УДК 519.40

А. К. Слипенко

Симметрические оперативы отображений

1. В работе [1] впервые началось изучение позиционных оперативов — общей точки зрения на многие известные классы алгебр с одной операцией произвольной арности. Напомним, что множество $S[\ ]$ с одной n-арной ($n \geqslant 2$) операцией называется P-оперативом с ассоциированной системой подстановок $\{\rho_i\}_{i=1}^n$, определенных на множестве $I_{2n-1} = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$, если для всех $x_i \in S$, $k \in I_n$ $[x_1 \dots x_{k-1} [x_k \dots x_{k+n-1}] x_{k+n} \dots x_{2n-1}] = [[x_{\rho_{k1}} \dots x_{\rho_{kn}}] x_{\rho_{k(n+1)}} \dots x_{\rho_{k(2n-1)}}] = [x_{\rho_{k1}} \dots x_{\rho_{k(2n-1)}}]$, где $\rho_1 = \varepsilon$ — тождественная подстановка. P-оператив называется Π-оперативом с ассоциированной системой подстановок $\{\sigma_k, \pi_k\}_{k=1}^n$ на множестве I_n, если $\pi_1 = \sigma_1 = \varepsilon$, для всех $k \in I_n$ $\sigma_k k = k$ и $[x_1 \dots x_{k-1} [y_1 \dots y_n] x_{k+1} \dots x_n] = [x_{\sigma_{k1}} \dots x_{\sigma_{k(k-1)}} \times y_{\pi_{k1}} \dots y_{\pi_{kn}} x_{\sigma_{k(k+1)}} \dots x_{\sigma_{kn}}]$. Если для всех k $\pi_k = \sigma_k = \varepsilon$, то Π-оператив называется ассоциативом; если же n — нечетно и для всех k $\sigma_k = \varepsilon$, $\pi_k = \varepsilon$ при k нечетном и $\pi_k = \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots n \\ n & n-1 & \dots 1 \end{pmatrix}$ при четном k, то Π-оператив называется альтернативом.

В первой части работы строятся P-оперативы отображений как производные от бинарной операции композиции преобразований. Вторая часть является продолжением работ [2, 3]. Здесь дано описание оперативов отображений с операцией скрещенного умножения без тех существенных ограничений на характер ассоциированных подстановок ($\rho_n = \varepsilon$, $\pi_n = \sigma_n = \varepsilon$), которые имели место в указанных работах.

2. Пусть $S(\cdot)$ — полугруппа с инволюцией λ. Во многих работах (см. напр., [4]) изучалась тернарная операция $[a_1 a_2 a_3] = a_3 \cdot \lambda a_2 \cdot a_1$, определенная на множестве S и удовлетворяющая косоассоциативному закону. Нетрудно проверить, что множество S относительно операции $[a_1 a_2 a_3] = a_2 \cdot \lambda a_1 \cdot a_3$ — P-оператив, для которого $\rho_1 = \varepsilon$, $\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим полугруппу $T(\circ)$ всех преобразований бесконечного множества Ω относительно операции композиции с инволюцией λ. На множестве T будем строить P-оперативы с n-арной операцией

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = a^*_{\alpha_1} \circ a^*_{\alpha_2} \circ \dots \circ a^*_{\alpha_r}, \tag{1}$$

где $\alpha_j \in I_n$, $a^*_{\alpha_j}$ равно либо a_{α_j}, либо λa_{α_j}. Мы не предполагаем, что $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} = I_n$. Кроме того, среди индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ не исключаются повторения.

Так как операция композиции преобразований в общем случае не коммутативна, то правые части выражений вида

$$[a_{\rho_k^{-1}1} \dots a_{\rho_k^{-1}(k-1)} [a_{\rho_k^{-1}k} \dots a_{\rho_k^{-1}(k+n-1)}] a_{\rho_k^{-1}(k+n)} \dots a_{\rho_k^{-1}(2n-1)}] = a^*_{\beta_1} \circ a^*_{\beta_2} \circ \dots \circ a^*_{\beta_s} \tag{2}$$

должны совпадать при всех $k \in I_n$.

2.1. Прежде всего рассмотрим случай, когда $[a_1 \dots a_n] = \underbrace{a^*_i \circ \dots \circ a_i}_{m \text{ раз}}$. В случае $m > 1$ правая часть (2) имеет m^m сомножителей при $k = i$ и m сомножителей в других случаях. Отсюда $m = 1$, т. е. $[a_1 \dots a_n] = a^*_i$. Нетрудно описать систему подстановок $\{\rho_k\}_{k=1}^n$ для данного типа P-оперативов. Здесь

$$\rho_k^{-1}(i+n-1) = \begin{cases} i+n-1, & \text{если } 1 \leqslant k \leqslant i-1; \\ 2i-1, & \text{если } k = 1; \\ i, & \text{если } i+1 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

Остальные индексы подстановками ρ_k^{-1} преобразуются произвольно.

2.2. В п. 2 указаны примеры P-оперативов с операцией

$$[a_1 \dots a_n] = a^*_{\pi 1} \circ \dots \circ a^*_{\pi n}, \tag{3}$$

где π — некоторая подстановка на множестве I_n. Здесь все n-арные сомножители левой части (3) фигурируют в правой части, т. е. являются активными, причем входят они туда с кратностью 1.

Докажем, что если правая часть (1) содержит r различных сомножителей, $r \geqslant 2$, то $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} = I_n$, т. е. неактивных мест n-арная операция не содержит.

В самом деле, пусть a_p принадлежит семейству $\{a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_r}\} = A_r$ и в то же время a_l не принадлежит $(1 \leqslant p,\ l \leqslant n)$. Тогда правая часть (2) при $k = p$ содержит $2r - 1$ сомножитель, а при $k = l$ только r. Но равенство $2r - 1 = r$ невозможно при $r \geqslant 2$.

Если же в семейство A некоторые элементы входят с кратностью, больше 1, то и в этом случае $A_r = I_n$. Докажем это. Пусть, для определенности, a_p входит в семейство A_r наибольшее число — x раз. Рассматривая количество сомножителей в правой части (2) при $k = p$ и $k = l$, получаем $r + x(r - 1) = r$, что возможно лишь при $r = 1$.

2.3. Покажем, что в семейство A_r все элементы a_i, $i = 1, \dots, n$, входят с одинаковой кратностью. Пусть кратность вхождения a_p — x, a_l — y, тогда при $k = p$ правая часть (2) имеет $r + x(r - 1)$, а при $k = l - r + y(r - 1)$ сомножителей. Так как $r > 1$, то $x = y$.

2.4. Убедимся, наконец, в том, что любой элемент a_i входит в семейство A_r с кратностью 1. Случай, когда все элементы семейства A_r равны между собой, уже рассмотрен в п. 2.1. Пусть теперь A_r содержит по крайней мере два различных элемента. Тогда $A_r = I_n$ и все элементы a_i (согласно п. 2.3) входят в семейство A_r с кратностью x, $x \geqslant 1$. Пусть, для определенности, $a_{\alpha_1} = a_t$ (см. (1)). Тогда

$$[a_1 \dots a_{t-1} [a_t \dots a_{t+n-1}]\, a_{t+n} \dots a_{2n-1}] = a^*_p \circ \dots \circ a^*_q, \tag{4}$$

где $p \in \{t, t + 1, \dots, t + n - 1\}$, причем a_p входит в правую часть (4) с кратностью x^2. Если в левой части (4) скобки переместить на $(t - 1)$-е либо на $(t + 1)$-е место, то под действием соответствующих подстановок a_p должен занять t-е либо $(t + n - 1)$-е место. В результате кратность вхождения a_p станет равной x. Следовательно, $x = 1$.

2.5. Рассуждения, приведенные в пп. 2.1—2.4, позволяют сделать вывод, что операция (1) может иметь один из следующих видов:

$$[a_1 \dots a_n] = a^*_i, \quad i \in I_n, \quad [a_1 \dots a_n] = a^*_{\pi 1} \circ \dots \circ a^*_{\pi n}, \tag{5}$$

где π — некоторая подстановка на множестве I_n.

2.6. Рассмотрим порядок расположения инволюций в равенстве (5). Заметим, что этот порядок не зависит от характера подстановок π, поэтому для упрощения записи можно считать, что

$$[a_1 \dots a_n] = a^*_1 \circ \dots \circ a^*_n. \tag{6}$$

Прежде всего отметим, что $a^*_1 = a_1$. В противном случае в правой части (2) при $k = n$ на первом месте стоит инволютированный сомножитель, а при $k = 1$ — без инволюции. Аналогично, $a^*_n = a_n$.

Пусть количество инволютированных сомножителей в (6) равно x. Тогда правая часть (2) при $k = 1$ содержит $2x$ таких сомножителей, а при $k = l$, где $a^*_l = \lambda a_l$, $- n - 1$. Отсюда $x = (n - 1)/2$.

Таким образом, если операция (5) содержит хотя бы один инволютированный сомножитель, то ее арность — число нечетное, причем количество инволютированных элементов равно $(n - 1)/2$.

Нетрудно выявить и взаимное расположение инволютированных и неинволютированных сомножителей. Заметим, что $[a_1 \dots a_{2n-1}] = a_1 \circ a^*_2 \circ \dots \circ a^*_{n-1} \circ a_n \circ a^*_{n+1} \circ \dots \circ a^*_{2n-2} \circ a_{2n-1}$. И если $a^*_2 = a_2$, то $[a_1 \dots a_{2n-1}] = a_1 \circ [a_2 \dots a_{n+1}] \circ \dots \circ a_{2n-1} = a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ a^*_4 \circ \dots \circ a_{2n-1}$, т. е. $a^*_3 = a_3$. Аналогично, $a_i^* = a_i$, $i = 4, \ldots, n-1$. Если же $a_2^* = \lambda a_2$, то, очевидно, $a_{n-1}^* = \lambda a_{n-1}$, $[a_1 \ldots a_{2n-1}] = a_1 \circ \lambda\ [a_2 \ldots a_{n+1}] \circ \ldots \circ a_{2n-1} = a_1 \circ \lambda a_{n+1} \circ \lambda^2 a_n \circ \ldots \circ a_{2n-1} = a_1 \circ \lambda a_{n+1} \circ \ldots \circ a_{2n-1}$, т. е. $a_3^* = a_3$. Проводя дальше аналогичные рассуждения, получаем $a_i^* = a_i$, если i нечетно, и $a_i^* = \lambda a_i$ при четном i.

2.7. Итак, формула (1) имеет вид либо $[a_1 \ldots a_n] = a_i$, $i \in I_n$, либо $[a_1 \ldots a_n] = a_{\pi 1} a_n \circ \ldots \circ a_{\pi n}$, либо $[a_1 \ldots a_n] = a_{\pi 1}^* \circ \ldots \circ a_{\pi n}^*$, где n нечетно, $a_{\pi i}^* = a_{\pi i}$ при нечетном i, $a_{\pi i}^* = \lambda a_{\pi i}$ при i четном.

2.8. Правила пп. 2.5, 2.7 в действительности позволяют строить P-оперативы отображений, причем ассоциированные подстановки ρ_k получаем при сопоставлении выражений для $[a_1 \ldots a_{k-1} [a_k \ldots a_{k+n-1}]\, a_{k+n} \ldots a_{2n-1}]$ и $[a_1 \ldots a_{2n-1}]$, $k \in I_n$.

3. Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ — последовательность бесконечных множеств, $F(\Omega_j, \Omega_i)$ — множество всех отображений Ω_j в Ω_i. Будем строить П-оперативы на кортежах типа $\bar{a}_i = (a_1^i, \ldots, a_r^i)$, где $a_k^i \in F(\Omega_{p_i}, \Omega_{q_k})$, $p_i, q_k \in I_m$, с операцией $[\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n] = \bar{a}$, где j-я компонента кортежа $\bar{a}$ получается путем обычной композиции компонент кортежей-сомножителей:

$$a_j = a_{l_{1j}}^{t_{1j}} \circ a_{l_{2j}}^{t_{2j}} \circ \ldots \circ a_{l_{sj}}^{t_{sj}}, \quad t_{kj} \in I_n,\ l_{kj} \in I_r. \tag{7}$$

Назовем такие оперативы симметрическими П-оперативами отображений со скрещенным умножением.

Хотя мы не налагаем никаких ограничений на последовательности индексов $L_{j,n} = \langle l_{1j}, l_{2j}, \ldots, l_{sj} \rangle$, $T_{j,n} = \langle t_{1j}, t_{2j}, \ldots, t_{sj} \rangle$, но возможности построения композиции, характер законов типа ассоциативности для П-оперативов позволяет выявить определенные закономерности в их строении.

В дальнейшем последовательности верхних и нижних индексов в выражении для j-й компоненты произведения $[\bar{a}_{\sigma_k 1} \ldots \bar{a}_{\sigma_k(k-1)} \bar{b}_{\pi_k 1} \ldots \bar{b}_{\pi_k n} \bar{a}_{\sigma_k(k+1)} \ldots \ldots \bar{a}_{\sigma_k n}]$ будем обозначать соответственно через $T_{j,2n-1}$ и $L_{j,2n-1}$.

В качестве примера П-оперативов отображений можно взять стандартные ассоциативы либо альтернативы [1, 5]. Для стандартных ассоциативов $s = n$, $r = n-1$, $a_j = a_j^1 \circ a_{j+1}^2 \circ \ldots \circ a_j^n$ (нижние индексы берутся по модулю $n-1$).

3.1. Прежде всего отметим, что в формуле (6) $t_{1j}, t_{sj} \in \{1, n\}$. Допустим противное — что $t_{1j}, t_{sj} \notin \{1, n\}$. Рассмотрим тождество

$$[\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{n-1} [\bar{b}_1 \ldots \bar{b}_n]] = [[\bar{a}_{\sigma_n 1} \ldots \bar{a}_{\sigma_n(n-1)} \bar{b}_{\pi_n 1}]\, \bar{b}_{\pi_n 2} \ldots \bar{b}_{\pi_n n}]. \tag{8}$$

Как и в п. 2, мы считаем, что для j-й компоненты c_j левой и правой части (8) мы должны получить одно и то же выражение в виде композиции компонент сомножителей. Однако для левой части $c_j = a_\alpha \circ \ldots$, где a_α — компонента одного из кортежей $\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{n-1}$, а для правой части $c_j = b_\beta \circ \ldots$, где b_β — компонента некоторого кортежа из совокупности $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n$. Получили противоречие.

Далее, если $n \notin T_{j,n}$ либо $1 \notin T_{j,n}$, то $2, \ldots, n-1 \notin T_{j,n}$.

Действительно, если $1 \notin T_{j,n}$, $i \in T_{j,n}$, $i = 2, \ldots, n-1$, то последовательность $T_{j,2n-1}$ для левой части (8) содержит индекс, соответствующий кортежу $\bar{a}_i$, а для правой части — не содержит.

3.2. Если $l \notin T_{j,n}$, $l, k \neq 1, 2$, то $k \notin T_{j,n}$.

Достаточно доказать это утверждение для $k = l+1$ и $k = l-1$. Пусть, например, $k = l+1 \in T_{j,n}$, тогда, сдвигая в выражении

$$[\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{l-1} [\bar{a}_l \ldots \bar{a}_{l+n-1}]\, \bar{a}_{l+n} \ldots \bar{a}_{2n-1}] \tag{9}$$

скобки на $(l+1)$-е место согласно системе ассоциированных подстановок, мы увидим, что в первом случае $l+n$ принадлежит $T_{j,2n-1}$, а во втором — нет. Случай $k = l-1$ аналогичен.

3.3. При $n > 2$ $T_{j,n} \neq \{1, n\}$.

Доказательства очевидны.

3.4. Из пп. 3.1 — 3.3 следует, что $T_{j,n}$ может равняться либо $\{1\}$, либо $\{n\}$, либо I_n.

3.5. В дальнейшем ограничимся наиболее интересным случаем, когда для всех j $T_{j,n} = I_n$. Покажем, что каждая компонента любого кортежа $\bar{a}_i$ произведения $[\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n] = \bar{a}$ участвует ровно один раз в образовании компонент кортежа $\bar{a}$ при условии «активности» компонент, т. е. влиянии их на результат выполнения операции.

Пусть индекс i входит в последовательности $T_{j,n}$, $j = 1, \ldots, r$, k_i раз. Это же число раз i встречается и в последовательностях $T_{j,2n-1}$ произведения (9) при $l = n$. Сдвинем в этом произведении скобки на первое место. В соответствии с ассоциированной системой подстановок кортеж $\bar{a}_i$ должен занять положение сомножителя, каждая компонента которого участвует один раз в образовании компоненты произведения. Но таких мест должно быть не менее $n - 1$. Без труда проверяется, что и оставшееся место должно обладать отмеченным свойством. Следовательно, в формуле (7) $s = n$ и последовательность $T_{j,n}$ является некоторой перестановкой множества I_n.

3.6. Из условий t_{1j}, $t_{sj} \in \{1, n\}$ (см. п. 3.1) вытекает, что в ассоциированной системе подстановок для П-оперативов отображений $\sigma_k 1 = 1$, $\sigma_k n = n$, $k = 1, \ldots, n$. В п п. 3.6 — 3.8 приведено доказательство того, что на самом деле все подстановки σ_k тождественны, а все подстановки π_k либо тождественны, либо равны τ (см. п. 1). Рассмотрим последовательность $L_{j,n}$ в формуле (7).

Назовем компоненту a_j прямой, если $t_{1j} = 1$, и инверсной, если $t_{1j} = n$. Покажем, что в последовательности $L_{j,n}$ $l_{1j} = j$. Пусть $l_{1j} = k$ и, для определенности, a_j — прямая компонента. Тогда $a_j = a_k^1 \circ a_{l_{2j}}^{t_{2j}} \circ \ldots$, и, в свою очередь, $a_k = a_p^{t_{1k}} \circ a_{l_{2k}}^{t_{2k}} \circ \ldots$. Для произведения $[[\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n]\, \bar{a}_{n+1} \ldots \bar{a}_{2n-1}]$ $a_j = a_p^{t_{1k}} \circ \ldots$. Однако для равного произведения $[\bar{a}_1 [\bar{a}_{\alpha_2} \ldots \bar{a}_{\alpha_{n+1}}]\, \bar{a}_{\alpha_{n+2}} \ldots \ldots \bar{a}_{\alpha_{2n-1}}]$ $a_j = a_k^1 \circ \ldots$. Отсюда $k = p$, $t_{1k} = 1$, т. е. $a_k = a_k^1 \circ \ldots$. Но из простых соображений перебора можно считать, что a_k — произвольная компонента произведения. Следовательно, для всех k $l_{1k} = k$.

3.7. Докажем, что последовательности $L_{j,n}$, $j = 1, \ldots, r$, можно перенумеровать так, что каждая из них получается из предыдущей циклической перестановкой индексов (первый занимает последнее место).

Рассуждения здесь повторяют, по существу, п. 2.9 работы [3]. Выписываем компоненту a произведения $[\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{2n-1}]$

$$a_j = a_j^1 \circ a_{l_{2j}}^{t_{2j}} \circ a_{l_{3j}}^{t_{3j}} \circ \ldots. \tag{10}$$

Затем перемещаем скобки на места t_{2j}, t_{3j}, ... Замечаем, что компоненты кортежа, заключенного в скобки, составляют блок длины n в произведении (9). Два рядом стоящих блока отличаются (по нижним индексам) циклической перестановкой первого элемента на последнее место.

3.8. Покажем, наконец, что последовательность $T_{j,n}$ совпадает с последовательностью $1, 2, \ldots, n$ для прямых и с последовательностью $n, n - 1, \ldots, 1$ для инверсных компонент.

Пусть, для определенности, a_j — прямая компонента, и предположим, что $t_{2j} = k \neq 2$. Тогда в правой части (10) вслед за a_j^1 стоит блок из $n - 1$ сомножителей, каждый из которых является компонентой одного из кортежей $\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$. А для равного произведения $[\bar{a}_1 \bar{a}_{\alpha_2} \ldots \bar{a}_{\alpha_{k-1}} [\bar{a}_{\alpha_k} \ldots \bar{a}_{\alpha_{k+n-1}}] \times \times \bar{a}_{\alpha_{k+n}} \ldots \bar{a}_{\alpha_{2n-1}}]$ этот блок составляют компоненты кортежей $\bar{a}_k, \ldots, \bar{a}_{k+n-1}$. Совершенно аналогично можно показать, что $t_{3j} = 3$ и т. д. Для инверсных компонент рассуждения аналогичны.

3.9. Т е о р е м а 1. *Всякий симметрический* П-*оператив отображений со скрещенным умножением является ассоциативом либо альтернативом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из пп. 3.4—3.8, см. также п. 2.6.

3.10. Назовем ассоциатив или альтернатив неприводимым, если все нижние индексы компонент его кортежей составляют одно множество $L_{j,n}$

при некотором j (п. 3). В силу симметричности П-оператива, а также п. 3.6, справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Всякий симметрический* П-*оператив является прямым произведением неприводимых.*

Заметим, что неприводимые ассоциативы и альтернативы несущественно отличаются от стандартных (см. [2, 5], а также п. 3).

4. Комбинируя приемы, примененные в пп. 2—3.8, можно получить описание симметрических P-оперативов ($\rho_n \neq \varepsilon$) как прямого произведения некоторых неприводимых (не являющихся в общем случае ассоциативами или альтернативами). Для неприводимых P-оперативов нижние индексы произведения (6) получаются по пр вилам п. 3.7, а о характере расположения верхних индексов можно получить представление из п. 2.5 (инволюция соответствует инверсным компонентам).

Нетрудно (см. п. 3.1 из [3]) восстановить и системы ассоциированных подстановок для P-оперативов отображений.

1. *Глускин Л. М.* Позиционные оперативы.— Мат. сб., 1965, **68**, № 3, с. 444—471.
2. *Сліпенко А. К.* Позиційні оперативи відображень.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1969, № 2, с. 143—147.
3. *Слипенко А. К.* Симметрические P-оперативы.— Изв. вузов. Математика, 1972, № **4**, с. 102—108.
4. *Вагнер В. В.* Теория обобщенных групп и обобщенных груд.— Мат. сб., 1953, **32**, № 3, с. 545—632.
5. *Сліпенко А. К.* Зображення операторів.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1970, № 3, с. 226—230.

Донец. ун-т

Поступила 12.11.83