УДК 519.46

М. И. Кабенюк

Дискретность решеток замкнутых подгрупп групп Ли

В работе [1] на решетке $\mathscr{L}(G)$ замкнутых подгрупп топологической группы G единообразно вводятся и систематически изучаются 25 топологий. Фундаментальные системы окрестностей четырех из них, обозначаемых автором (Σ_i, Θ_1), $i = 1, 2, 3, 4$, образуют соответственно совокупности

$$U_1(H, U) = \{F \in \mathscr{L}(G) \mid H \subseteq F \subseteq U\},$$

$$U_2(H, \Omega) = \{F \in \mathscr{L}(G) \mid H \subseteq F \subseteq H\Omega \cap \Omega H\},$$

$$U_3(H, \Omega) = \{F \in \mathscr{L}(G) \mid H \subseteq F \subseteq H\Omega\},$$

$$U_4(H, \Omega) = \{F \in \mathscr{L}(G) \mid H \subseteq F \subseteq \Omega H\},$$

где H пробегает $\mathscr{L}(G)$; U — все открытые подмножества, содержащие H; Ω — все открытые окрестности единицы группы G. Если G локально компактна, а $\mathscr{L}(G)$ дискретна в одной из четырех топологий, то группа G не содержит малых подгрупп и, следовательно, является группой Ли (см., например, [2]). Пусть G — группа Ли. Будет ли $\mathscr{L}(G)$ дискретной в каждой из указанных топологий? Автор работы [1] проверяет это в некоторых частных случаях и формулирует гипотезу: Решетка $\mathscr{L}(G)$ локально компактной группы G дискретна в (Σ_i, Θ_1)-топологии ($i = 1, 2, 3, 4$) в том и только в том случае, когда G — группа Ли.

В настоящей работе доказывается теорема, из которой вытекает справедливость этой гипотезы в полном объеме.

Теорема. *Пусть G — произвольная группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа. Тогда для некоторой окрестности Ω единицы группы G множество $H\Omega$ не содержит замкнутых подгрупп, строго больших H.*

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма

Лемма. *Пусть G — связная группа Ли. Существует такая окрестность единицы Ω группы G, что для любой связной замкнутой подгруппы H группы G множество $H\Omega$ не содержит связных замкнутых подгрупп, строго больших H.*

Доказательство. Пусть на алгебре Ли L группы G задано некоторое скалярное произведение, превращающее L в евклидово пространство. Все рассматриваемые ниже шары (в евклидовой метрике) имеют центр в нуле; если не указано противное, то шары считаются открытыми. Пусть V_0 — такой шар в L, ограничение $\exp$ на котором является гомеоморфизмом; а V — замкнутый шар, обладающий свойствами: $V + V \subseteq V_0$, $\exp(V + V)\exp(V + V) \subseteq \exp V_0$. Покажем, что для любого шара $W \subseteq V$ найдется шар $U \subseteq W$, для которого

$$\ln(\exp x \exp U) \subseteq x + W \tag{1}$$

при любом $x \in V$. (Здесь $\ln = \exp^{-1}$.) Так как все отображения диаграммы

$$V \times V \to \exp V \times \exp V \to \exp V \exp V \xrightarrow{\ln} L$$

непрерывны и $\ln(\exp x \exp 0) = x$ для любого $x \in V$, то для заданного шара $W_1 \subseteq V$ можно подобрать такой шар $U_x \subseteq W_1$, что

$$\ln(\exp(x + U_x)\exp U_x \subseteq x + W_1. \tag{2}$$

(Здесь логарифм на множестве $\exp(x + U_x)\exp U_x$ определен, так как $x + U_x \subseteq V + U_x \subseteq V + V$, а потому $\exp(x + U_x)\cdot\exp U_x \subseteq \exp V_0$. Поскольку шар V компактен, то $V = \bigcup x_i + U_i$ для некоторых $x_i \in V$, $U_i = U_{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть шар W_1 удовлетворяет условию $W_1 + W_1 \subseteq W$. Обозначим $U = \bigcap U_i$. Шар U является искомым. В самом деле, если $x \in V$, то $x \in x_i + U_i$ для некоторого i и в силу (2) $\ln(\exp x \exp U) \subseteq \ln(\exp(x_i + U_i)\exp U_i) \subseteq x_i + W_1 \subseteq x_i + U_i + W_1 \subseteq x + W$. Предпоследнее включение следует из того, что если $x \in x_i + U_i$, то $x_i \in x + U_i$; последнее — следствие условий $U_i \subseteq W_1$, $W_1 + W_1 \subseteq W$. Таким образом, формула (1) имеет место для заданных V, W и найденного шара U.

Пусть шар V обладает указанными выше свойствами, а шары V_1, W, U выбраны так, что выполнены условия: $\exp V_1 \exp V_1 \subseteq \exp V$, радиус p шара W строго меньше радиуса шара V_1, $U \subseteq W$ для шаров U, V, W выполнена формула (1). В этом случае $\Omega = \exp U$ является искомой окрестностью единицы группы G. В самом деле, если H, F — связные замкнутые подгруппы G, для которых $H \subseteq F \subseteq H\Omega$, то

$$F \cap \exp V_1 \subseteq H\Omega \cap \exp V_1 \subseteq (H \cap \exp V_1 \exp V_1)\,\Omega \subseteq (H \cap \exp V)\,\Omega. \tag{3}$$

Пусть A, B — подалгебры алгебры Ли L, соответствующие подгруппам H, F. Тогда из (3) следует

$$B \cap V_1 = \ln(F \cap \exp V_1) \subseteq \ln(H \cap \exp V)\,\Omega = \ln(\exp(A \cap V)\exp U).$$

В силу формулы (1) имеем

$$\ln(\exp(A \cap V)\exp U) \subseteq (A \cap V) + W \subseteq A + W.$$

Таким образом, для подалгебр A, B справедливы включения $A \subseteq B$, $B \subseteq V_1 \subseteq A + W$. Если $A \neq B$, то существует вектор $b \in B \cap V_1$, который ортогонален A и имеет длину $|b| > r$. Тогда расстояние от b до A равно $b|$, т. е. $\rho(b, A) = b > r$. С другой стороны, $b \in A + W$, $b = a + w$, $a \in A$, $w \in W$ и $\rho(b, A) = \rho(a + w, A) \leqslant |w| \leqslant r$. Противоречие показывает, что $A = B$, а тогда и $H = F$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть G_0, H_0 — связные компоненты единицы групп G и H соответственно, $N = N(H_0)$ — нормализатор H_0 в группе G. Тогда можно подобрать такую компактную симметричную окрестность Ω единицы группы G, которая удовлетворяет условиям:

(*i*) $\Omega \subset G_0$, $H_0\Omega$ не содержит связных замкнутых подгрупп, строго больших H_0;

(*ii*) $\Omega^3 \cap (H \setminus H_0) = \varnothing$;

(*iii*) $H_0 (N \cap \Omega)$ не содержит замкнутых подгрупп, строго больших H_0.

Добиться выполнения первого условия можно в силу того, что G_0 открыта в G, и ввиду леммы; второго — благодаря открытости и замкнутости H_0 в H; третьего — ввиду инвариантности H_0 в группе N и лиевости фактор-группы N/H_0. А тогда Ω можно выбрать так, чтобы эти три условия выполнялись одновременно. Наша задача — показать, что Ω — искомая окрестность единицы группы G.

Заметим сначала, что замкнутые множества $H_0\Omega^2$ и $(H \setminus H_0)\,\Omega$ не пересекаются. (Замкнутость следует из компактности Ω) Если x — их общий элемент, то $x = h_0\omega$, $x = h\omega$, где $h_0 \in H_0$, $h \in H/H_0$, $\omega_0 \in \Omega^2$, $\omega \in \Omega$. Стало быть $\omega\omega_0^{-1} \in \Omega^3 \cap (H / H_0)$, что противоречит условию (*ii*) на Ω.

Пусть теперь $H \cap F \cap H\Omega$ для некоторой замкнутой подгруппы F группы G. Если F_0 — связная компонента единицы группы F, то $H_0 \subseteq F_0 \subseteq H_0\Omega$. Здесь первое включение очевидно, а второе следует из того, что F_0 содержится в объединении замкнутых непересекающихся множеств $H_0\Omega$ и $(H \setminus H_0)\,\Omega$. В силу условия (*i*) на окрестность Ω отсюда следует: $F_0 = H_0$. Множество $F_1 = F \cap H_0\Omega$ является замкнутой подгруппой G. Действительно, для $f_1, f_2 \in F_1$, $f_1 = h_1\omega_1$, $f_2 = h_2\omega_2$, $h_1, h_2 \in H_0$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ имеем $f_1, f_2 = (f_1h_2f_1^{-1})\,h_1\omega_1\omega_2$. Учитывая инвариантность H_0 в группе $F\,(H_0 = F_0!)$, получаем; $F_1^2 \subseteq H_0\Omega^2$. Используя включения $F_1^2 \subseteq F \subseteq H\Omega$ и тот факт, что множества $H_0\Omega^2$ и $(H \setminus H_0)\,\Omega$ не пересекаются, имеем

$$F_1^2 \subseteq H_0\Omega^2 \cap H\Omega = H_0\Omega^2 \cap (H_0\Omega \cup (H \setminus H_0)\,\Omega)) = H_0\Omega^2 \cap H_0\Omega = H_0\Omega.$$

Следовательно, $F_1^2 \subseteq F \cap H_0\Omega = F_1$. Так как $f^{-1} = hf\omega^{-1}$, где $f = h\omega$, $h \in H_0$, $\omega \in \Omega$, то $F^{-1} \subseteq H_0\Omega$ ввиду симметричности Ω. Значит, $F^{-1} \subseteq F \cap \cdot$ $\cap H_0\Omega = F_1$. Таким образом, F_1 является подгруппой группы G, причем $H_0 \subseteq F_1 \subseteq H_0\Omega$. Поскольку H_0 и F_1 содержатся в N и $H_0 \subseteq F_1 \subseteq H_0\,(N \cap$ $\cap\ \Omega)$, то $F_1 = H_0$ согласно условию (*iii*) на Ω.

Предположим, что $F \neq H$. Если $f \in F \setminus H$, $f = h\omega$, $h \in H$, $\omega \in \Omega$, то $\omega = h^{-1}f \in F \setminus H$. Стало быть,

$$\omega \in (\Omega \cap F) \setminus H \subseteq (H_0\Omega \cap F) \setminus H = F_1 \setminus H,$$

что противоречит условиям $F_1 = H_0 \subseteq H$. Теорема доказана.

1. *Протасов И. В.* О топологиях в решетке подгрупп.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 2, с. 29—32.
2. *Капланский И.* Алгебры Ли и локально компактные группы.— М. : Мир, 1974.— 148 с.

Кемер. ун-т

Получено 04.04.84