УДК 517.968

Ву Ким Туан

Об n-арных интегральных уравнениях

1. Решения многих смешанных краевых задач математической физики приводят к парным [1, 4, 10], тройным и четверным [5] интегральным уравнениям. Фокс и Саксена [6, 8, 9] применили операторы Кобера—Эрдейи [7] к формальному решению парных уравнений с H-функцией Фокса в ядрах. Используя их методы, исследуем n-арные интегральные уравнения с G-функцией Мейера [3] в ядрах. Решение будем искать в классе $L_2(0, \infty)$, что существенно отличает работу от статей [6, 8, 9], где решения строятся формально. Полученные результаты с помощью операторов Кобера—Эрдейи можно обобщить на случаи, когда ядра содержат H-функцию Фокса.

2. Пусть $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = \infty$ — некоторое разбиение луча $[0, \infty)$ на n интервалов, $g_i(x)$ — заданная на интервале (α_{i-1}, α_i) функция, причем $i = \overline{1, n}$. Рассмотрим следующие n-арные интегральные уравнения с G-функцией Мейера [3] в ядрах:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty xG^{m, l_i+1}_{p+l_i+1, q_i+m+1}\left(xy\left|\begin{matrix}0, & (a^i_{l_i}), & (c_p)\\ (b_m), & (d^i_{q_i}), & -1\end{matrix}\right.\right)f(y)\,dy = g_i(x), \quad \alpha_{i-1} < x < \alpha_i,$$

$$i = \overline{1, k}; \tag{1}$$

$$x\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty G^{m_i, l+1}_{p_i+l+1, q+m_i+1}\left(xy\left|\begin{matrix}1, & (a_l), & (c^i_{p_i})\\ (b^i_{m_i}), & (d_q), & 0\end{matrix}\right.\right)f(y)\,dy = g_i(x), \quad \alpha_{i-1} < x < \alpha_i,$$

$$i = \overline{k+1, n}, \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} a^i_j < 1/2,\ j = \overline{1, l_i}, \quad \operatorname{Re} a_j < 1/2, \quad j = \overline{1, l};\\ \operatorname{Re} d^i_j < 1/2,\ j = \overline{1, q_i}, \quad \operatorname{Re} d_j < 1/2, \quad j = \overline{1, q};\end{gathered} \tag{3}$$

$$i = \overline{1, k};$$

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} b^i_j > -1/2,\ j = \overline{1, m_i}, \quad \operatorname{Re} b_j > -1/2, \quad j = \overline{1, m};\\ \operatorname{Re} c^i_j > -1/2,\ j = \overline{1, p_i}, \quad \operatorname{Re} c_j > -1/2, \quad j = \overline{1, p};\end{gathered} \tag{4}$$

$$i = \overline{k+1, n};$$

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{l_i} a^i_j + \sum_{j=1}^{p} c_j - \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{j=1}^{q_i} d^i_j\right) = 0, \quad i = \overline{1, k},$$

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{l} a_j + \sum_{j=1}^{p_i} c_j^i - \sum_{j=1}^{m_i} b_j^i - \sum_{j=1}^{q} d_j\right) = 0, \quad i = \overline{k+1, n}, \tag{5}$$

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{l} a_j + \sum_{j=1}^{p} c_j - \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{j=1}^{q} d_j\right) = 0;$$

$$m + l_i = p + q_i, \quad i = \overline{1, k};$$

$$m_i + l = p_i + q, \quad i = \overline{k+1, n}; \tag{6}$$

$$m + l = p + q.$$

3. Сформулируем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть* $f(x) \in L_2(0, \infty)$. *Тогда* $g_i(x) \in L_2(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ *для всех* $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Пусть вначале $1 \leqslant i \leqslant k$. По определению G-функции [3]

$$G^{m, l_i+1}_{p+l_i+1, q_i+m+1}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} 0, & (a^i_{l_i}), & (c_p) \\ (b_m), & (d^i_{q_i}), & -1 \end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \Gamma\left[\begin{matrix} (b_m) + s, \; 1 - (a^i_{l_i}) - s \\ (c_p) + s, \; 1 - (d^i_{q_i}) - s \end{matrix}\right] \frac{x^{-s}}{1-s}\, ds. \tag{7}$$

Здесь

$$\Gamma\left[\begin{matrix} (b_m) + s, \; 1 - (a_l) - s \\ (c_p) + s, \; 1 - (d_q) - s \end{matrix}\right] = \frac{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^{l} \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(c_j + s) \prod_{i=1}^{q} \Gamma(1 - d_j - s)}. \tag{8}$$

В силу условий (3), (4) в качестве L можно взять контур $\operatorname{Re} s = 1/2$, который в дальнейшем также обозначается через L. Выполнение условий (5), (6) гарантирует условную сходимость интеграла (7). Воспользовавшись формулой Стирлинга [3] и (5), (6), получим

$$\Gamma\left[\begin{matrix} (b_m) + s, \; 1 - (a^i_{l_i}) - s \\ (c_p) + s, \; 1 - (d^i_{q_i}) - s \end{matrix}\right] = O(1), \quad s \in L, \quad i = \overline{1, k}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$\Gamma\left[\begin{matrix} (b_m) + s, \; 1 - (a^i_{l_i}) - s \\ (c_p) + s, \; 1 - (d^i_{q_i}) - s \end{matrix}\right] \frac{1}{1-s} \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \; \frac{1}{2} + i\infty\right), \tag{10}$$

поэтому обратное преобразование Меллина этой функции, т. е.

$$G^{m, l_i+1}_{p+l_i+1, q_i+m+1}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} 0, & (a^i_{l_i}), & (c_p) \\ (b_m), & (d^i_{q_i}), & -1 \end{matrix}\right),$$

также принадлежит $L_2(0, \infty)$.

4. Применив к (1) равенство Парсеваля, найдем соотношение

$$g_i(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty x G^{m, l_i+1}_{p+l_i+1, q_i+m+1}\left(xy \,\middle|\, \begin{matrix} 0, & (a^i_{l_i}), & (c_p) \\ (b_m), & (d^i_{q_i}), & -1 \end{matrix}\right) f(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \Gamma \begin{bmatrix} (b_m) + s, & 1 - (a^i_{l_i}) - s \\ (c_p) + s, & 1 - (d^i_{q_i}) - s \end{bmatrix} F(1-s)\, x^{-s} ds, \quad x \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i), \quad (11)$$

где $F(s)$ — преобразование Меллина функции $f(x)$. Поэтому $F(s) \in L_2(1/2 - i\infty, \quad 1/2 + i\infty)$, поскольку $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Отсюда следует, что

$$\Gamma \begin{bmatrix} (b_m) + s, & 1 - (a^i_{l_i}) - s \\ (c_p) + s, & 1 - (d^i_{q_i}) - s \end{bmatrix} F(1-s) \in L_2(1/2 - i\infty, \ 1/2 + i\infty) \qquad (12)$$

и интеграл (11) сходится в среднем к функции из $L_2(0, \infty)$, которая на (α_{i-1}, α_i) почти всюду совпадает с функцией $g_i(x)$. Следовательно, $g_i(x) \in L_2(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$, $i = \overline{1, k}$. Аналогично рассматривается случай $i = \overline{k+1, n}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $F(s) \in L_2(1/2 - i\infty, \ 1/2 + i\infty)$, $\alpha \leqslant 0$. *Тогда*

а) *если* $\mathrm{Re}\, a$, $\mathrm{Re}\, b < 1/2$, $\alpha \leqslant \mathrm{Re}(a - b)$, *то*

$$x^b I^{a-b} x^{-a} \int_L s^\alpha F(s)\, x^{-s} ds = \int_L s^\alpha \Gamma \begin{bmatrix} 1 - a - s \\ 1 - b - s \end{bmatrix} F(s)\, x^{-s} ds; \qquad (13)$$

б) *если* $\mathrm{Re}\, a$, $\mathrm{Re}\, b > -1/2$, $\alpha \leqslant \mathrm{Re}(a - b)$, *то*

$$x^b K^{a-b} x^{-a} \int_L s^\alpha F(s)\, x^{-s} ds = \int_L s^\alpha \Gamma \begin{bmatrix} b + s \\ a + s \end{bmatrix} F(s)\, x^{-s} ds, \qquad (14)$$

где $I^a = I^a_{0+}$ *и* K^a — *операторы дробного интегрирования* **Римана—***Лиувилля и Вейля соответственно* [2].

Доказательство очевидно в силу абсолютной сходимости интегралов (13), (14), поскольку тогда операторы Римана—Лиувилля (Вейля) и интегрирование по s коммутативны.

5. Пусть система (1), (2) имеет решение $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Тогда по лемме 1 $g_i(x) \in L_2(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$, $i = \overline{1, n}$. Кроме того, пусть

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty x G^{m, l_i+1}_{p+l_i+1, q_i+m+1} \left(xy \middle| \begin{matrix} 0, & (a^i_{l_i}), & (c_p) \\ (b_m), & (d^i_{q_i}), & -1 \end{matrix} \right) f(y)\, dy = g^*_i(x), \quad 0 < x < \infty,$$

$$i = \overline{1, k}. \qquad (15)$$

Из доказательства леммы 1 легко видеть, что $g^*_i(x) \in L_2(0, \infty)$ и $g^*_i(x) = g_i(x)$ почти всюду на (α_{i-1}, α_i). По теореме Парсеваля

$$\int_L \Gamma \begin{bmatrix} (b_m) + s, & 1 - (a^i_{l_i}) - s \\ (c_p) + s, & 1 - (d^i_{q_i}) - s \end{bmatrix} \frac{F(1-s)}{1-s}\, x^{-s} ds = \int_L \frac{G^*_1(s)}{1-s}\, x^{-s} ds, \qquad (16)$$

где $G^*_1(s) \in L_2(1/2 - i\infty, \ 1/2 + i\infty)$ — преобразование Меллина функции $g^*_1(x) \in L_2(0, \infty)$, а поскольку $1/(1-s) \in L_2(1/2 - i\infty, \ 1/2 + i\infty)$, то оба интеграла в (16) сходятся абсолютно.

Из условий (5), (6) следует

$$\mathrm{Re} \left(\sum_{j=1}^{l_1} a^1_j + \sum_{j=1}^{q_2} d^2_j - \sum_{j=1}^{l_2} a^2_j - \sum_{j=1}^{q_1} d^1_j \right) = 0, \qquad (17)$$

$$l_1 + q_2 = l_2 + q_1 \overset{\mathrm{def}}{=} r_1. \qquad (18)$$

Перенумеруем две последовательности $a_j^2,\ j=\overline{1,l_2};\quad d_j^1,\quad j=\overline{1,q_1}$, в одну $\alpha_1^1, \alpha_1^1, \ldots, \alpha_{r_1}^1$, и две последовательности $a_j^1,\ j=\overline{1,l_1};\ d_j^2,\ j=\overline{1,q_2}$, в одну $\beta_1^1, \beta_2^1, \ldots, \beta_{r_1}^1$ так, чтобы

$$\operatorname{Re}\alpha_1^1 \geqslant \operatorname{Re}\alpha_2^1 \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Re}\alpha_{r_1}^1, \tag{19}$$

$$\operatorname{Re}\beta_1^1 \leqslant \operatorname{Re}\beta_2^1 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\beta_{r_1}^1. \tag{20}$$

Тогда равенство (17) примет вид

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{r_1}\alpha_j^1\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{r_1}\beta_j^1\right). \tag{21}$$

В силу (19) — (21) легко видеть, что

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^1\right) \geqslant \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j^1\right), \quad m = \overline{1, r_1}. \tag{22}$$

Очевидно также, что

$$\Gamma\begin{bmatrix} 1-(a_{l_2}^2)-s, & 1-(d_{q_1}^1)-s \\ 1-(a_{l_1}^1)-s, & 1-(d_{q_2}^2)-s \end{bmatrix} = \Gamma\begin{bmatrix} 1-(\alpha_{r_1}^1)-s \\ 1-(\beta_{r_1}^1)-s \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Так как интегралы в (16) сходятся абсолютно, а по (22) $\operatorname{Re}(\alpha_1^1-\beta_1^1)\geqslant 0$, применив лемму 2, получим равенство

$$(x^{\beta_1^1} I^{\alpha_1^1-\beta_1^1} x^{-\alpha_1^1}) \int\limits_L \frac{G_1^*(s)}{1-s} x^{-s} ds = \int\limits_L \Gamma\begin{bmatrix} 1-\alpha_1^1-s \\ 1-\beta_1^1-s \end{bmatrix} \frac{G_1^*(s)}{1-s} x^{-s} ds. \tag{24}$$

При $|\operatorname{Im} s| \to \infty$ справедлива оценка

$$\Gamma\begin{bmatrix} 1-\alpha_1^1-s \\ 1-\beta_1^1-s \end{bmatrix} = O(|\operatorname{Im} s|^{\operatorname{Re}(\beta_1^1-\alpha_1^1)}), \tag{25}$$

а из (22) следует

$$\operatorname{Re}(\alpha_2^1-\beta_2^1) > \operatorname{Re}(\beta_1^1-\alpha_1^1), \tag{26}$$

поэтому можно еще раз воспользоваться леммой 2. Имеем

$$(x^{\beta_2^1} I^{\alpha_2^1-\beta_2^1} x^{-\alpha_2^1}) \int\limits_L \Gamma\begin{bmatrix} 1-\alpha_1^1-s \\ 1-\beta_1^1-s \end{bmatrix} \frac{G_1(s)}{1-s} x^{-s} ds =$$

$$= \int\limits_L \Gamma\begin{bmatrix} 1-\alpha_1^1-s, & 1-\alpha_2^1-s \\ 1-\beta_1^1-s, & 1-\beta_2^1-s \end{bmatrix} \frac{G_1^*(s)}{1-s} x^{-s} ds. \tag{27}$$

Продолжив эти рассуждения, в конечном итоге придем к равенству

$$(x^{\beta_{r_1}^1} I^{\alpha_{r_1}^1-\beta_{r_1}^1} x^{-\alpha_{r_1}^1}) \ldots (x^{\beta_2^1} I^{\alpha_2^1-\beta_2^1} x^{-\alpha_2^1}) (x^{\beta_1^1} I^{\alpha_1^1-\beta_1^1} x^{-\alpha_1^1}) \int\limits_L \frac{G_1^*(s)}{1-s} x^{-s} ds =$$

$$= \int\limits_L \Gamma\begin{bmatrix} 1-(\alpha_{r_1}^1)-s \\ 1-(\beta_{r_1}^1)-s \end{bmatrix} \frac{G_1^*(s)}{1-s} x^{-s} ds. \tag{28}$$

Аналогично преобразуя левую часть (16), используя при этом (23), находим

$$(x^{\beta_{r_1}^1} I^{\alpha_{r_1}^1-\beta_{r_1}^1} x^{-\alpha_{r_1}^1}) \ldots (x^{\beta_2^1} I^{\alpha_2^1-\beta_2^1} x^{-\alpha_2^1}) (x^{\beta_1^1} I^{\alpha_1^1-\beta_1^1} x^{-\alpha_1^1}) \int\limits_L \Gamma\begin{bmatrix} (b_m)+s, & 1-(a_{n_1}^1)-s \\ (c_p)+s, & 1-(d_{q_1}^1)-s \end{bmatrix} \times$$

$$\times \frac{F(1-s)}{1-s} x^{-s} ds = \int_L \Gamma \left[\begin{matrix} (b_m)+s, & 1-(a^2_{l_2})-s \\ (c_p)+s, & 1-(d^2_{q_2})-s \end{matrix} \right] \frac{F(1-s)}{1-s} x^{-s} ds. \quad (29$$

Обозначив

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx} \int_L \Gamma \left[\begin{matrix} 1-(\alpha^1_{r_1})-s \\ 1-(\beta^1_{r_1})-s \end{matrix} \right] \frac{G_1(s)}{1-s} x^{1-s} ds = h_1(x), \quad (30$$

получим, что $h_1(x) \in L_2(0, \infty)$, а

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty x G^{m, l_2+1}_{p+l_2+1, q_2+m+1} \left(xy \middle| \begin{matrix} 0, & (a^2_{l_2}), & (c_p) \\ (b_m), & (d^2_{q_2}), & -1 \end{matrix} \right) f(y)\, dy = h_1(x). \quad (31$$

Но из (28) следует соотношение

$$\frac{1}{x} \int_0^x h_1(y)\, dy = (x^{\beta^1_{r_1}} I^{\alpha^1_{r_1} - \beta^1_{r_1}} x^{-\alpha^1_{r_1}}) \ldots (x^{\beta^1_1} I^{\alpha^1_1 - \beta^1_1} x^{-\alpha^1_1}) \left(\frac{1}{x} \int_0^x g^*_1(y)\, dy \right) \quad (32$$

и равенство $g^*_1(x) = g_1(x)$ справедливо почти всюду на $0 = \alpha_0 < x < \alpha_1$ следовательно, функция $h_1(x)$ задана на интервале (α_0, α_1). Из (32) вытекает, что $h_1(x) \in L_2(0, \infty)$ тогда и только тогда, когда $g_1(x) \in L_2(0, \infty)$ Поэтому два уравнения (1) на двух интервалах (α_0, α_1), (α_1, α_2) приводя к одному эквивалентному уравнению на интервале (α_0, α_2), имеющему ви,

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty x G^{m, l_2+1}_{p+l_2+1, q_2+m+1} \left(xy \middle| \begin{matrix} 0, & (a^2_{l_2}), & (c_p) \\ (b_m), & (d^2_{q_2}), & -1 \end{matrix} \right) f(y)\, dy = g^*_2(x), \quad (33$$

где

$$g^*_2(x) = \begin{cases} h_1(x), & \alpha_0 < x < \alpha_1, \\ g_2(x), & \alpha_1 < x < \alpha_2. \end{cases} \quad (34$$

Аналогично уравнение (33) и уравнение (1) при $i = 3$ приводят к од ному эквивалентному уравнению на (α_0, α_3). Продолжив этот процесс получим, что i первых уравнений (1), $i \leqslant k$, сводятся к одному эквивалент ному интегральному уравнению на интервале (α_0, α_i) вида

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty x G^{m, l_i+1}_{p+l_i+1, q_i+m+1} \left(xy \middle| \begin{matrix} 0, & (a^i_{l_i}), & (c_p) \\ (b_m), & (d^i_{q_i}), & -1 \end{matrix} \right) f(y)\, dy = g^*_i(x), \quad \alpha_0 < x < \alpha_i$$

(35

Здесь

$$g^*_i(x) = \begin{cases} h_{i-1}(x), & x \in (\alpha_0, \alpha_{i-1}), \\ g_i(x), & x \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i), \end{cases} \quad (36$$

$$h_{i-1}(x) = \frac{d}{dx} x (x^{\beta^{i-1}_{r_{i-1}}} I^{\alpha^{i-1}_{r_{i-1}} - \beta^{i-1}_{r_{i-1}}} x^{-\alpha^{i-1}_{r_{i-1}}}) \ldots$$

$$\ldots (x^{\beta^{i-1}_1} I^{\alpha^{i-1}_1 - \beta^{i-1}_1} x^{-\alpha^{i-1}_1}) \left(\frac{1}{x} \int_0^x g^*_{i-1}(y)\, dy \right), \quad (37$$

$(\alpha^{i-1}_{r_{i-1}})$ — последовательность, невозрастающая по вещественной части составленная перенумерацией из двух последовательностей $(a^i_{l_i})$ и $(d^{i-1}_{q_{i-1}})$, $(\beta^{i-1}_{r_{i-1}})$ — аналогичная неубывающая по вещественной части последователь ность, составленная из последовательностей $(a^{i-1}_{l_{i-1}})$ и $(d^i_{q_i})$, причем

$$r_{i-1} = l_{i-1} + q_i = l_i + q_{i-1}. \quad (38$$

Применив еще раз к уравнению (35) при $i = k$ преобразование такого типа, получим уравнение

$$\frac{d}{dx}\int_0^x xG^{m,l+1}_{p+l+1,q+m+1}\left(xy\left|\begin{matrix}0 & (a_l), & (c_p)\\ (b_m), & (d_q), & -1\end{matrix}\right.\right)f(y)\,dy = h(x),\ \ x\in(\alpha_0,\alpha_k), \quad (39)$$

где

$$h(x) = \frac{d}{dx}\,x\,(x^{\beta^k_{r_k}} I^{\alpha^k_{r_k}-\beta^k_{r_k}} x^{-\alpha^k_{r_k}})\ldots$$

$$\ldots(x^{\beta^k_1} I^{\alpha^k_1-\beta^k_1} x^{-\alpha^k_1})\left(\frac{1}{x}\int_0^x g^*_k(y)\,dy\right),\quad x\in(\alpha_0,\alpha_k), \quad (40)$$

а $(\alpha^k_{r_k})$ и $(\beta^k_{r_k})$ — перенумерованные описанным выше способом последовательности (a_l), $(d^k_{q_k})$ и $(a^k_{l_k})$, (d_q) соответственно, причем

$$r_k = l_k + q = l + q_k. \quad (41)$$

6. Рассмотрим уравнения (2). Пусть

$$x\frac{d}{dx}\int_0^\infty G^{m_i,l+1}_{p_i+l+1,q+m_i+1}\left(xy\left|\begin{matrix}1, & (a_l), & (c^i_{p_i})\\ (b^i_{m_i}), & (d_q), & 0\end{matrix}\right.\right)f(y)\,dy = g^*_i(x),$$

$$0<x<\infty,\quad i=\overline{k+1,n}.$$

По теореме Парсеваля

$$\int_L \Gamma\left[\begin{matrix}(b^i_{m_i})+s, & 1-(a_l)-s\\ (c^i_{p_i})+s, & 1-(d_q)-s\end{matrix}\right]\frac{F(1-s)}{s}x^{-s}ds = \int_L \frac{G^*_i(s)}{s}x^{-s}ds,\quad i=\overline{k+1,n}. \quad (42)$$

Здесь $G^*_i(s)\in L_2(1/2-i\infty,\ 1/2+i\infty)$ — преобразование Меллина функции $g^*_i(x)\in L_2(0,\infty)$. Оба интеграла в (42) сходятся абсолютно, поэтому, использовав лемму 2б, аналогично п. 5 получим равенство

$$x\frac{d}{dx}\int_0^\infty G^{m_i,l+1}_{p_i+l+1,q+m_i+1}\left(xy\left|\begin{matrix}1, & (a_l), & (c^i_{p_i})\\ (b^i_{m_i}), & (d_q), & 0\end{matrix}\right.\right)f(y)\,dy = g^*_i(x),\quad x\in(\alpha_{i-1},\alpha_n), \quad (43)$$

где

$$g^*_i(x) = \begin{cases} g_i(x), & x\in(\alpha_{i-1},\alpha_i),\\ h_{i+1}(x), & x\in(\alpha_i,\alpha_n),\end{cases} \quad (44)$$

$$h_{i+1}(x) = -x\frac{d}{dx}\,(x^{\beta^{i+1}_{r_{i+1}}} K^{\alpha^{i+1}_{r_{i+1}}-\beta^{i+1}_{r_{i+1}}} x^{-\alpha^{i+1}_{r_{i+1}}})\ldots$$

$$\ldots(x^{\beta^{i+1}_1} K^{\alpha^{i+1}_1-\beta^{i+1}_1} x^{-\alpha^{i+1}_1})\left(\int_x^\infty \frac{g^*_{i+1}(y)}{y}\,dy\right), \quad (45)$$

$(\alpha^{i+1}_{r_{i+1}})$ и $(\beta^{i+1}_{r_{i+1}})$ — перенумерованные последовательности $(b^{i+1}_{m_{i+1}})$, $(c^i_{p_i})$ и $(b^i_{m_i})$, $(c^{i+1}_{p_{i+1}})$ соответственно такие, что $\alpha^{i+1}_{r_{i+1}}$ не убывает, а $(\beta^{i+1}_{r_{i+1}})$ не возрастает по вещественной части, причем

$$r_{i+1} = m_i + p_{i+1} = m_{i+1} + p_i,\quad i=\overline{k+1,n}. \quad (46)$$

Применив еще раз к уравнению (43) при $i = k+1$ преобразование такого же типа, получим равенство

$$x\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty G^{m,l+1}_{p+l+1,q+m+1}\left(xy\left|\begin{matrix}1, & (a_l), & (c_p)\\ (b_m), & (d_q), & 0\end{matrix}\right.\right)f(y)\,dy = h(x),\quad x\in(\alpha_k,\alpha_n). \tag{47}$$

Здесь

$$h(x) = -x\frac{d}{dx}\left(x^{\beta^{k+1}_{r_{k+1}}}I^{\alpha^{k+1}_{r_{k+1}}-\beta^{k+1}_{r_{k+1}}}x^{-\alpha^{k+1}_{r_{k+1}}}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(x^{\beta_1^{k+1}}I^{\alpha_1^{k+1}-\beta_1^{k+1}}x^{-\alpha_1^{k+1}}\right)\left(\int\limits_x^\infty\frac{g^*_{k+1}(y)}{y}\,dy\right),\quad x\in(\alpha_k,\alpha_n), \tag{48}$$

$(\alpha^{k+1}_{r_{k+1}})$, $(\beta^{k+1}_{r_{k+1}})$ — перенумерованные последовательности $(b^{k+1}_{m_{k+1}})$, (c_p) и (b_m), $(c^{k+1}_{p_{k+1}})$ соответственно такие, что $(\alpha^{k+1}_{r_{k+1}})$ не убывает, а $(\beta^{k+1}_{r_{k+1}})$ не возрастает по вещественной части, причем

$$r_{k+1} = m + p_{k+1} = m_{k+1} + p. \tag{49}$$

7. Теперь уравнения (43), (47) можно объединить в одно эквивалентное уравнение

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty G_1(xy)\frac{f(y)}{y}\,dy = h(x),\ x\in(0,\infty), \tag{50}$$

где $G_1(x) = xG^{m,l+1}_{p+l+1,q+m+1}\left(x\left|\begin{matrix}0, & (a_l), & (c_p)\\ (b_m), & (d_q), & -1\end{matrix}\right.\right)$ — ядро Ватсона [2]. Из формул (40), (48) следует, что $h(x)\in L_2(0,\infty)$, поэтому по теореме Нараина [3, с. 116] формула обращения уравнения (50) имеет вид

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty xG^{q,p+1}_{p+l+1,q+m+1}\left(xy\left|\begin{matrix}0, & (-c_p), & (-a_n)\\ (-d_q), & (-b_m), & -1\end{matrix}\right.\right)h(y)\,dy. \tag{51}$$

С учетом эквивалентности системы (1), (2) и уравнения (50) справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. *Необходимым и достаточным условием того, что система уравнений* (1), (2) *имеет решение из класса* $L_2(0,\infty)$, *является условие* $g_i(x)\in L_2(\alpha_{i-1},\alpha_i)$, $i=\overline{1,n}$. *При его выполнении решение единственно и выражается формулой* (51), *где* $h(x)$ *находится по формулам* (40), (48), *а остальные функции — по рекуррентным соотношениям.*

З а м е ч а н и е 1. Условия (5), (6) необходимы, чтобы уравнения (1), (2) при любых правых частях из L_2 имели решение в $L_2(0,\infty)$. Если, например, $\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{j=1}^{l_i}a^i_j+\sum\limits_{j=1}^{p}c_j-\sum\limits_{j=1}^{m}b_j-\sum\limits_{j=1}^{q_i}d^i_j\right)>0$ для некоторого i, то функция $g_i(x)$, кроме условия $g_i(x)\in L_2(\alpha_{i-1},\alpha_i)$, должна удовлетворить некоторому дополнительному условию, чтобы уравнение имело решение в L_2. Наоборот, если $\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{j=1}^{l_i}a^i_j+\sum\limits_{j=1}^{p}c^2_j-\sum\limits_{j=1}^{m}b_j-\sum\limits_{j=1}^{q_i}d^i_j\right)<0$, то решение $f(x)$ следует искать в некотором подклассе класса $L_2(0,+\infty)$. Точнее, множество решений уравнений (1), (2) при условии, когда заданные функции правой части (1), (2) пробегают все множество функций L_2, является собственным подмножеством множества $L_2(0,\infty)$.

З а м е ч а н и е 2. Если вместо операторов Римана—Лиувилля и Вейля использовать операторы Кобера—Эрдейи [7], то эти результаты можно перенести на случай H-функций, как это имеет место в случае парных уравнений [6, 8, 9].

1. *Вирченко Н. А.* О некоторых гибридных парных интегральных уравнениях.— Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 2, с. 139—142.
2. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.— М. : Наука, 1966.— 672 с.
3. *Маричев О. И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул).— Минск : Наука и техника, 1978.— 312 с.
4. *Уфлянд Я. С.* Метод парных интегральных уравнений в математической физике.— Л. : Наука, 1977.— 220 с.
5. *Dwivedi A. P., Trivedi T. N.* Triple and quadruple integral equations occurring in diffraction theory. — Proc. Indian Acad. Sci. A, 1977, **85**, N **4**, p. 179—185.
6. *Fox C.* A formal solution of certain dual integral equations.— Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **119**, N 3, p. 389—398.
7. *Kober H.* On fractional integrals and derivatives.— Quart. J. Math., 1940, N 11, p. 193—211.
8. *Saxena R. K.* On the formal solution of dual integral equations.— Proc. Amer. Math. Soc., 1967, **18**, N 1, p. 1—8.
9. *Saxena R. K.* A formal solution of certain dual integral equations involwing *H*-functions.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1967, **63**, N 1, p. 171—178.
10. *Sneddon I. N.* Mixed boundary value problems in potential theory.— Amsterdam : North Holland Publ co., 1966.— 283 p.

Белорус. ун-т, Минск

Получено 03.06.84