УДК 517.9

Ю. А. Митропольский, Нгуен Донг Ань

Случайное колебание в некоторых вязко-упругих нелинейных системах

В работе рассматривается случайное колебание в вязко-упругих нелинейных системах, описываемых стохастическим интегро-дифференциальным уравнением. На основе предположения о существовании медленно изменяющегося решения [1] и метода статистической линеаризации [3] рассматриваемое стохастическое интегро-дифференциальное уравнение приближенно заменяется стохастическим обыкновенным дифференциальным уравнением. К последнему применимы асимптотические методы нелинейной механики и известные методы статистической динамики [2, 3, 4, 9].

Рассмотрим вязко-упругую систему, уравнение колебания которой имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon F(x, \dot{x}, t) + \varepsilon \int_0^t [K(t-s)x(s) + R(t-s)\dot{x}(s)]\, ds + \sqrt{\varepsilon} h(x, \dot{x})\, q(t), \tag{1}$$

где $q(t)$ — центрированный стационарный случайный процесс, F, h — периодические функции по t с периодом 2Π и многочлены от x, $\dot{x}$. Предположим, что ядра релаксации $K(\delta)$, $R(\delta)$ быстро убывают к нулю при $\sigma \to \infty$ [6]. Кроме того, будем предполагать, что уравнение (1) имеет решение вида

$$x(t) = a(t)\cos(\omega t + \theta(t)),$$
$$\dot{x}(t) = -a(t)\,\omega \sin(\omega t + \theta(t)). \tag{2}$$

Здесь $a(t)$, $\theta(t)$ — случайные медленно изменяющиеся процессы.

Применим к уравнению (1) метод статистической линеаризации, но не ко всем членам, а только к интегральной сумме. Заменим уравнение (1) уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon[F(x, \dot{x}, t) + \alpha x + \beta\dot{x}] + \sqrt{\varepsilon} h(x, \dot{x})\, q(t), \tag{3}$$

в котором коэффициенты статистической линеаризации α, β находятся из условия

$$\min_{\alpha,\beta} \left\langle \left\{ \int_0^t [K(t-s)x(s) + R(t-s)\dot{x}(s)]\, ds - \alpha x(t) - \beta\dot{x}(t) \right\}^2 \right\rangle \tag{4}$$

($\langle\cdot\rangle$ — операция математического ожидания). Отсюда

$$\left\langle \left(\int_0^t [K(t-s)x(s) + R(t-s)\dot{x}(s)]\, ds - \alpha x(t) - \beta\dot{x}(t) \right) x(t) \right\rangle = 0,$$
$$\left\langle \left(\int_0^t [K(t-s)x(s) + R(t-s)\dot{x}(s)]\, ds - \alpha x(t) - \beta\dot{x}(t) \right) \dot{x}(t) \right\rangle = 0. \tag{5}$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений (5) относительно α, β, получаем

$$\alpha = \frac{1}{\langle x^2(t)\rangle \langle \dot{x}^2(t)\rangle - (\langle x(t)\dot{x}(t)\rangle)^2} \left\{ \left\langle \int_0^t [K(t-s)x(s) + R(t-s)\dot{x}(s)]\, ds x(t) \right\rangle \right.$$

$$\langle \dot{x}^2(t) \rangle - \langle \int_0^t [K(t-s)\,x(s) + R(t-s)\,\dot{x}(s)]\,ds\dot{x}(t) \rangle \langle x(t)\,\dot{x}(t) \rangle \Big\},$$

$$\beta = \frac{1}{\langle x^2(t)\rangle \langle \dot{x}^2(t)\rangle - (\langle x(t)\ \dot{x}(t)\rangle)^2} \Big\{ \langle \int_0^t [K(t-s)\,x(s) + R(t-s)\,\dot{x}(s)]\,ds\dot{x}(t)\rangle \langle x^2(t)\rangle - \langle \int_0^t [K(t-s)\,x(s) + R(t-s)\,\dot{x}(s)]\,dsx(t)\rangle \langle x(t)\,\dot{x}(t)\rangle \Big\}. \tag{6}$$

Поскольку $a(t)$, $\theta(t)$ — случайные медленно изменяющиеся процессы, из (2) на отрезке $(0, t)$ имеем

$$x(t-\sigma) = a(t-\sigma)\cos(\omega(t-\sigma) + \theta(t-\sigma)) \approx a(t)[\cos(\omega t + \theta(t))\cos\omega\sigma + \sin(\omega t + \theta(t))\sin\omega\sigma] = x(t)\cos\omega\sigma - \dot{x}(t)/\omega\sin\omega\sigma,$$

$$\dot{x}(t-\sigma) = -\omega a(t-\sigma)\sin(\omega(t-\sigma) + \theta(t-\sigma)) \approx -\omega a(t)[\sin(\omega t + \theta(t))\cos\omega\sigma - \cos(\omega t + \theta(t))\sin\omega\sigma] = \dot{x}(t)\cos\omega\sigma + \omega x(t)\sin\omega\sigma. \tag{7}$$

С учетом (7) находим

$$\langle \int_0^t [K(t-s)\,x(s) + R(t-s)\,\dot{x}(s)]\,ds\dot{x}(t)\rangle = \langle \int_0^t [K(\sigma)\,x(t-\sigma) + R(\sigma)\,\dot{x}(t-\sigma)]\,d\sigma\dot{x}(t)\rangle = \langle \int_0^t \Big[K(\sigma)\Big(x(t)\cos\omega\sigma - \frac{\dot{x}(t)}{\omega}\sin\omega\sigma\Big) + R(\sigma)(\dot{x}(t)\cos\omega\sigma + \omega x(t)\sin\omega\sigma)\Big] d\sigma\dot{x}(t)\rangle = \langle x(t)\,\dot{x}(t)\rangle \int_0^t [K(\sigma)\cos\omega\sigma + \omega R(\sigma)\sin\omega\sigma]\,d\sigma - \langle \dot{x}^2(t)\rangle \int_0^t \Big[\frac{K(\sigma)}{\omega}\sin\omega\sigma - R(\sigma)\cos\omega\sigma\Big] d\sigma \approx$$

$$\approx \langle x(t)\,\dot{x}(t)\rangle \int_0^\infty [K(\sigma)\cos\omega\sigma + \omega R(\sigma)\sin\omega\sigma]\,d\sigma - \langle \dot{x}^2(t)\rangle \int_0^\infty \Big[\frac{K(\sigma)}{\omega}\sin\omega\sigma - R(\sigma)\cos\omega\sigma\Big] d\sigma. \tag{8}$$

Аналогично

$$\langle \int_0^t [K(t-s)\,x(s) + R(t-s)\,\dot{x}(s)]\,dsx(t)\rangle \approx \langle x^2(t)\rangle \int_0^\infty [K(\sigma)\cos\omega\sigma + \omega R(\sigma)\sin\omega\sigma]\,d\sigma - \langle x(t)\,\dot{x}(t)\rangle \int_0^\infty [K(\sigma)/\omega\sin\omega\sigma - R(\sigma)\cos\omega\sigma]\,d\sigma. \tag{9}$$

Подставляя (8), (9) в (6), получаем

$$\beta = \int_0^\infty \Big[-\frac{K(\sigma)}{\omega}\sin\omega\sigma + R(\sigma)\cos\omega\sigma\Big] d\sigma. \tag{10}$$

Аналогично

$$\alpha = \int_0^\infty [K(\sigma)\cos\omega\sigma + \omega R(\sigma)\sin\omega\sigma]\, d\sigma. \tag{11}$$

Итак, стохастическое интегро-дифференциальное уравнение (1) приближенно заменяется стохастическим обыкновенным дифференциальным уравнением (3). К последнему применимы известные методы нелинейной механики [2—4].

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \int_0^t K(t-s)\, x(s)\, ds + q(t), \tag{12}$$

где $q(t)$ — случайное воздействие. Соответствующее приближенное стохастическое обыкновенное дифференциальное уравнение (3) имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^\infty K(\sigma)\sin\omega\sigma d\sigma \dot{x} + \varepsilon\int_0^\infty K(\sigma)\cos\omega\sigma d\sigma x + q(t). \tag{13}$$

При отсутствии случайного воздействия ($q(t) = 0$) уравнение (13) получено в работе [7] методом усреднения по второй схеме. В случае, когда величина $q(t)$ имеет порядок малости $\sqrt{\varepsilon}$, уравнение (12) рассмотрено в работе [8]. Положим

$$h = \frac{\varepsilon}{2\omega}\int_0^\infty K(\sigma)\sin\omega\sigma d\sigma,$$

$$\omega_1^2 = \omega^2 - \varepsilon\int_0^\infty K(\sigma)\cos\omega\sigma d\sigma, \tag{14}$$

$$\omega_0^2 = \omega_1^2 - h^2.$$

Решение уравнения (13) таково:

$$x(t) = e^{-ht}\left(x_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}_0 + x_0 h}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right) + \\ + \frac{1}{\omega_0}\int_0^t q(s)\, e^{-h(t-s)}\sin\omega_0(t-s)\, ds. \tag{15}$$

Отсюда находим среднее значение и корреляционную функцию процесса:

$$m_x(t) = e^{-ht}\left(x_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}_0 + x_0 h}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right) + \\ + \frac{1}{\omega_0}\int_0^t m_q(s)\, e^{-h(t-s)}\sin\omega_0(t-s)\, ds, \tag{16}$$

$$K_{xx}(t_1, t_2) = \frac{1}{\omega_0^2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_{qq}(s_1, s_2)\, e^{-h(t_1+t_2-s_1-s_2)}\sin\omega_0(t_1 - s_1)\sin\omega_0(t_2 - \\ - s_2)\, ds_1 ds_2. \tag{17}$$

Пример 2.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\gamma\dot{x}^3 + \varepsilon\int_0^t K(t-s)\, x(s)\, ds + \varepsilon\lambda x\int_0^t K(t-s)\, x^2(s)\, ds + \varepsilon\sigma\dot{\xi}(t), \tag{18}$$

где $\dot{\xi}(t)$ — «белый шум» с единичной интенсивностью. Вводя малый параметр $x(t) = \sqrt{\varepsilon}y(t)$ и пренебрегая членами высшего порядка малости, получаем

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\varepsilon\gamma\dot{y}^3 + \varepsilon\int_0^t K(t-s)\,y(s)\,ds + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t). \tag{19}$$

Соответствующее приближенное стохастическое обыкновенное дифференциальное уравнение (3) имеет вид

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\varepsilon\gamma\dot{y}^3 - \frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^\infty K(\sigma)\sin\omega\sigma d\sigma\dot{y} + \varepsilon\int_0^\infty K(\sigma)\cos\omega\sigma d\sigma y + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t). \tag{20}$$

Как известно (2), решение уравнения (20) таково:

$$y = a\cos(\omega t + \theta). \tag{21}$$

Здесь

$$W(a) = Ca\exp\left\{-\frac{\omega}{\sigma^2}\int_0^\infty K(s)\sin\omega s ds a^2 - \frac{3\gamma\omega^4}{8\sigma^2}a^4\right\}, \quad \gamma > 0. \tag{22}$$

Пример 3.

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\alpha\dot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon\lambda\cos 2\nu t)\,x = \varepsilon\int_0^t K(t-s)\,x(s)\,ds + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t) + P\cos\nu t, \tag{23}$$

где

$$\omega^2 - \nu^2 = \varepsilon\Delta. \tag{24}$$

С учетом (24) соответствующее приближенное стохастическое обыкновенное дифференциальное уравнение (3) запишется так:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon\left[-\left(2\alpha + \frac{1}{\nu}\int_0^\infty K(\sigma)\sin\omega\sigma d\sigma\right)\dot{x} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^\infty K(\sigma)\cos\omega\sigma d\sigma - \Delta\right)x - \nu^2\lambda\cos 2\nu t x) + P\cos\nu t\right] + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t). \tag{25}$$

Решение уравнения (25) ищется в виде

$$x = a\cos(\nu t + \theta), \quad \dot{x} = -a\nu\sin(\nu t + \theta), \tag{26}$$

где плотность вероятностей $W(a, t)$ удовлетворяет усредненному уравнению Колмогорова — Фоккера — Планка [2, 3]

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1 W) + \frac{\partial}{\partial\theta}(K_2 W) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}W) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(K_{22}W)\right\}, \tag{27}$$

$$K_1(a, \theta) = \frac{\sigma^2}{4a\nu^2} - \frac{P}{2\nu}\sin\theta - \left(\alpha + \frac{1}{2\nu}\int_0^\infty K(\sigma)\sin\omega\sigma d\sigma\right)a +$$

$$+ \frac{\nu\lambda a}{4}\sin 2\theta,$$

$$K_2(a, \theta) = \frac{1}{2\nu}\left(\int_0^\infty K(\sigma)\cos\omega\sigma d\sigma + \Delta\right) - \frac{P}{2a\nu}\cos\theta + \frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta, \tag{28}$$

$$K_{11} = \frac{\sigma^2}{2\nu^2}, \quad K_{22} = \frac{\sigma^2}{2\nu^2 a^2}.$$

Решение уравнения (27) ищем в виде

$$W(a, \theta) = Ca \exp \{\mu_1(\theta) a + \mu_2(\theta) a^2 + \mu_3(\theta) a^3 + \ldots\}.$$

Подставляя (29) в (27), получаем следующие уравнения для $\mu_1, \mu_2, \ldots$:

$$\mu_1'' + \mu_1 = 0,$$

$$\mu_2'' + 4\mu_2 = -(\mu_1^2 + \mu_1'^2) - \frac{8\nu^2}{\sigma^2}\left(\alpha + \frac{1}{2\nu}\int_0^\infty K(\sigma)\sin\omega\sigma d\sigma\right) -$$

$$-\frac{2\nu P}{\sigma^2}(\mu_1 \sin\theta + \mu_1' \cos\theta),$$

$$\mu_3'' + 9\mu_3 = -2(2\mu_1\mu_2 + \mu_1'\mu_2') - \frac{2\nu P}{\sigma^2}(2\mu_2 \sin\theta + \mu_2' \cos\theta) +$$

$$+\frac{4\nu^2}{\sigma^2}\left\{\left(\frac{1}{2\nu}\int_0^\infty K(\sigma)\cos\omega\sigma d\sigma + \frac{\Delta}{2\nu} + \frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta\right)\mu_1' -\right.$$

$$\left.-\left(\alpha + \frac{1}{2\nu}\int_0^\infty K(\sigma)\sin\omega\sigma d\sigma - \frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta\right)\mu_1\right\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad «'» = \frac{d}{d\theta} \quad \ldots$$

Постоянные интегрирования выбираются из условия периодичности функций $\mu_1(\theta)$, $\mu_2(\theta)$, $\mu_3(\theta)$, ...

1. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М. : Наука, 1964.— 431 с.
2. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах.— В кн. : Приближенные методы исследования нелинейных систем. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 102—147.
3. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу о решении уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова для неавтономных систем, подверженных периодическим и случайным воздействиям.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 4, с. 525—528.
4. *Нгуен Донг Ань.* Случайные колебания механической системы с одной степенью свободы под воздействием периодической силы и «белого шума».—Там же, № 5, с. 633—636.
5. *Попов Е. П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах.— М. : Наука, 1973.— 584 с.
6. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термо-вязко-упругости.— М. : Наука, 1970.— 280 с.
7. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.— Ташкент : Фан, 1974.— 214 с.
8. *Шебеко С. А., Колтунов М. А., Моргунов Б. И.* Колебание вязко-упругого цилиндра с упругой оболочкой под действием случайных сил.— Механика полимеров, 1977, № 5, с. 88—92.
9. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. —М.: Наука, 1980.— 368 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 20.01.85