УДК 531.1

А. И. Ткаченко

К задаче интегрирования кинематических уравнений вращательного движения

Известно [1], что задача определения ориентации твердого тела по его угловой скорости приводится к одному дифференциальному уравнению типа Риккати. Такое приведение можно выполнить, представив кинематические уравнения вращательного движения в каноническом виде. Это позволяет в случае интегрируемости упомянутого уравнения Риккати использовать при нахождении параметров ориентации формализм построения общего интеграла системы канонических уравнений. Каноническую форму исходных уравнений можно получить, используя методику работы [2].

1. Рассмотрим ортогональные кососимметрические матрицы

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Имеют место равенства

$$A_iA_i=-E,\ A_iA_j=\epsilon_{ijk}A_k,\ i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3. \tag{1}$$

Здесь ϵ_{ijk} — символ Леви — Чивита; E — единичная матрица с размерами 4×4. Матрицы E, A_1, A_2, A_3 образуют базис алгебры гамильтоновых кватернионов [3].

Введем представление

$$A_1=-JS_1,\ J^T=J^{-1},\ S_1^T=S_1. \tag{2}$$

Индекс T означает транспонирование. Неотрицательность S_1 не оговаривается, т. е. (2) — не обязательно полярное разложение [4]. Очевидно, $S_1^2=E$. Введем ограничение $JS=SJ$. Тогда $J^T=-J$ и $S_1=JA_1$. Ввиду симметричности матрицы S_1 и кососимметричности матрицы J последняя должна иметь структуру одного из двух видов: $J^*=gA_1 (g\neq 0$ — скаляр) либо

$$J^\circ=\begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3\\ -g_1 & 0 & g_3 & -g_2\\ -g_2 & -g_3 & 0 & g_1\\ -g_3 & g_2 & -g_1 & 0\end{bmatrix},\quad g_1^2+g_2^2+g_3^2=1. \tag{3}$$

Примем $J=J^\circ$. Тогда в представлениях

$$A_2=-J^\circ S_2,\ A_3=-J^\circ S_3 \tag{4}$$

матрицы $S_2=J^\circ A_2=-S_1A_3$ и $S_3=J^\circ A_3=S_1A_2$ симметрические и по свойствам подобны S_1. Потребуем, чтобы g_1, g_2, g_3 принимали только значения 0 или ± 1. Тогда из (3) получаются шесть возможных значений J°, каждому из которых однозначно соответствует тройка S_1, S_2, S_3.

2. Система кинематических уравнений для параметров Родрига — Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, задающих ориентацию связанного с твердым телом ортонормированного базиса относительно такого же неподвижного базиса [1, 5], может быть представлена в виде

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}(\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3)\Lambda. \tag{5}$$

Здесь $\Lambda = [\lambda_0\ \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3]^T$; $\Lambda^T\Lambda = 1$; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$— координаты вектора абсолютной угловой скорости твердого тела в связанном базисе. Представив A_1, A_2, A_3 по формулам (2), (4), получим

$$\dot{\Lambda} = J^\circ \mathrm{grad}_\Lambda H, \quad H = \frac{1}{4}\Lambda^T(\omega_1 S_1 + \omega_2 S_2 + \omega_3 S_3)\Lambda. \tag{6}$$

Соответственно шести возможным значениям J° из (6) можно получить шесть различных представлений системы (5) в канонической форме. Так, при $g_2 = 1$, $g_1 = g_3 = 0$ имеем:

$$\dot{\lambda}_0 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2}, \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_0}, \quad \dot{\lambda}_3 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1}, \quad \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_3},$$

$$H = [-2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)\omega_1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \lambda_0^2 - \lambda_2^2)\omega_2 + 2(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3)\omega_3]/4. \tag{7}$$

Введя производящую функцию $V(\lambda_0, \lambda_3, t)$, запишем соответствующее системе (7) уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\omega_1\left(\lambda_0\lambda_3 + \frac{\partial V}{\partial \lambda_0}\frac{\partial V}{\partial \lambda_3}\right) + \frac{1}{4}\omega_2\Bigg[\lambda_3^2 - \lambda_0^2 +$$

$$+\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_0}\right)^2\Bigg] + \frac{1}{2}\omega_3\left(\lambda_0\frac{\partial V}{\partial \lambda_3} - \lambda_3\frac{\partial V}{\partial \lambda_0}\right) = 0 \left(\lambda_2 = \frac{\partial V}{\partial \lambda_0}, \ \lambda_1 = \frac{\partial V}{\partial \lambda_3}\right). \tag{8}$$

Положим $V = \varphi(t)(\lambda_3^2 - \lambda_0^2) + 2\psi(t)\lambda_0\lambda_3$. При $\lambda_3^2 - \lambda_0^2 \not\equiv 0$, $\lambda_0\lambda_3 \not\equiv 0$ из (8) следует

$$\dot{\varphi} - 2\omega_1\varphi\psi + \omega_2(\varphi^2 - \psi^2 + 1/4) - \omega_3\psi = 0,$$

$$\dot{\psi} + \omega_1(\psi^2 - \varphi^2 - 1/4) + 2\omega_2\varphi\psi + \omega_3\varphi = 0. \tag{9}$$

Если $\varphi = \varphi(t, c_1, c_2)$, $\psi = \psi(t, c_1, c_2)$— решение системы (9) (c_1, c_2— произвольные постоянные), то решение системы канонических уравнений (7) строится с помощью условий

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_j}(\lambda_3^2 - \lambda_0^2) + 2\frac{\partial \psi}{\partial c_j}\lambda_0\lambda_3 = \mathrm{const}, \ j = 1, 2;$$
$$\lambda_2 = 2\psi\lambda_3 - 2\varphi\lambda_0; \ \lambda_1 = 2\varphi\lambda_3 + 2\psi\lambda_0.$$

Заметим, что функция $\theta(t) = \varphi + i\psi$, $i = \sqrt{-1}$, удовлетворяет уравнению $\dot{\theta} + (\omega_2 + i\omega_1)\theta^2 + i\omega_3\theta + (\omega_2 - i\omega_1)/4 = 0$.

3. Замена переменных

$$\chi = a(\lambda_0 \pm i\lambda_3), \ \xi = b(\lambda_0 \mp i\lambda_3) \tag{10}$$

($a \neq 0$, $b \neq 0$ — постоянные) позволяет расщепить уравнение (8). Положим $V = pV_1(\chi, t) + qV_2(\xi, t)$ ($p \neq 0$, $q \neq 0$ — постоянные). Тогда

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} - \frac{1}{2}a^2 p(\omega_2 \pm i\omega_1)\left(\frac{\partial V_1}{\partial \chi}\right)^2 \pm \frac{1}{2}i\omega_3\chi\frac{\partial V_1}{\partial \chi} - \frac{1}{8a^2p}(\omega_2 \mp i\omega_1)\chi^2 = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} - \frac{1}{2}c^2 q(\omega_2 \mp i\omega_1)\left(\frac{\partial V_2}{\partial \xi}\right)^2 \mp \frac{1}{2}i\omega_3\xi\frac{\partial V_2}{\partial \xi} - \frac{1}{8c^2q}(\omega_2 \pm i\omega_1)\xi^2 = 0. \tag{11}$$

Положим далее

$$\eta = \frac{\partial V_1}{\partial \chi} = \frac{1}{2pa}(\lambda_2 \mp i\lambda_1), \ \zeta = \frac{\partial V_2}{\partial \xi} = \frac{1}{2qc}(\lambda_2 \pm i\lambda_1). \tag{12}$$

Тогда в (7) $H = H_1 + H_2$,

$$H_1 = \frac{1}{2} a^2p^2(-\omega_2 \mp i\omega_1)\eta^2 \pm \frac{1}{2} ip\omega_3\chi\eta + \frac{1}{8a^2}(-\omega_2 \pm i\omega_1)\chi^2,$$

$$H_2 = \frac{1}{2} c^2q^2(-\omega_2 \pm i\omega_1)\zeta^2 \mp \frac{1}{2} iq\omega_3\xi\zeta - \frac{1}{8c^2}(\omega_2 \pm i\omega_1)\xi^2.$$

Найдем скобки Пуассона

$$(\chi, \eta) = p^{-1}, \ (\xi, \zeta) = q^{-1}, \ (\chi, \xi) = (\chi, \zeta) = (\xi, \eta) = (\eta, \zeta) = 0. \tag{13}$$

Преобразование (10), (12) в общем случае не является каноническим (оно оказывается таковым, как видно из (13), лишь при $p = q = 1$ [1]). Тем не менее с помощью этого преобразования нетрудно произвести расщепление системы (7) на две подсистемы канонических уравнений

$$\dot{\chi} = \frac{1}{p}\frac{\partial H_1}{\partial \eta}, \ \dot{\eta} = -\frac{1}{p}\frac{\partial H_1}{\partial \chi}, \ \dot{\xi} = \frac{1}{q}\frac{\partial H_2}{\partial \zeta}, \ \dot{\zeta} = -\frac{1}{q}\frac{\partial H_2}{\partial \xi}. \tag{14}$$

Достаточно проинтегрировать любую из этих подсистем, чтобы с помощью отделения вещественных и мнимых частей найти решение системы (7). Каждой из подсистем (14) сопоставляется уравнение Гамильтона — Якоби в виде соответствующего уравнения (11).

Положим $V_1 = \Phi(t)\chi^2$. При $\chi \not\equiv 0$ находим из (11)

$$\dot{\Phi} - 2a^2p(\omega_2 \pm i\omega_1)\Phi^2 \pm i\omega_3\Phi - \frac{1}{8a^2p}(\omega_2 \mp i\omega_1) = 0. \tag{15}$$

Если $\Phi = \Phi(t, s)$ — решение уравнения (15), содержащее одну произвольную постоянную s, то χ, η находятся из условий

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}\chi^2 = \text{const}, \ \eta = 2\Phi(t, s)\chi. \tag{16}$$

Таким образом, задача определения ориентации твердого тела по заданной угловой скорости сведена к одному уравнению типа Риккати, причем процедура перехода от решения упомянутого уравнения к параметрам λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 отлична от приведенной в [1].

4. П р и м е р. Пусть $\omega_1 = f(t)\sin\varkappa(t)$, $\omega_2 = f(t)\cos\varkappa(t)$, $\omega_3 = \dot{\varkappa} + cf(t)$. Здесь $f(t)$— непрерывная, а $\varkappa(t)$— непрерывно дифференцируемая функции t; $c = \text{const}$, $\varkappa(0) = 0$. Найдем решение уравнения (5), удовлетворяющее при $t_0 = 0$ условиям $\lambda_0(0) = 1$, $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = \lambda_3(0) = 0$ (решение при произвольных начальных условиях находится по формулам сложения преобразований [5]).

Положим $a = 1$, $p = -1/2$ и ограничимся в (10), (12) верхним знаком. Если при этом $c = 1$, $q = 1/2$, то χ, η, ζ, ξ имеют вид параметров Кейли — Клейна [1]. Уравнение (15) принимает вид

$$\dot{\Phi} + f(t)e^{i\varkappa}\Phi^2 + i(\dot{\varkappa} + cf)\Phi + \frac{1}{4}f(t)e^{-i\varkappa} = 0.$$

Произведя замену переменных $w = e^{i\varkappa}\Phi$, $\tau(t) = \int\limits_0^t f(t)\,dt$, находим

$$w = \frac{1}{2}\left[h\,\mathrm{tg}\,\frac{h}{2}(s - \tau) - ic\right], \ \ h^2 = 1 + c^2, \ \ s = \text{const}.$$

Из первого равенства (16) с учетом $\tau(0)=0$, $\chi(0)=1$ следует

$$\chi=\exp\left[\frac{i}{2}(\varkappa-\varkappa_0)\right]\left(\cos\frac{1}{2}h\tau+\operatorname{tg}\frac{1}{2}hs\sin\frac{1}{2}h\tau\right).$$

Из второго равенства (16), учитывая $\eta(0)=0$, находим

$$\operatorname{tg}hs/2=ic/h. \tag{17}$$

Подставив (17) в выражения для χ, η, получим

$$\chi=\left(\cos\frac{h\tau}{2}+\frac{ic}{h}\sin\frac{h\tau}{2}\right)\exp\left[\frac{i}{2}(\varkappa-\varkappa_0)\right],$$

$$\eta=-\frac{1}{h}\sin\frac{h\tau}{2}\exp\left[-\frac{i}{2}(\varkappa+\varkappa_0)\right].$$

Отсюда и из (10), (12) следует

$$\lambda_0=\cos\frac{\varkappa-\varkappa_0}{2}\cos\frac{h\tau}{2}-\frac{c}{h}\sin\frac{\varkappa-\varkappa_0}{2}\sin\frac{h\tau}{2},$$

$$\lambda_2=\frac{1}{h}\cos\frac{\varkappa+\varkappa_0}{2}\sin\frac{h\tau}{2},\quad \lambda_1=\frac{1}{h}\sin\frac{\varkappa+\varkappa_0}{2}\sin\frac{h\tau}{2},$$

$$\lambda_3=\sin\frac{\varkappa-\varkappa_0}{2}\cos\frac{h\tau}{2}+\frac{c}{h}\cos\frac{\varkappa-\varkappa_0}{2}\sin\frac{h\tau}{2}.$$

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика.— М. : Физматгиз, 1961.— 824 с.
2. *Кошляков В. Н.* К теории гиромаятниковых систем.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 4, с. 19—25.
3. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.— М. : Наука, 1979.— 624 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 576 с.
5. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела.— М. : Наука, 1973. — 320 с.

Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, Киев
Поступила 06.02.84