cos\theta\mu_{n-1}],\quad n \geqslant 2,\ k = 1, 2. \tag{21}$$

II. При отсутствии силы трения ($\alpha = 0$, $\lambda \neq 0$). В данном случае первое уравнение системы (19) будет допускать решение

$$\tau = 1,\quad \mu_0 = \text{const}, \tag{22}$$

а ее остальные уравнения примут вид

$$\mu_1' - \frac{16}{3\sigma^2\nu^2}\left(\frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta + \frac{\Delta}{2\nu}\right)\mu_1' + \frac{1}{3}\left(-1 - \frac{4\lambda}{\sigma^2\nu}\sin 2\theta\right)\mu_1 = 0,$$

$$\mu_n'' - \frac{16}{3\sigma^2\nu^2}\left(\frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta + \frac{\Delta}{2\nu}\right)\mu_n' + \frac{n}{3}\left(n - 2 - \frac{4\lambda}{\sigma^2\nu}\sin 2\theta\right)\mu_n =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{i,j=1}^{i+j=n}(ij\mu_i\mu_j + 3\mu_i'\mu_j') + \frac{8p}{3\sigma^2\nu^3}\{(n-1)\sin\theta\mu_{n-1} -$$

$$-\cos\theta\mu_{n-1}'\},\quad n \geqslant 2. \qquad (2$$

3. Пример. Рассмотрим в главной резонансной области (3) неавтоно: мую систему Ван-дер-Поля при случайно изменяющейся собственной ча тоте:

$$\ddot{x} + \nu^2(1 + \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi(t))x = \varepsilon\{-\Delta x - 2\alpha\dot{x} + (1 - \gamma x^2)\dot{x} +$$

$$+ \beta x^2\cos\nu t\},\quad \gamma > 0. \qquad (2$$

По формуле (8) находим

$$K_1(a, \theta) = (3\sigma^2\nu^2/16 + 1/2 - \alpha)a - \beta a^2\sin\theta/(8\nu) - \gamma a^3/8,$$

$$K_2(a, \theta) = \Delta/(2\nu) - 3\beta a/(8\nu)\cos\theta, \qquad (2$$

$$K_{11}(a, \theta) = \sigma^2\nu^2 a^2/8,\quad K_{22}(a, \theta) = 3\sigma^2\nu^2/8.$$

В данном случае система уравнений, соответствующая системе (12), име точное решение

$$\tau = \frac{8}{\sigma^2\nu^2}(1 - 2\alpha) + 1,\quad \mu_0(\theta) = \frac{8\Delta\theta}{3\sigma^2\nu^3},$$

$$(2$$

$$\mu_1(\theta) = -\frac{2\beta}{\sigma^2\nu^3}\sin\theta,\quad \mu_2(\theta) = -\frac{\gamma}{\sigma^2\nu^2},\quad \mu_i(\theta) = 0,\quad i = \overline{3, \infty},$$

при произвольной настройке ($\Delta \neq 0$). Однако для периодичности функц $\mu_0(\theta)$ необходимо рассматривать только нулевую настройку ($\Delta = 0$). По ставляя решения (26), (11) в (9), получаем плотность вероятностей амплит ды и фазы при нулевой настройке:

$$W(a, \theta) = ha^{\frac{8}{\sigma^2\nu^2}(1-2\alpha)+1}\exp\left\{-\frac{2\beta a}{\sigma^2\nu^3}\sin\theta - \frac{\gamma}{\sigma^2\nu^2}a^2\right\}. \qquad (2$$

Согласно (27) при значении линейного трения $\alpha = 1/2$ плотность (2 имеет такую же форму, как плотность амплитуды и фазы линейной системы периодическим и случайным внешним возбуждением [7]

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\gamma/\nu^4\dot{x} + \nu^2 x = \varepsilon\beta/\nu^4\cos\nu t + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t). \qquad (2$$

Если периодическое параметрическое возбуждение отсутствует ($\beta = 0$, $\alpha =$ $= 1/2$), то амплитуда случайных колебаний будет подчиняться распредел нию Рэлея. Полученное свойство представляет интерес для задач идентиф кации [5].

При

$$\alpha > 1/2 + \nu^2\sigma^2/16 \qquad (2$$

функция (27) имеет в точке $a = 0$ неинтегрируемую особенность и предста ляет собой δ-функцию. Полученный результат имеет физический смысл: пр выполнении (29) линейная система ($\Delta = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$), соответствующа системе (24), будет стохастически устойчивой и эта устойчивость являетс сильной в том смысле, что даже при наличии периодического параметр ческого возбуждения и отрицательного трения ($\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$) колебаний плотностью вероятности (27) не будет. Таким образом, начиная со значен линейного трения $1/2 + \sigma^2\nu^2/16$ можно погасить случайные колебания и т кое граничное значение α не зависит от величины периодического параме рического возбуждения β. Таким свойством гашения случайных колеб ний не обладает автономная система со случайным и периодическим внешним возбуждением (28). При $\alpha < 1/2 + \sigma^2\nu^2/16$ функция (27) достигает экстремума в точках (a, θ), где

$$\frac{8}{\nu^2}(1-2\alpha)+\sigma^2-\frac{2\beta}{\nu^3}\sin\theta a-\frac{2\gamma}{\nu^2}a^2=0,$$
$$-\frac{2\beta a}{\nu^3}\cos\theta=0. \tag{30}$$

При отсутствии случайного действия ($\sigma = 0$) система (30) совпадает с системой, полученной в работах [1, 3]. Решая (30), находим наиболее вероятное значение амплитуды

$$a=\frac{\beta}{2\nu\gamma}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{\nu^2\gamma^2}+\frac{2}{\gamma}(\nu^2\sigma^2+8(1-2\alpha))}\,. \tag{31}$$

При $\sigma \to 0$, $\beta \to 0$ значение амплитуды будет стремиться к известному значению амплитуды автоколебания системы Ван-дер-Поля. Отсюда следует, что нельзя погасить колебания с амплитудой (31) с помощью периодического и случайного параметрического возбуждения.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 457 с.
2. *Нгуен Донг Ань.* Случайные колебания механических систем при периодически изменяющейся собственной частоте.— Укр. мат. журн., 1985, **37**, № 2, с. 261—267.
3. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах.— В кн.: Приближенные методы исследования нелинейных систем. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 102—147.
4. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем.— М. : Наука, 1976.— 336 с.
5. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний.— М. : Наука, 1980.— 368 с.
6. *Нгуен Донг Ань.* О некоторых методах интегрирования уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова в теории случайных колебаний.— Укр. мат. журн., 1981, **33**, № 1, с. 87—91.
7. *Нгуен Донг Ань.* О некоторых решениях усредненного уравнения Колмогорова —Фоккера — Планка для неавтономной механической системы с одной степенью свободы.— В кн.: Приближенные методы анализа нелинейных колебаний. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 72—80.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 29.12.84