УДК 517.432

Ю. М. Березанский

О проекционной спектральной теореме

Эта работа примыкает к статье [1], в которой показано, что для семейства коммутирующих нормальных операторов, действующих в оснащенном гильбертовом пространстве, спектральную теорему можно записать с выделением «проекторов» на обобщенные собственные подпространства. Именно, здесь мы доказываем, что наличие достаточно хороших спектральных представлений для операторов семейства автоматически влечет существование должного оснащения пространства, а затем сравниваем проекционную спектральную теорему с подходом к этим вопросам на основе теории коммутативных нормированных алгебр и получающейся на этом пути ядерной спектральной теоремой [2].

1. Пусть H_0 — сепарабельное гильбертово пространство, $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ — его квазиядерное оснащение (т. е. оператор вложения $H_+ \to H_0$ — Гильберта — Шмидта), $D \subseteq H_+$ — линейное топологическое пространство, топологически (т. е. плотно и непрерывно) вложенное в H_+. Цепочку

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supseteq D \tag{1}$$

будем называть квазиядерной. Предположим, что имеется семейство $A = (A_x)_{x \in X}$ действующих в H_0 нормальных коммутирующих операторов A_x. Будем говорить, что цепочка (1) и A стандартно связаны, если при каждом $x \in X$ D входит в область определения $\mathfrak{D}(A_x)$ оператора A_x и сужения $A_x \upharpoonright D$, $A_x^* \upharpoonright D$ непрерывно действуют из D в H_+. Пусть $\mathbb{C}^X$ — совокупность всех функций $X \ni x \mapsto \lambda(x) \in \mathbb{C}^1$. Для стандартно связанных A и (1) вводится понятие обобщенного совместного собственного вектора φ с собственным значением $\lambda(\cdot)\in\mathbb{C}^X$: ненулевой вектор $\varphi\in H_-$ должен удовлетворять равенствам $(\varphi, A_x^*u)_{H_0}=\lambda(x)(\varphi, u)_{H_0}$, $(\varphi, A_xu)_{H_0}=\overline{\lambda(x)}(\varphi, u)_{H_0}$; $u\in D$, $x\in X$. Совокупность $g(A)$ всевозможных собственных значений $\lambda(\cdot)$ называется обобщенным спектром семейства A.

В [1] доказан следующий результат, вытекающий из теоремы 3.2 этой работы (см. замечание 1 к ней): пусть D — сепарабельный проективный предел гильбертовых пространств; тогда операторы A_x допускают спектральное представление

$$A_x=\int_\tau \lambda(x)\,dE(\lambda(\cdot)),\ \mathfrak{D}(A_x)=\left\{f\in H_0 \,\Big|\, \int_\tau |\lambda(x)|^2 d(E(\lambda(\cdot))f, f)_{H_0}<\infty\right\}. \quad (2)$$

Здесь $\tau\subseteq\mathbb{C}^X$ — произвольное зафиксированное множество, содержащее $g(A)$ (или даже некоторое специальное подмножество $\pi\subseteq g(A)$, см. п. 2), E — разложение единицы (зависящее от τ), определенное на σ-алгебре $\mathcal{C}_\sigma(\tau)$, состоящей из пересечений всевозможных обобщенных цилиндрических множеств из $\mathbb{C}^X$ с τ. (Поясним, что в случае $\tau=\mathbb{C}^X$ этот результат тривиален и вытекает из спектральной теоремы, нетривиальность возникает при переходе к произвольному $\tau\supseteq g(A)$.)

В этом пункте мы приведем доказательство в некотором отношении обратной теоремы, показывающей, что наличие представления (2) с достаточно «хорошим» множеством τ влечет существование квазиядерной цепочки (1), стандартно связанной с семейством $(A_x)_{x\in X}$. Введем необходимые определения.

Зафиксируем $\tau\subseteq\mathbb{C}^X$. Пусть имеется цепочка

$$\mathcal{H}(\tau)\supseteq D(\tau), \quad (3)$$

в которой $\mathcal{H}(\tau)$ — некоторое гильбертово пространство, состоящее из измеримых относительно $\mathcal{C}_\sigma(\tau)$ функций $\tau\ni\lambda(\cdot)\to a(\lambda(\cdot))\in\mathbb{C}^1$, $D(\tau)$ — линейное топологическое пространство, причем вложение (3) топологическое. Предположим: а) для каждого $\lambda(\cdot)\in\tau$ выполняется оценка $|a(\lambda(\cdot))|\leqslant c_{\lambda(\cdot)}\|a\|_{\mathcal{H}(\tau)}$, $a\in\mathcal{H}(\tau)$; б) для каждого $x\in X$ определены и непрерывны операторы умножения $D(\tau)\ni a(\lambda(\cdot))\mapsto\lambda(x)\ a(\lambda(\cdot))$, $\overline{\lambda(x)}\ a(\lambda(\cdot))\in\mathcal{H}(\tau)$; в) пусть $\varepsilon(\lambda(\cdot))$ — единица, деленная на норму функционала $\mathcal{H}(\tau)\ni a\mapsto a(\lambda(\cdot))\in\mathbb{C}^1$, требуется, чтобы каждый конечный заряд (комплекснозначная мера) $\mathcal{C}_\sigma(\tau)\ni\alpha\mapsto\eta(\alpha)\in\mathbb{C}^1$, для которого $\int_\tau a(\lambda(\cdot))\,\varepsilon(\lambda(\cdot))\times d\eta(\lambda(\cdot))=0$, $a\in\mathcal{H}(\tau)$, равнялся нулю.

Цепочку (3), для которой выполняются условия а)—в), будем называть допустимой. Поясним, что функционал, фигурирующий в в) — это «дельта-функция $\delta_{\lambda(\cdot)}$, сосредоточенная в точке $\lambda(\cdot)$», ее существование вытекает из а); подынтегральная функция в в) ограничена и, как легко понять, измерима относительно $\mathcal{C}_\tau(\tau)$.

Теорема 1. *Пусть для множества $\tau\subseteq\mathbb{C}^X$ существует допустимая цепочка* (3). *Тогда можно построить квазиядерную цепочку* (1), *стандартно связанную с семейством операторов* (2), *при этом D — сепарабельный проективный предел гильбертовых пространств.*

Доказательство. I. Отметим одну формулу для подсчета $\varepsilon(\lambda(\cdot))$. Пусть $(e_j)_{j=1}^\infty$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}(\tau)$; понимая $\delta_{\lambda(\cdot)}$ как вектор из $\mathcal{H}(\tau)$, получим: $\delta_{\lambda(\cdot)}=\sum_{j=1}^\infty(\delta_{\lambda(\cdot)}, e_j)_{\mathcal{H}(\tau)}e_j=\sum_{j=1}^\infty\overline{e_j(\lambda(\cdot))}\,e_j$, откуда $\varepsilon(\lambda(\cdot))=\|\delta_{\lambda(\cdot)}\|_{\mathcal{H}(\tau)}^{-1}=\left(\sum_{j=1}^\infty|e_j(\lambda(\cdot))|^2\right)^{-1/2}$, $\lambda(\cdot)\in\tau$ (из этой формулы вытекает, в частности, измеримость $\varepsilon(\cdot)$).

II. Зафиксируем вектор $l_1\in H_0$, $\|l_1\|_{H_0}=1$, и введем линейное отображение

$$\mathcal{H}(\tau)\ni a\mapsto Q_1a=\int_\tau a(\lambda(\cdot))\,\varepsilon(\lambda(\cdot))\,dE(\lambda(\cdot))\,l_1\in H_0. \quad (4)$$

При помощи I легко установить, что это отображение Гильберта — Шмидта, причем норма Гильберта — Шмидта $|Q_1|=1$. Рассмотрим ядро оператора Q_1, т. е. подпространство $\{a\in\mathcal{H}(\tau)\mid Q_1a=0\}$. Пусть F — ортогональное к нему дополнение и $R=Q_1\upharpoonright F$. Выбирая ортонормированный базис $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ так, чтобы его векторы содержались в этом ядре и в F, найдем, что $|R|=|Q_1|=1$, и поэтому $\|R\|\leqslant 1$. На области значений $\mathfrak{R}(R)=\mathfrak{R}(Q_1)\subseteq H_0$ существует замкнутый обратный оператор R^{-1}, причем $\|R^{-1}f\|_{\mathcal{H}(\tau)}\geqslant\|f\|_{H_0}$, $f\in\mathfrak{R}(R)$.

Превратим $\mathfrak{R}(R)\subseteq H_0$ в гильбертово пространство $H_{+,1}$, полагая $(u,v)_{H_{+,1}}=\varkappa_1(R^{-1}u,R^{-1}v)_{\mathcal{H}(\tau)}$, $u,v\in\mathfrak{R}(R)$, где $\varkappa_1\geqslant 1$ — некоторое фиксированное число. Очевидно, $H_{+,1}$ полное, $\|\cdot\|_{H_{+,1}}\geqslant\|\cdot\|_{H_0}$, и вложение $O_1:H_{+,1}\to H_0$ квазиядерное, причем $|O_1|=\varkappa_1^{-1/2}$. Таким образом, если P — проектор в $\mathcal{H}(\tau)$ на F, то

$$(Q_1a,Q_1b)_{H_{+,1}}=\varkappa_1(Pa,Pb)_{\mathcal{H}(\tau)},\qquad a,b\in\mathcal{H}(\tau). \tag{5}$$

III. При помощи процедуры ортогонализации построим из векторов $D(\tau)$ ортонормированный базис $(h_j)_{j=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathcal{H}(\tau)$ и зафиксируем его. Пусть $D_0(\tau)$ — совокупность всех векторов пространства $\mathcal{H}(\tau)$, имеющих финитную последовательность координат по этому базису; $D_0(\tau)\subseteq D(\tau)$ и плотно в $\mathcal{H}(\tau)$.

Положим $D_1=Q_1D_0(\tau)\subseteq\mathfrak{R}(Q_1)=H_{+,1}$. Из (5) и плотности $D_0(\tau)$ в $\mathcal{H}(\tau)$ следует плотность D_1 в $H_{+,1}$. Каждый вектор из D_1 имеет вид $u=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(Q_1h_j)$, где $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$, $\alpha_j\in\mathbb{C}^1$, — произвольная финитная последовательность; $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_jh_j=a$ — произвольный вектор из $D_0(\tau)$. Векторы Q_1h_1, $Q_2h_2,\ldots$, вообще говоря, линейно зависимы. Просеивая эту последовательность при движении слева направо, построим ее подпоследовательность $(Q_1f_{1,k})_{k=1}^{\infty}$, $f_{1,k}=h_{j_k}$, состоящую уже из линейно независимых векторов. Векторы из D_1 теперь будут иметь вид $u=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(Q_1f_{1,k})$, где $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, $\xi_k\in\mathbb{C}^1$, — произвольная финитная последовательность, однозначно определяемая по u (последовательность координат u). Введем в D_1 сходимость: при $h\to\infty$ $D_1\ni u^{(n)}\to u\in D_1$, если соответствующие координаты $\xi_k^{(n)}$ равномерно финитны и $\xi_k^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\xi_k$ при каждом $k=1,2,\ldots$. Этой сходимости отвечает следующая топология. Рассмотрим гильбертово пространство $G_{1,\sigma}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(Q_1f_{1,k})\,\middle|\,\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\sigma_k<\infty\right\}$ $(\sigma=(\sigma_k)_{k=1}^{\infty},\ \sigma_k\geqslant 1$ — вес) с соответствующим скалярным произведением, тогда $D_1=\operatorname{prlim}G_{1,\sigma}$, где проективный предел берется по всем весам σ.

IV. Вложение $D_1\subseteq H_{+,1}$ топологическое. Вытекает это из топологичности вложения $D(\tau)\subseteq\mathcal{H}(\tau)$ и (5).

V. Покажем, что $D_1\subseteq\mathfrak{D}(A_x)$ $(x\in X)$. Из (2) следует, что вектор $f=\int_\tau F(\lambda(\cdot))\,dE(\lambda(\cdot))\,l$, где $l\in H_0$, а $\tau\ni\lambda(\cdot)\mapsto F(\lambda(\cdot))\in\mathbb{C}^1$ измерима относительно $\mathcal{C}_\sigma(\tau)$, входит в $\mathfrak{D}(A_x)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_\tau|\lambda(x)F(\lambda(\cdot))|^2\,d(E(\lambda(\cdot))\,l,l)_{H_0}<\infty;\quad A_xf=\int_\tau\lambda(x)F(\lambda(\cdot))\,dE(\lambda(\cdot))\,l. \tag{6}$$

Пусть $a\in D_0(\tau)\subseteq D(\tau)$, благодаря условию б) $\lambda(x)\,a(\lambda(\cdot))\in\mathcal{H}(\tau)$ и, следовательно, функция $\tau\ni\lambda(\cdot)\mapsto\lambda(x)\,a(\lambda(\cdot))\,\varepsilon(\lambda(\cdot))\in\mathbb{C}^1$ ограничена.

Поэтому условие (6) для вектора $u = Q_1 a = f$, задающегося формулой (4), выполняется (векторы u пробегают все D_1).

VI. Операторы $A_x \restriction D_1$, $A_x^* \restriction D_1$ действуют непрерывно из D_1 в $H_{+,1}$ ($x \in X$). Доказывается это при помощи соотношений (4) — (6) на основании требования б).

VII. Резюмируя II — VI, заключаем: построена цепочка

$$H_0 \supseteq H_{+,1} \supseteq D_1, \ \|u\|_{H_0} \leqslant \|u\|_{H_{+,1}} \qquad (u \in H_{+,1}), \tag{7}$$

причем вложение $O_1 : H_{+,1} \to H_0$ квазиядерное, $|O_1| = \varkappa_1^{-1/2}$; вложение $D_1 \subseteq \subseteq H_{+,1}$ топологическое; D_1 — сепарабельный проективный предел гильбертовых пространств. Для каждого $x \in X$ $D_1 \subseteq \mathfrak{D}(A_x)$ и сужения $A_x \restriction D_1$, $A_x^* \restriction D_1$ действуют непрерывно из D_1 в $H_{+,1}$.

VIII. Предположим, что $H_{+,1}$ неплотно в H_0. Пусть $l_2 \in H_0$, $\|l_2\|_{H_0} = 1$, ортогонально в H_0 к $H_{+,1}$. Повторяя рассуждения II — VI с заменой l_1 на l_2 и фиксируя вместо $\varkappa_1$ некоторое другое $\varkappa_2 \in [1, \infty)$, получим вместо (7) цепочку с аналогичными свойствами $H_0 \supseteq H_{+,2} \supseteq D_2$.

При помощи условия в) нетрудно доказать, что линейные множества $H_{+,1}$ и $H_{+,2}$ ортогональны в пространстве H_0: так как $l_2 \perp H_{+,1}$, то согласно (4) $0 = (Q_1 a, l_2)_{H_0} = \int\limits_\tau a(\lambda(\cdot))\, \varepsilon(\lambda(\cdot))\, d(E(\lambda(\cdot))\, l_1, l_2)_{H_0}$ $(a \in \mathscr{H}(\tau))$; в силу в) $(E(\alpha)\, l_1, l_2)_{H_0} = 0$ $(\alpha \in \mathscr{C}_\sigma(\tau))$ и поэтому благодаря (4) получим

$$(Q_1 a, Q_2 b)_{H_0} = \int\limits_\tau a(\lambda(\cdot))\, \overline{b(\lambda(\cdot))}\, \varepsilon^2(\lambda(\cdot))\, d(E(\lambda(\cdot))\, l_1, l_2)_{H_0} = 0, \ a, b \in \mathscr{H}(\tau).$$

IX. Из предыдущего вытекает, что $H_0 \supseteq H_{+,1} \oplus H_{+,2} \supseteq D_1 \oplus D_2$, где $\oplus$ обозначает ортогональную сумму в H_0. Если $H_{+,1} \oplus H_{+,2}$ плотно в H_0, то построение заканчивается. Если нет, то выбираем вектор $l_3 \in H_0$, $\|l_3\|_{H_0} = 1$, ортогональный $H_{+,1} \oplus H_{+,2}$, и число $\varkappa_3 \in [1, \infty)$ и строим аналогичную (7) цепочку и т. д. В результате получим цепочку

$$H_0 \supseteq \bigoplus_{m=1}^\infty H_{+,m} \supseteq \bigoplus_{m=1}^\infty D_m, \tag{8}$$

где $\bigoplus_{m=1}^\infty H_{+,m}$ уже плотно в H_0 (слагаемых может быть и конечное число). Числа $\varkappa_m$ будем выбирать так, чтобы $\sum\limits_{m=1}^\infty \varkappa_m^{-1} < \infty$.

Превратим $H_+ = \bigoplus_{m=1}^\infty H_{+,m}$ в гильбертово пространство, полагая для $H_+ \ni u = (u_m)_{m=1}^\infty$ $(u_m \in H_{+,m})$ и аналогичного $v \in H_+$ $(u, v)_{H_+} = \sum\limits_{m=1}^\infty (u_m, v_m)_{H_{+,m}}$.

Далее, обозначим через D совокупность всех финитных последовательностей $u = (u_m)_{m=1}^\infty$ $(u_m \in D_m)$ со сходимостью: при $n \to \infty$ $D \ni u^{(n)} \to u \in D$, если соответствующие координаты $u_m^{(n)}$ равномерно финитны и $u_m^{(n)} \to u_m$ в D_m для каждого $m = 1, 2, \ldots$. Так как каждое D_m — сепарабельный проективный предел гильбертовых пространств (см. III), то и D будет таким: соответствующее гильбертово пространство $G_\sigma = \left\{ \sum\limits_{m,k=1}^\infty \xi_{m,k} (Q_m f_{m,k}) \,\middle|\, \sum\limits_{m,k=1}^\infty |\xi_{m,k}|^2 \sigma_{m,k} < \infty \right\}$. Здесь Q_m, $f_{m,k}$ — оператор Q_1 и векторы $f_{1,k}$, связанные с m-й цепочкой вида (7); $\sigma = (\sigma_{m,k})_{m,k=1}^\infty$, $\sigma_{m,k} \geqslant 1$ — вес. Сейчас $D = \mathrm{pr}\lim G_\sigma$, где проективный предел берется по всем весам σ. Ясно, что $\|\cdot\|_{H_0} \leqslant \|\cdot\|_{H_+}$ и D в силу IV топологически вложено в H_+.

Итак, в соответствии с (8) построена цепочка

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supseteq D. \tag{9}$$

Вложение $O: H_+ \to H_0$ квазиядерно, так как $O = \bigoplus_{m=1}^{\infty} O_m$, где $O_m: H_{+,m} \to$ $\to H_0$, и поэтому $|O|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |O_m|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \varkappa_m^{-1} < \infty$.

X. Покажем, что семейство операторов (2) стандартно связано цепочкой (9). В самом деле, $u \in D$ имеет вид финитной последовательности $u = (u_m)_{m=1}^{\infty}$, где $u_m \in D_m$. В силу V $D \subseteq \mathfrak{D}(A_x)$, при этом $A_x u = (A_x u_m)_{m=1}^{\infty}$ $(x \in X)$. Далее, если при $n \to \infty$ в $D\,(u_m^{(n)})_{m=1}^{\infty} = u^{(n)} \to 0$, то в силу характера этой сходимости последовательность $A_x u^{(n)} = (A_x u_m^{(n)})_{m=1}^{\infty}$ равномерно по n финитная и $A_x u_m^{(n)} \to 0$ в пространстве $H_{+,m}$ для каждого $m = 1, 2, \ldots$ (см. VI). Отсюда следует, что $A_x u^{(n)} \to 0$ в H_+.

З а м е ч а н и е 1. Вместо операторов (2) можно рассматривать их функции. Например, операторы A_x, задающиеся формулами (2), в которых $\tau \ni \lambda(\cdot) \mapsto \lambda(x) \in \mathbb{C}^1$ заменено на некоторую функцию $\tau \ni \lambda(\cdot) \mapsto F_x(\lambda(\cdot)) \in$ $\in \mathbb{C}^1$, измеримую относительно $\mathcal{C}_\sigma(\tau)$ $(x \in X)$. Легко понять, что теорема 1 сохраняется и в этом случае, если только в условии б) допустимости цепочки (3) заменить $\lambda(x)$ на $F_x(\lambda(\cdot))$.

З а м е ч а н и е 2. Пусть X — топологическое пространство, $(A_x)_{x \in X}$ — семейство операторов (2), задающихся функциями $F_x(\lambda(\cdot))$. При естественном дополнительном условии на эти функции будет выполняться аналогичное формуле (3.32) из работы [1] требование, обеспечивающее непрерывность собственных значений. Именно, как легко видеть из VI, оно будет выполняться, если для каждого $a \in D(\tau)$ вектор-функция $X \ni x \mapsto$ $\mapsto \overline{F_x(\lambda(\cdot))}\, a(\lambda(\cdot)) \in \mathcal{H}(\tau)$ слабо непрерывна.

З а м е ч а н и е 3. Теорема 1 развивает теоремы 4.3 и 4.4 главы 2 книги [3].

Приведем пример применения теоремы 1. *Для произвольного не более чем счетного семейства* $(A_x)_{x \in X}$ $(X = \{1, 2, \ldots, p\},\ p \leqslant \infty)$ *коммутирующих нормальных операторов всегда существует стандартно связанное с ним квазиядерное оснащение.*

В самом деле, пусть сперва $p < \infty$. Достаточно построить допустимую цепочку (3) в случае $\tau = \mathbb{C}^p$; $\mathcal{C}_\sigma(\tau)$ — σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{C}^p)$ борелевских множеств из $\mathbb{C}^p$. Отождествим $\mathbb{C}^p$ с $\mathbb{R}^{2p}$ и положим $\mathcal{H}(\tau) = W_2^l(\mathbb{R}^{2p}, (1 +$ $+ |\lambda|^2)^l\, d\lambda)$ $(l > p)$ (соболевское пространство с весом $(1 + |\lambda|^2)^l$), $D(\tau) =$ $= \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2p})$. Условия а), б) очевидно выполняются (а) — на основании теорем вложения, см. также [3, гл. 1, теоремы 3.4, 3.6]). Условие в) также выполняется, так как в качестве $a(\lambda)\,\varepsilon(\lambda)$ можно взять любую функцию из $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2p})$. В случае конечного числа операторов утверждение доказано.

Пусть $p = \infty$. Без ограничения общности можно считать, что операторы $(A_x)_{x \in X}$, $X = \{1, 2, \ldots\}$, — коммутирующие самосопряженные. Сейчас $\tau = \mathbb{R}^{\infty}$, $\mathcal{C}_\sigma(\tau) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty})$, $\lambda(\cdot) = \lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$. Воспользуемся следующим фактом: если $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty}) \ni \alpha \mapsto E(\alpha)$ — некоторое разложение единицы, то существует такой вес $\sigma = (\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ $(\sigma_n > 0)$, что $l_{2,\sigma} = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^{\infty} \,\Big|\, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \sigma_n < \infty\right\} \in$ $\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty})$ полной меры E. (Это утверждение известно в случае, когда E заменено на неотрицательную конечную меру ρ [4, гл. 1, § 1, лемма 3]. Беря в качестве ρ спектральную меру, отвечающую E, получим сформулированный результат.) Благодаря ему в интегралах (2) $\tau = \mathbb{R}^{\infty}$ можно заменить на $l_{2,\sigma}$ и считать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, $\sigma_n < 1$. Таким образом, согласно теореме 1 достаточно построить допустимую цепочку (3) в случае $\tau = l_{2,\sigma}$, $\mathcal{C}_\sigma(\tau) = \mathcal{B}(l_{2,\sigma})$. Эта цепочка строится при помощи пространств $A_t(\mathbb{R}^{\infty})$ основных функций бесконечного числа переменных, введенных в [5] (см. также [3, гл, 1, § 4, п. 5]). Именно, $\mathcal{H}(\tau) = (A_t(\mathbb{R}^{\infty})) \restriction l_{2,\sigma}$ $(t = (\sigma_n^{-1} - 1)_{n=1}^{\infty})$,

$D(\tau) = (P_{\text{ц}}(\mathbb{R}^\infty)) \upharpoonright l_{2,\sigma}$, где $P_{\text{ц}}(\mathbb{R}^\infty)$ — линейное пространство цилиндрических полиномов точки $\lambda \in \mathbb{R}^\infty$. Требуемые свойства цепочки (3) вытекают из [3, гл. 1, § 4, п. 5 и гл. 2, § 4, с. 228 — 229, 231 — 232]. ■

2. В [1] доказана проекционная спектральная теорема (теорема 3.2), заключающаяся в следующем. Существует некоторое множество $\pi \subseteq g(A)$ такое, что представление (2) имеет место с заменой τ на π и при этом разложение единицы $E = E_\pi$ можно продифференцировать: $dE_\pi(\lambda(\cdot)) = P(\lambda(\cdot))\, d\rho_\pi(\lambda(\cdot))$, где ρ_π — соответствующая спектральная мера, а $P(\lambda(\cdot)) : H_+ \to H_-$ — обобщенный проектор такой, что область значения $\mathfrak{R}(P(\lambda(\cdot)))$ состоит из обобщенных совместных собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda(\cdot)$. Выясним связи этой теоремы с теорией коммутативных нормированных алгебр и ядерной спектральной теоремой.

Пусть A — семейство *ограниченных* коммутирующих нормальных операторов; без ограничения общности можно предполагать, что $1 \in A$. Натянем на A алгебраическую оболочку и замкнем ее относительно сходимости по норме операторов, в результате получим операторную коммутативную C^*-алгебру $\mathcal{A}$. Пусть M — компакт ее максимальных идеалов ω; тогда $\mathcal{A}$ изометрически изоморфна алгебре $C(M)$ всех комплекснозначных непрерывных функций на M с обычными алгебраическими операциями и равномерной нормой. На σ-алгебре $\mathcal{B}(M)$ борелевских множествах из M существует разложение единицы $\mathcal{B}(M) \ni \alpha \mapsto F(\alpha)$, дающее представление каждого оператора алгебры $\mathcal{A}$ в виде спектрального интеграла:

$$a = \int_M a(\omega)\, dF(\omega) \qquad (a \in \mathcal{A}). \tag{10}$$

Здесь $a(\omega)$ — образ a при изоморфизме $\mathcal{A} \leftrightarrow C(M)$, т. е. значение соответствующего мультипликативного функционала ω на элементе $a : \omega(a) = a(\omega)$ [6, гл. 4, § 17, п. 4]. Топология в M — относительная топология, которая индуцируется тихоновской топологией в пространстве $\mathbb{C}^{\mathcal{A}} \supseteq M$.

Пусть $\omega \in M$; положим $\lambda_\omega(x) = \omega(A_x)$ $(x \in X;\ \lambda_\omega = \omega \upharpoonright A)$; отображение $\mathbb{C}^{\mathcal{A}} \supseteq M \ni \omega \mapsto \lambda_\omega(\cdot) \in \mathbb{C}^X$ взаимно однозначно. Обозначим через $\mu \subseteq \mathbb{C}^X$ компакт, являющийся образом M при этом отображении, топологизированный образом топологии (т. е. по существу μ — тот же компакт максимальных идеалов). Введем разложение единицы $\mathcal{B}(\mu) \ni \alpha \mapsto G(\alpha)$ — образ F. Представление (10) для $a = A_x$ примет вид $A_x = \int_\mu \lambda(x)\, dG(\lambda(\cdot))$ $(x \in X)$.

Базисными окрестностями в M служат пересечения цилиндрических множеств в $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$ $\text{Ц}_б(\mathbb{C}^{\mathcal{A}}) = \text{Ц}(a_1, \ldots, a_p;\ u_1 \times \ldots \times u_p)$ $(a_n \in \mathcal{A},\ u_n$ открыты в $\mathbb{C}^1)$ с M, их образы дают базис окрестностей $\Sigma(\mu)$ пространства μ. Если $a_n = A_{x_n}$ $(n = 1, \ldots, p)$, то такой образ очевидно совпадает с базисной окрестностью пространства μ, топологизированного относительной топологией $\mathbb{C}^X$, пусть $\Sigma'(\mu)$ — базис окрестностей так топологизированного μ. Таким образом, $\Sigma'(\mu) \subseteq \Sigma(\mu)$.

Рассмотрим σ-алгебру $\mathcal{C}_\sigma(\mu)$; она совпадает с σ-оболочкой базиса $\Sigma'(\mu)$ и входит в $\mathcal{B}(\mu)$. Функция $\mathbb{C}^X \supseteq \mu \ni \lambda(\cdot) \mapsto \lambda(x) \in \mathbb{C}^1$ измерима относительно $\mathcal{C}_\sigma(\mu)$, и поэтому меру G в представлении для A_x можно заменить на ее сужение $E' = G \upharpoonright \mathcal{C}_\sigma(\mu)$ (являющееся по прежнему разложением единицы):

$$A_x = \int_\mu \lambda(x)\, dE'(\lambda(\cdot)) \qquad (x \in X). \tag{11}$$

Построим в соответствии с [1, § 1, п. 3] совместное разложение единицы $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X) \ni \alpha \mapsto E(\alpha)$ семейства A (т. е. $E = \bigtimes_{x \in X} E_x$, где E_x — разложение единицы оператора A_x). Имеет место представление (см. [1, формула (1.25)]):

$$A_x = \int_{\mathbb{C}^X} \lambda(x)\, dE(\lambda(\cdot)) \qquad (x \in X). \tag{12}$$

Нетрудно установить, что E' из (11) модификация E посредством μ, т. е. μ — множество полной внешней меры E, и для каждого $\alpha' \in \mathcal{C}_\sigma(\mu)$ $E'(\alpha') = E(\alpha)$, где $\alpha \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)$ таково, что $\alpha \cap \mu = \alpha'$ (по поводу этого понятия см. [1, § 1, п. 9]; для доказательства нужно сперва по E' построить разложение единицы $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X) \ni \alpha \mapsto E''(\alpha) = E'(\alpha \cap \mu)$, а затем доказать, что $E'' = E$).

Лемма 1. *Топологизация $\mu \subseteq \mathbb{C}^X$ как пространства максимальных идеалов совпадает с относительной топологией, индуцированной пространством $\mathbb{C}^X$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любых точки $\omega_0 \in M$ и ее окрестности в M $Ц_б(\mathbb{C}^{\mathcal{A}}) \cap M$ найдется окрестность точки $\lambda_{\omega_0}(\cdot) \in \mu$ в μ вида $Ц_б \cap \mu$ ($Ц_б = Ц_б(x_1, \ldots, x_q;\ v_1 \times \ldots \times v_q)$, $x_k \in X$, v_k открыты в $\mathbb{C}^1$) такая, что если $\lambda_\omega(\cdot) \in Ц_б \cap \mu$, то $\omega \in Ц_б(\mathbb{C}^{\mathcal{A}}) \cap M$. Пусть $u_j = \{z \in \mathbb{C}^1 \,|\, |z - \omega_0(a_j)| < \varepsilon\}$ ($j = 1, \ldots, p$; $\varepsilon > 0$) и $\mathcal{A}'$ — алгебраическая оболочка семейства $(A_x)_{x \in X}$. Для каждого a_j найдем $b_j \in \mathcal{A}'$ такое, чтобы $\| a_j - b_j \| < \varepsilon$ ($j = 1, \ldots, p$), и пусть $A_{x_1}, \ldots, A_{x_q}$ — операторы, алгебраическая оболочка которых содержит $b_1, \ldots, b_p$. Таким образом,

$$b_j = \sum_{|\alpha| \leqslant n_j} c_{\alpha,j} A_{x_1}^{\alpha_1} \ldots A_{x_q}^{\alpha_q}, \quad \omega(b_j) = \sum_{|\alpha| \leqslant n_j} c_{\alpha,j} \lambda_\omega^{\alpha_1}(x_1) \ldots \lambda_\omega^{\alpha_q}(x_q) =$$

$$= P_j(\lambda_\omega(x_1), \ldots, \lambda_\omega(x_q)) \ (\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q),\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_q;$$
$$j = 1, \ldots, p;\ \omega \in M),$$

где $c_{\alpha,j} \in \mathbb{C}^1$ — некоторые коэффициенты. Полином $P_j(z_1, \ldots, z_q)$ ($z_k \in \mathbb{C}^1$) в точке $(z_1^0, \ldots, z_q^0) = (\lambda_{\omega_0}(x_1), \ldots, \lambda_{\omega_0}(x_q))$ принимает значение $\omega_0(b_j)$. Благодаря его непрерывности найдется такое $\delta > 0$, что при $|z_k - z_k^0| < \delta$ ($k = 1, \ldots, q$) получим $|\omega_0(b_j) - P_j(z_1, \ldots, z_q)| < \varepsilon/3$ для всех $j = 1, \ldots, p$. Окрестность $Ц_б$ с выбранными выше x_k и $v_k = \{z \in \mathbb{C}^1 \,|\, |z - z_k^0| < \delta\}$ будет требуемой: если $\lambda_\omega(\cdot) \in Ц_б \cap \mu$, то согласно второму равенству в (13) $|\omega_0(b_j) - \omega(b_j)| < \varepsilon/3$ ($j = 1, \ldots, p$) и, так как норма мультипликативного функционала равна 1,

$$|\omega(a_j) - \omega_0(a_j)| \leqslant |\omega(a_j) - \omega(b_j)| + |\omega(b_j) - \omega_0(b_j)| + |\omega_0(b_j) - \omega_0(a_j)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\|a_j - b_j\| + |\omega(b_j) - \omega_0(b_j)| < \varepsilon \qquad (j = 1, \ldots, p),$$

т. е. $\omega \in Ц_б(\mathbb{C}^{\mathcal{A}}) \cap M$. ■

Теорема 2. *Носитель совместного разложения единицы семейства $\mathcal{A}$ операторов совпадает с пространством максимальных идеалов алгебры $\mathcal{A}$, точнее,* $\operatorname{supp} E = \mu$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)$ полной меры E и замкнуто в $\mathbb{C}^X$; тогда $\varphi \supseteq \mu$. Действительно, предполагая противное, найдем точку $\lambda_0(\cdot) \in (\mathbb{C}^X \setminus \varphi) \cap \mu$. Последнее множество открыто в μ в относительной топологии; пусть $Ц_б \cap \mu$ — базисная окрестность точки $\lambda_0(\cdot)$, входящая в $(\mathbb{C}^X \setminus \varphi) \cap \mu$. Так как $E'((\mathbb{C}^X \setminus \varphi) \cap \mu) = E(\mathbb{C}^X \setminus \varphi) = 0$, то и $G(Ц_б \cap \mu) = E'(Ц_б \cap \mu) = 0$. Пусть o — прообраз $Ц_б \cap \mu$ при отображении $M \to \mu$. Множество o открыто в топологии M и $F(o) = 0$ — это противоречит (10) и изоморфизму $\mathcal{A} \leftrightarrow C(M)$. Итак, $\varphi \supseteq \mu$ и поэтому $\operatorname{supp} E \supseteq \mu$. С другой стороны, в силу леммы 1 μ — компакт в относительной топологии пространства $\mathbb{C}^X$; значит, μ замкнуто в $\mathbb{C}^X$. Предположим, что $\operatorname{supp} E \neq \mu$. Тогда найдется базисная окрестность $Ц_б \subseteq \mathbb{C}^X \setminus \mu$, имеющая непустое пересечение с $\operatorname{supp} E$. Поэтому $E(Ц_б) \neq 0$ и множество $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X) \ni \mathbb{C}^X \setminus Ц_б \supseteq \mu$ не будет полной меры E. Следовательно, μ не будет полной внешней меры E, что абсурдно. ■

Итак, в случае семейства ограниченных операторов при «алгебраическом» подходе справедливо спектральное представление (10), откуда следует (11), т. е. (12). Дальше для построения теории разложений по обобщенным совместным собственным векторам можно использовать две схемы: 1) дифференцировать разложение единицы в (11) или (12) — этот путь реализован в [3, 1] и приводит к проекционной спектральной теореме (дифференцирование F в (10) менее рационально); 2) продолжить (10) до полной спектральной теоремы в форме Неймана и пользоваться теоремой Фубини — эта схема развита в [7, 8, 2, 9] и приводит к ядерной спектральной теореме (см. также [10, гл. 5, § 2, п. 4]).

Остановимся на второй схеме, предполагая для простоты, что A обладает циклическим вектором Ω (т. е. существует $\Omega \in H_0$ такое, что множество $\{a\Omega \mid a \in \mathcal{A}\}$ плотно в H_0). Хорошо известно ([6, гл. 8, § 40, 41]; см. также [3, гл. 2, § 3, п. 3]), что изоморфизм $\mathcal{A} \leftrightarrow C(M)$ порождает изометрию $H_0 \ni$ $\ni f \mapsto \hat{f} \in L_2(M, d\sigma(\omega))$, где $\mathcal{B}(M) \ni \alpha \mapsto \sigma(\alpha) \in [0, \infty)$ — некоторая конечная мера, причем $(af)\hat{}\,(\omega) = \omega(a)\hat{f}(\omega)$ $(f \in H_0,\ a \in \mathcal{A})$ почти для всех ω относительно σ;

$$(f, g)_{H_0} = \int_M \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\, d\sigma(\omega) \qquad (f, g \in H_0). \tag{14}$$

Пусть имеется квазиядерное оснащение $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$. При помощи теоремы Фубини доказывается, что σ-почти для каждого ω существует вектор $\varphi(\omega) \in H_-$ такой, что $\hat{u}(\omega) = (u, \varphi(\omega))_{H_0}$ $(u \in H_+)$. Если A и (1) стандартно связаны, то $(\varphi(\omega), A_x^* u)_{H_0} = \omega(A_x)(\varphi(\omega), u)_{H_0}$ $(u \in D;\ x \in X)$ и аналогичное равенство имеет место с заменой A_x^* на A_x. Таким образом, $\varphi(\omega)$ — обобщенный совместный собственный вектор с собственным значением $\omega(A_x)$. Сейчас можно ввести и обобщенный проектор, полагая $P(\omega)u = (u, \varphi(\omega))_{H_0}\varphi(\omega)$ $(u \in H_+)$; он отвечает собственному значению $\omega(A_x)$.

Применим к этим построениям введенную биекцию $M \ni \omega \mapsto \lambda_\omega \in \mu$, $\lambda_\omega(x) = \omega(A_x)$ $(x \in X)$. В результате (14) перейдет в

$$(f, g)_{H_0} = \int_\mu \tilde{f}(\lambda(\cdot))\overline{\tilde{g}(\lambda(\cdot))}\, d\rho(\lambda(\cdot)) \quad (f, g \in H_0;\ \tilde{f}(\lambda(\cdot)) = \hat{f}(\omega),$$
$$d\rho(\lambda(\cdot)) = d\sigma(\omega)) \tag{15}$$

и мы получим сформулированную в начале пункта проекционную спектральную теорему с $\pi = \mu$ и $P(\lambda(\cdot)) = P(\omega)$ (ω — отвечающий $\lambda(\cdot) \in \mu$ максимальный идеал). Эту конструкцию, несколько ее усложняя, можно провести и в общем случае, не требуя наличия циклического вектора.

Таким образом, в случае семейства A ограниченных операторов изложенные рассуждения (т. е. по существу вывод ядерной спектральной теоремы) приводят к другому, чем в [1], доказательству проекционной спектральной теоремы. Однако информация о $P(\lambda(\cdot))$ при этом получается более слабой, чем в [1]: операторнозначная функция $\mu \ni \lambda(\cdot) \mapsto P(\lambda(\cdot))$ (как и $\varphi(\lambda(\cdot)) = \varphi(\omega)$, $\lambda(\cdot) \leftrightarrow \omega$) слабо измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{B}(\mu)$, более обширной, чем $\mathcal{C}_\sigma(\mu)$, относительно которой эта функция измерима в действительности.

Рассмотрим теперь общий случай семейства $A = (A_x)_{x \in X}$ коммутирующих нормальных операторов, среди которых могут быть и неограниченные. С A можно связать C^*-алгебру $\mathcal{A}$, например, натянув ее на семейство проекторов $(E_x(\alpha))_{x \in X,\ \alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^1)}$, и подобно (14) установить изоморфизм $H_0 \leftrightarrow$ $\leftrightarrow L_2(M, d\sigma(\omega))$. Однако если оператор A_x неограничен, то он не входит в $\mathcal{A}$ и для него непосредственно интерпретировать $\varphi(\omega)$ как обобщенный собственный вектор уже нельзя. Вместе с тем известно (см., напр., [3, гл 2, § 3, п. 3]), что соответствие между $a \in \mathcal{A}$ и операторами умножения на функции $a(\omega) = \omega(a)$ в пространстве $L_2(M, d\sigma(\omega))$ можно продолжить на операторы A_x $(x \in X)$, при этом лишь функции $A_x(\omega)$, отвечающие таким операторам, будут не непрерывными по ω, а измеримыми σ-почти везде конечными. Отсюда, как и ранее, заключаем, что $\varphi(\omega)$ — обобщенный собственный вектор для A_x, отвечающий собственному значению $A_x(\omega)$. То же будет и в случае отсутствия циклического вектора, и мы получим (14) и существование $P(\omega)$.

Спуститься от (14) к (15) и перейти к интегрированию по спектру сейчас уже не удается: функция $X \ni x \mapsto A_x(\omega) \in \mathbb{C}^1$ не распространяется по линейности, мультипликативности и непрерывности на всю алгебру $\mathcal{A}$, более того, при фиксированном $\omega \in M$ она вообще плохо определена, так как для каждого $x \in X$ $A_x(\omega)$ задана σ-почти для всех ω. Этим отличается представление (14) от представлений в проекционной спектральной теореме. Такие же трудности при переходе к интегрированию по спектру возникают и в случае построения теории разложений на основе теоремы Шоке, развитого в [11, 12].

1. *Березанский Ю. М.* Проекционная спектральная теорема. — Успехи мат. наук, 1984, 39, № 4, с. 3—52.
2. *Maurin K.* General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups.— Warszawa : Pańctw. wydaw. nauk., 1968.— 368 p.
3. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
4. *Самойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1984.— 232 с.
5. *Kondrat'ev Yu. G., Samoylenko Yu. S.* The spaces of trial and generalized functions of infinite number of variables.— Reports Math. Phys., 1978, 14, N 3, p. 325—350.
6. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.— М. : Наука, 1968.— 664 с.
7. *Maurin K.* Eine Bemerkung zur allgemeinen Eigenfunktions — entwicklungen für vertauschbare Operatorensysteme beliebiger Mächtigkeit.— Bull. Acad. Pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1960, 8, N 6, S. 381—384.
8. *Морен К.* Методы гильбертова пространства.— М. : Мир, 1965.— 572 с.
9. *Maurin K.* A remark on Berezanski version of spectral theorem.— Stud. math., 1970, 34, N 2, p. 165—167.
10. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
11. *Richter P.* Zerlegung eine Familie symmetrischer Operatoren nach gemeinsamen verallgemeinerten Eigenvektoren.— Leipzig, 1979. — 10 S.— (Preprint/Karl-Marx-Universität).
12. *Richter P.* Zerlegung positiv definiter Kerne und Entwicklung nach gemeinsamen verallgemeinerten Eigenfunktionen für Familien streng kommutierender symmetrischer Operatoren.— Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math. Naturwiss. R., 1982, 31, N 1, S. 63—68.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 02.10.84