УДК 517.9

В. П. Шпакович

Инвариантные многообразия систем уравнений с запаздыванием и медленно меняющейся фазой

Рассмотрим систему

$$d\varphi/dt = \varepsilon a(\varphi, \varepsilon), \ dh/dt = P(\varphi, \varepsilon) h + P_1(\varphi, \psi, \varepsilon) h(t-\Delta) + c(\varphi, \psi, \varepsilon), \quad (1)$$

где $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, a, P, P_1, c — периодические по φ, $\psi=\varphi(t-\Delta)$ с периодом 2π функции, определенные при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и непрерывные по совокупности переменных φ, ψ, ε вместе со своими частными производными по φ, ψ до порядка r включительно, т. е.

$$a(\varphi, \varepsilon), \ P(\varphi, \varepsilon) \in C^r(T_m), \quad P_1(\varphi, \psi, \varepsilon), \ c(\varphi, \psi, \varepsilon) \in C^r(T_m \times T_m : 0 \leqslant \varphi_i \leqslant 2\pi,$$

$0 \leqslant \psi_i \leqslant 2\pi$, $i = 1, \ldots, m)$, $P_1(\varphi, \psi, 0)=0$, $\Delta > 0$ — постоянная положительная величина, характеризующая запаздывание в системе.

При $\varepsilon = 0$ система (1) имеет тороидальное многообразие

$$h = u(\varphi) = -P_0^{-1}(\varphi) c(\varphi, \varphi, 0), \ P_0(\varphi) = P(\varphi, 0) \quad (2)$$

всякий раз, когда $\det P_0(\varphi) \neq 0$. Оно заполнено положениями равновесия $\varphi = \varphi_0$, $h = u(\varphi_0)$, так как $\varphi_t(\varphi_0) = \varphi_{t-\Delta}(\varphi_0)$.

Рассмотрим систему (1) для малых значений параметра ε. Преобразуем ее к более простому виду, расщепив уравнения относительно h на подсистемы. Для осуществления такого расщепления предположим, что матрица $P_0(\varphi)$ имеет n_1 собственных чисел с отрицательной вещественной частью и $n_2=n-n_1$ с положительной. При этом

$$P_0(\varphi) = S(\varphi) \operatorname{diag}\{D_1(\varphi), D_2(\varphi)\} S^{-1}(\varphi), \quad (3)$$

где $S(\varphi)$—матрица подобия, $D_1(\varphi)$—n_1-мерная, $D_2(\varphi)$—$n-n_1=n_2$-мерная матрицы, собственные числа которых совпадают, соответственно, с собственными числами матрицы $P_0(\varphi)$ с отрицательной и положительной вещественными частями.

Предположим, что $S(\varphi) \in C^{r+1}(T_m)$.

В системе уравнений (1) совершим замену переменных, введя вместо h новую переменную $\bar{h}=(h_1, h_2)$ (h_1—n_1-мерный, h_2—n_2-мерный векторы) по формуле

$$h = S(\varphi)\,\bar{h}. \tag{4}$$

Получим систему уравнений вида

$$\begin{gathered} dh_1/dt = D_1(\varphi)\,h_1 + L_1(\varphi, \varepsilon)\,h_1 + L_2(\varphi, \varepsilon)\,h_2 + Q_1(\varphi, \psi, \varepsilon)\,h_1(t-\Delta) + \\ + Q_2(\varphi, \psi, \varepsilon)\,h_2(t-\Delta) + c_1(\varphi, \psi, \varepsilon),\ \ dh_2/dt = D_2(\varphi)\,h_2 + L_3(\varphi, \varepsilon)\,h_1 + \\ + L_4(\varphi, \varepsilon)\,h_2 + Q_3(\varphi, \psi, \varepsilon)\,h_1(t-\Delta) + Q_4(\varphi, \psi, \varepsilon)\,h_2(t-\Delta) + c_2(\varphi, \psi, \varepsilon), \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} S^{-1}(\varphi)\,[P(\varphi, \varepsilon) - P(\varphi, 0)]\,S(\varphi) - \varepsilon S^{-1}(\varphi)\,(\partial S/\partial\varphi)\,a(\varphi, \varepsilon) = \\ = \begin{pmatrix} L_1(\varphi, \varepsilon) & L_2(\varphi, \varepsilon) \\ L_3(\varphi, \varepsilon) & L_4(\varphi, \varepsilon) \end{pmatrix} = L,\ \ S^{-1}(\varphi)\,P_1(\varphi, \psi, \varepsilon)\,S(\psi) = \\ = \begin{pmatrix} Q_1(\varphi, \psi, \varepsilon) & Q_3(\varphi, \psi, \varepsilon) \\ Q_3(\varphi, \psi, \varepsilon) & Q_4(\varphi, \psi, \varepsilon) \end{pmatrix} = Q,\ \ L(\varphi, 0) \equiv 0,\ \ Q(\varphi, \psi, 0) \equiv 0. \end{gathered}$$

Согласно работе [1], линейная относительно h_1, h_2 система уравнений

$$\begin{gathered} d\varphi/dt = \varepsilon a(\varphi, \varepsilon). \\ dh_1/dt = D_1(\varphi)\,h_1,\ \ dh_2/dt = D_2(\varphi)\,h_2 \end{gathered} \tag{6}$$

имеет функцию Грина задачи об инвариантных торах [2].

Обозначим через $\varphi_t(\varphi, \varepsilon)$ решение первого уравнения системы (1), принимающее при $\tau = 0$ значение φ, а через $\Omega_\tau^t(D_1, \varepsilon)$ и $\Omega_\tau^t(D_2, \varepsilon)$ — фундаментальные матрицы решений систем уравнений

$$dh_1/dt = D_1(\varphi_{\varepsilon t}(\varphi, \varepsilon))\,h_1, \quad dh_2/dt = D_2(\varphi_{\varepsilon t}(\varphi, \varepsilon))\,h_2,$$

для которых $\Omega_\tau^\tau = E$; тогда матрица

$$G_0(\tau, \varphi, \varepsilon) = \begin{cases} \operatorname{diag}\{\Omega_\tau^0(D_1, \varepsilon), 0\} & \text{при } \tau < 0, \\ \operatorname{diag}\{0, -\Omega_\tau^0(D_2, \varepsilon)\} & \text{при } \tau > 0, \end{cases}$$

как показано в [1], удовлетворяет неравенству $|G_0(\tau, \varphi, \varepsilon)| < K\exp(-\lambda|\tau|)$ при всех $\tau \in R$ и является функцией Грина задачи об инвариантных торах системы уравнений (6). Кроме того, справедлива оценка $|G_0(\tau, \varphi, \varepsilon)\,c(\varphi_\tau(\varphi))|_r \leqslant K\exp(-\gamma|\tau|)\,|c(\varphi)|_r$ для некоторого $\gamma > 0$, $K > 0$, всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и любой функции $c(\varphi) \in C^r(T_m)$; r-я норма матрицы $L(\varphi, \varepsilon)$, как видно из ее определения, ограничена постоянной $M(\varepsilon)$, стремящейся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Поэтому можно указать такое $0 < \varepsilon^0 \leqslant \varepsilon_0$, чтобы при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon^0]$ выполнялось неравенство $(2K/\gamma)\,|L|_r < R$, где $R < 1$, и неравенство $(2K/\gamma)\,|Q|_r < R$, что возможно, так как $Q(\varphi, \psi, \varepsilon) = S^{-1}(\varphi)\,P_1(\varphi, \psi, \varepsilon)\,S(\psi)$, $P_1(\varphi, \psi, 0) \equiv 0$ по предположению, $S(\varphi) \in C^{r+1}(T_m)$.

При указанных значениях параметра $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^0$ мы находимся в условиях, гарантирующих, согласно [3], существование в $C^{r-1}(T_m)$ инвариантного тора $T_m : h = u(\varphi, \varepsilon)$ системы уравнений (5) для любых $c(\varphi, \psi, \varepsilon) \in C^r(T_m \times \times T_m)$, причем такого, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |u(\varphi, \varepsilon) - u(\varphi)|_{r-1} = 0. \tag{7}$$

Для отыскания тора $h = u(\varphi, \varepsilon)$ системы (5) применяем итерационный метод, позволяющий находить $T_m : h = u(\varphi, \varepsilon)$ как предел последовательности торов $T_m^0 : h = u(\varphi)$, $T_m^1 : h = u^1(\varphi, \varepsilon), \ldots, T_m^i : h = u^i(\varphi, \varepsilon), \ldots$, каждый из которых является инвариантным тором соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Систему уравнений (5) запишем в виде

$$d\varphi/dt = \varepsilon a(\varphi, \varepsilon),$$

$$dh/dt = D(\varphi) h + L(\varphi, \varepsilon) h + Q(\varphi, \psi, \varepsilon) z + c_0(\varphi, \psi, \varepsilon),$$

где $D(\varphi) = \mathrm{diag}\{D_1(\varphi), D_2(\varphi)\}$, $\quad z = h(t - \Delta)$.

Итерационный процесс определяется формулой

$$du^i(\varphi_{\varepsilon t}(\varphi), \varepsilon)/dt = D(\varphi_{\varepsilon t}(\varphi)) u^i(\varphi_{\varepsilon t}(\varphi), \varepsilon) + L(\varphi_{\varepsilon t}(\varphi), \varepsilon) u^i(\varphi_{\varepsilon t}(\varphi), \varepsilon) +$$

$$+ Q(\varphi_{\varepsilon t}(\varphi), \varphi_{\varepsilon(t-\Delta)}(\varphi), \varepsilon) u^{i-1}(\varphi_{\varepsilon(t-\Delta)}(\varphi), \varepsilon) + c_0(\varphi_{\varepsilon t}(\varphi), \varphi_{\varepsilon(t-\Delta)}(\varphi), \varepsilon).$$

Теперь сделаем следующее замечание.

Мы рассматривали систему вида (1) для простоты приведенных выкладок. Результат остается справедливым, если вместо матрицы $P(\varphi, \varepsilon)$ рассматривать матрицу $P(\varphi, \psi, \varepsilon)$.

В самом деле,

$$dh/dt = P(\varphi, \varphi, 0) h + [P(\varphi, \psi, \varepsilon) - P(\varphi, \varphi, 0)] h + P_1(\varphi, \psi, \varepsilon) z + c(\varphi, \psi, \varepsilon).$$

И, так как по теореме о среднем $\varphi(t - \Delta) - \varphi(t) = \varepsilon a(\varphi(t - \theta\Delta), \varepsilon)\Delta$, где θ — постоянный вектор, то $\| P(\varphi, \psi, \varepsilon) - P(\varphi, \varphi, 0) \| \leqslant \varepsilon K_1$, где K_1 — некоторая положительная постоянная.

Из приведенных рассуждений вытекает следующая лемма.

Лемма. *Предположим, что правая часть системы*

$$d\varphi/dt = \varepsilon a(\varphi, \varepsilon),$$
$$dh/dt = P(\varphi, \psi, \varepsilon) h + P_1(\varphi, \psi, \varepsilon) h(t - \Delta) + c(\varphi, \psi, \varepsilon) \tag{8}$$

удовлетворяет условиям:

1. $a(\varphi, \varepsilon) \in C^r(T_m)$, $P(\varphi, \psi, \varepsilon)$, $P_1(\varphi, \psi, \varepsilon)$, $c(\varphi, \psi, \varepsilon) \in C^r(T_m \times T_m)$, $P_1(\varphi, \psi, 0) \equiv 0$;

2. *Вещественные части собственных чисел матрицы* $P_0(\varphi) = P(\varphi, \varphi, 0)$ *отличны от нуля для всех* $\varphi \in T_m$ *и она допускает представление* (3);

3. $S(\varphi) \in C^{r+1}(T_m)$.

Тогда можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon^0 > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^0]$ *система уравнений* (8) *имеет в* $C^{r-1}(T_m)$ *инвариантный тор* $T_m : h = u(\varphi, \varepsilon)$, *удовлетворяющий неравенству* (7).

Используя доказанную выше лемму, мы приходим к следующему результату.

Теорема. *Пусть правая часть системы уравнений*

$$d\varphi/dt = \varepsilon a(\varphi, x, \varepsilon), \ dx/dt = X(\varphi, \varphi(t - \Delta), x, x(t - \Delta), \varepsilon) \tag{9}$$

удовлетворяет следующим условиям:

1 *Функции* $a(\varphi, x, \varepsilon)$, $X(\varphi, \psi, x, y, \varepsilon)$ *определены для всех* $\varphi, \psi = \varphi(t - - \Delta) \in T_m$, $x, y = x(t - \Delta) \in D \subset E^n$ *и* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, *периодические по* φ, ψ *с периодом* 2π, *непрерывны по совокупности переменных* $\varphi, \psi, x, y, \varepsilon$ *вместе со своими частными производными по* φ, ψ, x, y *до порядка* $r \geqslant 2$ *включительно.*

2. *Система уравнений* $X(\varphi, \varphi, x, x, 0) = 0$ *имеет в* $C^r(T_m)$ *изолированное решение* $x = x_0(\varphi)$, *принадлежащее области* D *вместе с некоторой своей* ρ-*окрестностью.*

3. *Вещественные части собственных чисел матрицы* $P_0(\varphi) = (\partial X(\varphi, \varphi, x_0(\varphi), x_0(\varphi), 0)/\partial x)$ *отличны от нуля и она допускает пред-*

ставление (3) *с матрицей* $S(\varphi) \in C^{r+1}(T_m)$. *Тогда можно указать такое* $\varepsilon^0 > 0$ $(\varepsilon^0 \leqslant \varepsilon_0)$, *что для всех* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^0]$ *система уравнений* (9) *имеет инвариантный тор* $T_m : x = u(\varphi, \varepsilon) \in C_{Lip}^{r-2}(T_m)$, *удовлетворяющий соотношению*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} | u(\varphi, \varepsilon)| - x_0(\varphi) |_{r-2} = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Введем замену переменных по формуле $x = x_0(\varphi) + h$. Тогда система (9) примет вид

$$d\varphi/dt = \varepsilon a(\varphi, x_0(\varphi) + h, \varepsilon),$$
$$dh/dt = X(\varphi, \psi, x_0(\varphi) + h, x_0(\psi) + z, \varepsilon) -$$
$$- \varepsilon (\partial x_0(\varphi)/\partial\varphi) a(\varphi, x_0(\varphi) + h, \varepsilon). \tag{11}$$

Преобразуем правую часть системы (11). Имеем

$$X(\varphi, \psi, x_0(\varphi) + h, x_0(\psi) + z, \varepsilon) - \varepsilon (\partial x_0(\varphi)/\partial\varphi) a(\varphi, x_0(\varphi) + h, \varepsilon) =$$
$$= [X(\varphi, \psi, x_0(\varphi) + h, x_0(\psi) + z, \varepsilon) - X(\varphi, \psi, x_0(\varphi), x_0(\psi) + z, \varepsilon)] +$$
$$+ [X(\varphi, \psi, x_0(\varphi), x_0(\psi) + z, \varepsilon) - X(\varphi, \psi, x_0(\varphi), x_0(\psi), \varepsilon)] +$$
$$+ [X(\varphi, \psi, x_0(\varphi), x_0(\psi), \varepsilon) - X(\varphi, \varphi, x_0(\varphi), x_0(\varphi), \varepsilon)] -$$
$$- \varepsilon (\partial x_0(\varphi)/\partial\varphi) [a(\varphi, x_0(\varphi) + h, \varepsilon) - a(\varphi, x_0(\varphi), \varepsilon)] +$$
$$+ X(\varphi, \varphi, x_0(\varphi), x_0(\varphi), \varepsilon) - \varepsilon (\partial x_0(\varphi)/\partial\varphi) a(\varphi, x_0(\varphi), \varepsilon) =$$
$$= \int_0^1 [(\partial X(\varphi, \psi, x_0(\varphi) + th, x_0(\psi) + z, \varepsilon)/\partial x) - \varepsilon (\partial x_0(\varphi)/\partial\varphi) \times$$
$$\times (\partial a(\varphi, x_0(\varphi) + th, \varepsilon)/\partial x)] \, dth +$$
$$+ \int_0^1 [(\partial X(\varphi, \psi, x_0(\varphi), x_0(\psi) + tz, \varepsilon)/\partial y) \, dtz + X(\varphi, \varphi, x_0(\varphi), x_0(\varphi), \varepsilon) -$$
$$- \varepsilon (\partial x_0(\varphi)/\partial\varphi) a(\varphi, x_0(\varphi), \varepsilon) = P(\varphi, \psi, h, z, \varepsilon) h +$$
$$+ P_1(\varphi, \psi, z, \varepsilon) z + c(\varphi, \psi, \varepsilon), \tag{12}$$

где

$$P(\varphi, \psi, h, z, \varepsilon) = \int_0^1 [(\partial X(\varphi, \psi, x_0(\varphi) + th, x_0(\psi) + z, \varepsilon)/\partial x) -$$
$$- \varepsilon (\partial x_0(\varphi)/\partial\varphi) (\partial a(\varphi, x_0(\varphi) + th, \varepsilon)/\partial x)] \, dt,$$
$$P_1(\varphi, \psi, z, \varepsilon) = \int_0^1 [(\partial X(\varphi, \psi, x_0, (\varphi), x_0(\psi) + tz, \varepsilon)/\partial y)] \, dt,$$

$$c(\varphi, \psi, \varepsilon) = X(\varphi, \varphi, x_0(\varphi), x_0(\varphi), \varepsilon) - \varepsilon(\partial x_0(\varphi)/\partial\varphi) a(\varphi, x_0(\varphi), \varepsilon) + \varepsilon b(\varphi, \psi, \varepsilon),$$

так как

$$X(\varphi, \psi, x_0(\varphi), x_0(\psi), \varepsilon) - X(\varphi, \varphi, x_0(\varphi), x_0(\varphi), \varepsilon) = \varepsilon b(\varphi, \psi, \varepsilon).$$

С помощью преобразований (12) система уравнений (11) записывается в виде

$$d\varphi/dt = \varepsilon a(\varphi, x_0(\varphi) + h, \varepsilon), \;\; dh/dt = P(\varphi, \psi, h, z, \varepsilon) h +$$
$$+ P_1(\varphi, \psi, z, \varepsilon) z + c(\varphi, \psi, \varepsilon). \tag{13}$$

Правая часть системы (13) удовлетворяет условиям:

1. Функции $a(\varphi, x_0(\varphi) + h, \varepsilon)$, $P(\varphi, \psi, h, z, \varepsilon)$, $P_1(\varphi, \psi, z, \varepsilon)$, $c(\varphi, \psi, \varepsilon)$ определены в области $\| h \| \leqslant \rho$, $\| z \| \leqslant \rho$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, периодические по φ, ψ с периодом 2π, непрерывные по совокупности переменных φ, ψ, h, z, ε вместе со своими частными производными до порядка $r - 1$ включительно.

2. $P(\varphi, \psi, 0, 0, 0) = P(\varphi, \psi) = (\partial X(\varphi, \psi, x_0(\varphi), x_0(\psi), 0)/\partial x)$, $c(\varphi, \psi, 0) = 0$. При $\varepsilon = 0$ система уравнений (13) имеет инвариантный тор T_m: $h = 0$.

Следовательно, система уравнений

$$d\varphi/dt = \varepsilon a(\varphi, x_0(\varphi), \varepsilon)$$

$$dh/dt = P(\varphi, \psi, 0, 0, \varepsilon)h + P_1(\varphi, \psi, 0, \varepsilon)z + c(\varphi, \psi, \varepsilon)$$

также имеет при малых ε инвариантный тор, так как все условия леммы выполняются. Этот тор $T_m^1 : h = u_1(\varphi, \varepsilon) \in C^{r-1}(T_m)$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |u_1(\varphi, \varepsilon)|_{r-1} = 0. \tag{14}$$

Применяя теперь итерационный процесс, описанный выше при доказательстве леммы, мы получаем последовательность торов $T_m^i : h = u_i(\varphi, \varepsilon)$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} |u_i(\varphi, \varepsilon)|_{r-1} = 0$, сходящуюся по норме пространства $C_{Lip}^{r-2}(T_m)$ к инвариантному тору $T_m : h = v(\varphi, \varepsilon)$ системы уравнений (13). Соотношения вида (14) ведут к соотношению (10) для $u(\varphi, \varepsilon) = v(\varphi, \varepsilon) + x_0(\varphi)$.

1. *Самойленко А. М.* Инвариантные тороидальные многообразия систем с медленно меняющимися переменными.— В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1977, с. 181—191.
2. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. Математика, 1970, **34**, № 6, с. 1219—1240.
3. *Мартынюк Д. И., Самойленко А. М.* Существование инвариантных многообразий систем с запаздыванием.— Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 5, с. 611—620.
4. *Митропольский Ю. А.* Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах.— Киев : Изд-во АН УССР, 1955.— 280 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Поступила 25. 10. 84