УДК 517.5

П. М. Тамразов

Липшицевы функции в усиленной контурно-телесной задаче и продолжение производной на границу

В препринте [1] дано усиление контурно-телесного результата из [2], относящегося к классу Липшица, и полученный результат применен к обобщению теоремы из [3] о непрерывном продолжении на границу открытого множества производной функции, голоморфной в этом множестве. Неавторизованный английский перевод препринта [1] выходит в томе «Seminar on Deformations» шпрингеровской серии «Lecture Notes», посвященном памяти профессора А. Андреотти.

В настоящей статье даются некоторые обобщения результатов работы [1].

Пусть $\bar{\mathbf{C}}$ — одноточечная компактификация комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Для открытого множества $G \subset \mathbf{C}$ через ∂G и $\overline{\partial G}$ обозначим границу G соответственно в $\mathbf{C}$ и $\bar{\mathbf{C}}$, через $\bar{G}$ — замыкание G в $\mathbf{C}$.

Для функции f, заданной на $\bar{G}$, определены контурный и телесный модули непрерывности $\omega_{\partial G}(f, \delta)$ и $\omega_{\bar{G}}(f, \delta)$ (см. [2, 3]).

Справедлив следующий результат, являющийся усилением той части теоремы 9 из [2], которая относится к функциям класса Липшица.

Т е о р е м а 1. *Пусть G — открытое множество в $\mathbf{C}$, граница которого ∂G содержит не менее двух точек; f — функция, непрерывная на $\bar{G}$, голоморфная в G и удовлетворяющая контурному условию Липшица*

$$\omega_{\partial G}(f, \delta) \leqslant \beta\delta \quad \forall \delta > 0. \tag{1}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) *если всякая связная компонента множества G ограничена, то*

$$\omega_{\bar{G}}(f, \delta) \leqslant \delta \sup_{x \in (0,\delta]} \omega_{\partial G}(f, x)/x \quad \forall \delta > 0, \tag{2}$$

$$|f'(z)| \leqslant \varlimsup_{x \to 0} \omega_{\partial G}(f, x)/x \quad \forall z \in G; \tag{3}$$

б) *если точка $z = \infty$ является предельной точкой $\overline{\partial G}$ и функция $(\log|f(z)|)/\log|z|$ при $z \to \infty$ в пределах каждой неограниченной связной компоненты множества G ограничена сверху, то снова верны оценки* 2) *и* (3);

в) *если точка $z = \infty$ является изолированной точкой множества $\overline{\partial G}$ и $f(z) = o(|z|^2)$ $(z \to \infty)$, то снова верны оценки* (2) *и* (3).

С л е д с т в и е. *Пусть G — открытое множество в $\mathbf{C}$, дополнение которого содержит не менее двух точек; f — функция, непрерывная на $\bar{G}$, голоморфная в G и удовлетворяющая условию*

$$\omega_{\partial G}(f, \delta) = o(\delta) \quad (\delta \to 0). \tag{4}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) *если всякая связная компонента множества G ограничена, то $f'(z) \equiv 0$ в G и*

$$\omega_{\bar{G}}(f, \delta) = o(\delta) \quad (\delta \to 0); \tag{5}$$

б) *если точка $z = \infty$ является предельной точкой $\overline{\partial G}$ и функция $(\log|f(z)|)/\log|z|$ при $z \to \infty$ в пределах каждой неограниченной связной компоненты множества G ограничена сверху, то снова $f'(z) \equiv 0$ в G и верно соотношение* (5);

в) *если точка $z = \infty$ является изолированной точкой $\overline{\partial G}$ и $f(z) = o(|z|^2)$ $(z \to \infty)$, то снова $f'(z) \equiv 0$ в G и верно соотношение* (5).

Устанавливается также следующий результат, обобщающий теорему 5.1 из [2].

Пусть $f'_{\partial G}$ и $f'_{\overline{G}}$ — контурная и телесная производные функции f (см. [3]). Контурная производная может быть определена лишь на множестве $(\partial G)_l$ предельных точек ∂G.

Через $(\partial G)_*$ обозначим множество всех тех иррегулярных граничных точек множества G, для каждой из которых всякая порция множества ∂G с центром в этой точке не устранима для ограниченных голоморфных функций.

Т е о р е м а 2. *Пусть G — открытое множество в $\mathbf{C}$, для которого множество $(\partial G)_l$ непусто; f — функция, непрерывная на $\overline{G}$, голоморфная в G и удовлетворяющая условию*

$$\omega_{\partial G}(f, \delta) \leqslant \beta\delta \quad \forall \delta > 0.$$

Если точка $z = \infty$ принадлежит неодноточечной граничной компоненте некоторой связной компоненты множества G, то дополнительно предположим, что функция $(\log|f(z)|)/\log|z|$ при $z \to \infty$ ограничена сверху в пределах каждой неограниченной связной компоненты множества G.

Тогда если на множестве $(\partial G)_l$ существует контурная производная $f'_{\partial G}$, непрерывная на этом множестве, то

$$\lim_{\substack{\zeta \to z \\ \zeta \in G}} f'(\zeta) = f'_{\partial G}(z) \quad \forall z \in (\partial G)_l \setminus (\partial G)_*.$$

Доказательства получаются за счет развития метода, разработанного в [3].

Пусть D — область на $\overline{\mathbf{C}}$, граница которой ∂D содержит не менее трех точек, и $z_0 \in D \cap \mathbf{C}$. Тогда универсальная накрывающая $\hat{D}$ области D конформно эквивалентна единичному кругу. Обозначим через p проектирование $\hat{D} \to D$, через σ — какой-нибудь конформный гомеоморфизм открытого круга $|w| < 1$ на $\hat{D}$, для которого $p(\sigma(0)) = z_0$, $(p \circ \sigma)'(0) > 0$, и обозначим

$$R(w) = R_{D,z_0}(w) \overset{\text{def}}{=} p(\sigma(w)) \quad (|w| < 1). \tag{6}$$

Из определения ясно, что $R(0) = z_0$, $R'(0) > 0$, причем отображение $R = R_{D,z_0}$ определено однозначно областью D и точкой z_0 и является локальным гомеоморфизмом, а потому

$$R'(w) \neq 0 \quad \forall w : |w| < 1. \tag{7}$$

Докажем следующее утверждение.

Л е м м а. *Пусть ∂D не является множеством нулевой логарифмической емкости. Тогда функция $R(\omega)$ почти всюду на окружности $|w| = 1$ имеет угловые граничные значения $R(e^{i\theta})$ и для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$ эти угловые граничные значения принадлежат ∂D и являются регулярными граничными точками области D.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как мероморфная функция $R(w)$ не принимает в единичном круге множества значений положительной логарифмической емкости, то она почти всюду на единичной окружности имеет конечные угловые граничные значения (см. [4, с. 1159]).

В D существует обобщенная функция Грина $g(\zeta, z)$. Известно (см. [5, с. 372—374]), что

$$g(R(0), R(w)) = -\log|wB(w)| \quad (|w| < 1), \tag{8}$$

где $B(w) = \prod\limits_{\nu} \frac{|t_\nu|}{t_\nu} \frac{t_\nu - w}{1 - \bar{t}_\nu w}$ — произведение Бляшке с простыми нулями t_ν, для которых ряд $\sum\limits_{\nu} (1 - |t_\nu|)$ сходится.

Функция $B(w)$ почти всюду на окружности $|w| = 1$ имеет угловые граничные значения, по модулю равные 1. Следовательно, функция (8) на граничном множестве $E \subset \{w : |w| = 1\}$ полной меры имеет угловые граничные значения, равные нулю. Поэтому если $R(w)$ имеет в точке $w_0 \in E$ угловое граничное значение $R(w_0)$, то $R(w_0) \in \partial\overline{D}$ (ибо в противном случае было бы $g(R(0), R(w_0)) > 0$).

Итак, доказано, что почти во всех граничных точках единичного круга функция $R(w)$ имеет угловые граничные значения, принадлежащие ∂D.

Теперь докажем, что почти во всех точках единичной окружности эти угловые граничные значения являются регулярными граничными точками области D.

Пусть $R > 0$ настолько велико, что множество $(\partial D) \cap \{z : |z| < R/2\}$ имеет положительную логарифмическую емкость. Тогда множество $D_R = D \cup \{z \in \overline{\mathbf{C}} : |z| > R\}$ имеет обобщенную функцию Грина $g(\infty, z)$ с особенностью в точке $z = \infty$.

Пусть $E \subset \partial D$ — непустое множество нулевой (внешней) логарифмической емкости, содержащееся в круге $|z| < R/2$. Тогда в силу известных результатов Брело (см. [6, с. 55, 62—63, 41]) существует вероятностная мера ν с компактным носителем $\mathrm{Supp}\ \nu \subset \overline{E}$, потенциал которой

$$U^{\nu}(z) = \int \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\nu(\zeta)$$

равен $+\infty$ на E (и конечен в $\mathbf{C} \setminus \mathrm{Supp}\,\nu$). В силу полунепрерывности снизу в $\mathbf{C}$ функция $U^{\nu}(z)$ стремится к $+\infty$, когда z стремится к любой точке E. При этом функция $q(z) = -U^{\nu}(z) - g(\infty, z)$ ограничена сверху и гармонична в D_R и стремится к $-\infty$, когда z стремится к любой точке E.

Рассмотрим функцию $q(R(w))$. Она ограничена сверху в $|w| < 1$, гармонична и потому почти всюду на $|w| = 1$ имеет конечные угловые граничные значения. Следовательно, множество на $|w| = 1$, где эта функция имеет угловые граничные значения, равные $-\infty$, линейно измеримо и имеет линейную меру нуль. Но в этом множестве содержится множество $\tilde{E}$ всех тех точек $e^{i\theta}$, для каждой из которых $R(w)$ имеет угловое граничное значение, принадлежащее множеству E. Следовательно, $\tilde{E}$ линейно измеримо и имеет линейную меру нуль.

Пусть теперь на ∂D задано множество A нулевой логарифмической емкости. Изображая A в виде объединения $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ ограниченных множеств $E_i = E \cap \{z : |z| < i\}$, убеждаемся, что объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{E}_i$ множеств $\tilde{E}_i$ линейно измеримо и имеет линейную меру нуль. Пусть $\tilde{A}$ — множество всех тех $e^{i\theta}$, для каждого из которых $R(w)$ имеет угловое граничное значение $R(e^{i\theta})$, принадлежащее множеству A. Очевидно, $\tilde{A} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{E}_i$, и потому $\tilde{A}$ линейно измеримо и имеет линейную меру нуль.

Множество иррегулярных граничных точек области D имеет логарифмическую емкость нуль, и если его принять за A, то из предыдущего видно, что множество всех тех $e^{i\theta}$, для каждого из которых функция $R(w)$ имеет угловое граничное значение, являющееся иррегулярной граничной точкой множества D, линейно измеримо и имеет линейную меру нуль.

Лемма доказана.

Заметим, что приведенное доказательство леммы несколько модифицировано по сравнению с ее первоначальным доказательством в [1]. Частично это стимулировано полезным обсуждением доказательства леммы в сентябре 1984 г. на 9-м Донецком коллоквиуме по квазиконформным отображениям.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Из наших условий на основании теоремы 9 работы [2] следует, что

$$\omega_{\overline{G}}(f, \delta) \leqslant \beta\delta \quad \forall \delta > 0. \tag{9}$$

Пусть D — связная компонента множества G. Без ограничения общности считаем, что $f \not\equiv \text{const}$ в D. Фиксируем точку $z_0 \in D$ такую, что $f'(z_0) \neq 0$. Фиксируем $\tau \in (0, \pi)$ и для функций f и $R(w)$ определяем функцию от w

$$F(w, \tau) = \frac{f(R(w)) - f(R(we^{i\tau}))}{R(w) - R(we^{i\tau})} \quad (|w| < 1) \tag{10}$$

и множество E^τ всех тех $\theta \in E^0$, для которых существуют конечные угловые граничные значения $R(e^{i(\theta+\tau)})$ функции $R(we^{i\tau})$, удовлетворяющие неравенству

$$R(e^{i\theta}) \neq R(e^{i(\theta+\tau)}).$$

При этом (см. [3]) $\operatorname{mes} E^\tau = 2\pi$, ибо в противном случае (см. [3]) выполнялись бы тождество $R(w) \equiv R(we^{i\tau})$ и равенство $R'(0) = R'(0)e^{i\tau}$, что невозможно в силу (7) и включения $\tau \in (0, \pi)$.

Функция $f(R(w)) - f(R(we^{i\tau}))$ на граничном множестве полной меры имеет конечные угловые граничные значения. В силу (9) функция (10) в круге $|w| < 1$ ограничена и голоморфна, а из леммы следует, что на граничном множестве полной меры она имеет конечные угловые граничные значения

$$F(e^{i\theta}, \tau) = \frac{f(R(e^{i\theta})) - f(R(e^{i(\theta+\tau)}))}{R(e^{i\theta}) - R(e^{i(\theta+\tau)})} \quad (\theta \in E^\tau), \tag{11}$$

и потому в круге $|w| < 1$ выражается интегралом Пуассона

$$F(w, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}, \tau) P(w, \theta)\, d\theta \quad (|w| < 1) \tag{12}$$

с ядром Пуассона $P(w, \theta) = \operatorname{Re} \dfrac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w}$.

Как показано в [3], функции $R_\tau(e^{i\theta}) \overset{\text{def}}{\equiv} R(e^{i(\theta+\tau)})$ от θ сходятся по мере к функции $R(e^{i\theta})$. Значит, существует последовательность $\tau_n \downarrow 0$ такая, что функции $R_{\tau_n}(e^{i\theta})$ почти всюду сходятся к $R(e^{i\theta})$, и на основании леммы и соотношения (11) почти всюду по $\theta \in [0, 2\pi]$ верно

$$\varlimsup_{\tau \to 0} |F(e^{i\theta}, \tau)| \leqslant \varlimsup_{x \to 0} \omega_{\partial D}(f, x)/x. \tag{13}$$

Из соотношений (12), (13) и условия теоремы, обеспечивающего равномерную относительно $\theta \in E^\tau$ и всех τ ограниченность функции (11), вытекает, что в каждой точке круга $|w| < 1$ имеем

$$|f'(R(w))| = \lim_{\tau \to 0} |F(w, \tau)| \leqslant \varlimsup_{x \to 0} \omega_{\partial D}(f, x)/x,$$

т. е. во всей области D $|f'(z)| \leqslant \varlimsup\limits_{x \to 0} \omega_{\partial D}(f, x)/x$.

Следовательно, верно (3). Отсюда уже легко вывести (2).

Теорема 1 доказана.

Для доказательства следствия заметим, что из (4) вытекает (1) с надлежащим β. Поэтому можно применить теорему 1, и в рассматриваемой ситуации правая часть оценки (3) обращается в нуль и верно соотношение (5). Следствие доказано.

Доказательство теоремы 2. Если точка $z = \infty$ не является граничной точкой ни для одной связной компоненты множества G, то из теоремы 1 (или теоремы 9 работы [2]) следует, что f удовлетворяет условию Липшица на $\overline{G}$.

Если точка $z = \infty$ является одноточечной граничной компонентой множества G, то при всяком $r > 0$ в множестве $|z| > r$ можно построить жорданову кривую $\gamma_r \subset G$, отделяющую эту точку от точки $z = 0$. Пусть G_r — часть G, лежащая внутри γ_r. На ∂G_r функция f удовлетворяет условию Липшица с некоторой постоянной (не обязательно равной β). Как и выше, убеждаемся, что f удовлетворяет на $\bar{G}_r$ условию Липшица. Дальнейшее доказательство теоремы 2 в этом случае проводится сначала применительно к G_r, а затем за счет произвольности r легко получаем нужное утверждение для G. Поэтому без ограничения общности можно не рассматривать случай, когда точка $z=\infty$ является одноточечной граничной компонентой множества G, ибо он сводится к предыдущему случаю.

Если точка $z=\infty$ принадлежит неодноточечной граничной компоненте одной из связных компонент множества G, то из дополнительного условия теоремы 2 и из теоремы 1 следует, что f удовлетворяет условию Липшица на $\bar{G}$.

Итак, в дальнейшем можно считать, что f удовлетворяет условию Липшица на $\bar{G}$.

Без ограничения общности можно также считать, что $(\partial G)_l = \partial G$, ибо изолированные конечные точки стираемы для f.

Фиксируем связную компоненту D множества G. Из леммы и доказательства теоремы 1 видно, что существует последовательность $\tau_n \downarrow 0$ такая, что почти всюду на $[0, 2\pi]$ угловые граничные значения функций (6) и (10) удовлетворяют соотношению $\lim\limits_{n\to\infty} F(e^{i\theta}, \tau_n) = f_{\partial G}(R(e^{i\theta}))$. Отсюда с учетом свойств функции $F(e^{i\theta}, \tau)$, приведенных в доказательстве теоремы 1, следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E^{\tau_n}} F(e^{i\theta}, \tau_n) P(w, \theta)\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} f'_{\partial G}(R(e^{i\theta})) P(w, \theta)\, d\theta.$$

Из этой формулы в сочетании с (12) и вытекающим из (10) соотношением $\lim\limits_{\tau\to 0} F(w, \tau) = f'(R(w))$ $(|w| < 1)$ получается равенство

$$f'(R(w)) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f'_{\partial G}(R(e^{i\theta})) P(w, \theta)\, d\theta \quad (|w| < 1). \tag{14}$$

Рассмотрим теперь комплекснозначную гармоническую функцию $H(\zeta)$, определяемую как решение обобщенной задачи Дирихле для множества G и комплекснозначной граничной функции $f'_{\partial G}(z)$. Ясно, что $H(\zeta)$ непрерывна на объединении G и множества всех регулярных граничных точек G и в последних принимает значения $f'_{\partial G}(z)$. Функция $H(R(w))$ комплексно гармонична в $|w| < 1$ и ограничена, поэтому почти всюду на $|w| = 1$ имеет угловые граничные значения $h(e^{i\theta})$ и

$$H(R(w)) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h(e^{i\theta}) P(w, \theta)\, d\theta \quad (|w| < 1). \tag{15}$$

Так как в силу леммы почти всюду на $[0, 2\pi]$

$$\lim_{\rho\uparrow 1} H(R(\rho e^{i\theta})) = H(R(e^{i\theta})) = f'_{\partial G}(R(e^{i\theta})),$$

то почти всюду на $[0, 2\pi]$ $h(e^{i\theta}) = f'_{\partial G}(R(e^{i\theta}))$. Из этого равенства и из (15) имеем

$$H(R(w)) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f'_{\partial G}(R(e^{i\theta})) P(w, \theta)\, d\theta \quad (|w| < 1).$$

Вместе с (14) это дает $f'(R(w)) \equiv H(R(w))$ $(|w| < 1)$, т. е. $f'(\zeta) \equiv H(\zeta)$ в D.

Так как это верно в каждой связной компоненте D множества G, то $f'(\zeta) \equiv H(\zeta)$ в G. Следовательно, функция f' может быть непрерывно продолжена во все регулярные граничные точки ∂G значениями $H(z) = f'_{\partial G}(z)$.

Для каждой иррегулярной граничной точки z_0 множества G, принадлежащей $(\partial G)_l \setminus (\partial G)_*$, существует порция ∂G с центром в z_0, устранимая для f, ибо эта функция ограничена на всякой ограниченной части G. Так как $z_0 \in (\partial G)_l$, то определена производная $f'_{\partial G}(z_0)$. Следовательно, f' непрерывно продолжается в точку z_0 значением $f'_{\partial G}(z_0)$.

Теорема 2 доказана.

1. *Тамразов П. М.* Усиленное контурно-телесное свойство для функций класса Липшица и продолжение производной на границу.— В кн.: Контурно-телесные теоремы и модули семейств кривых. Киев, 1983, с. 3—15. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 83.35).
2. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные свойства голоморфных функций и отображений.— Киев, 1983.— 17 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 83.33).
3. *Тамразов П. М.* Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного.— Успехи мат. наук, 1973, **28**, вып. 1, с. 131—161.
4. *Математическая энциклопедия.*— М. : Сов. энцикл., 1982.— Т. 3. 1184 с.
5. *Неванлинна Р.* Униформизация.— М. : Изд-во иностр. лит., 1955.— 435 с.
6. *Брело М.* Основы классической теории потенциала.— М. : Мир, 1964.— 212 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Поступила 08.04.84
после доработки — 09.01.85