УДК 517.919

Н. И. Шкиль, В. А. Кушнир

Об асимптотическом расщеплении систем линейных дифференциальных уравнений высших порядков с малым параметром при производной

Вопрос об асимптотическом расщеплении систем линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядков освещен в работах [1—3, 5, 6]. В настоящей работе решается аналогичная задача для систем линейных дифференциальных уравнений порядка $n \geqslant 1$ вида

$$\varepsilon^{p/q} x^{(n)} = A(t, \varepsilon)\, x + f(t, \varepsilon) \exp(i\Theta(t)/\varepsilon^{p/nq}), \tag{1}$$

где x, $f(t, \varepsilon)$, — k-мерные векторы; $A(t, \varepsilon)$ — действительная квадратная матрица порядка $(k \times k)$; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; p, q — такие натуральные числа, что $(p, q) = 1$. В дальнейшем будем предполагать, что выполняются условия:

1) $A(t, \varepsilon)$, $f(t, \varepsilon)$ допускают разложения $A(t, \varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t)$, $f(t, \varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f_s(t)$;

2) матрицы $A_s(t)$, векторы $f_s(t)$, функция $\theta(t)$ на отрезке $[0; L]$ неограниченное число раз дифференцируемы;

3) корни $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_k(t)$ уравнения

$$\det \| A_0(t) - \lambda E \| = 0 \tag{2}$$

(E — единичная матрица) можно разбить на две группы $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_{r_1}(t)$, $1 \leqslant r_1 < k$; $\lambda_{r_1+1}(t), \ldots, \lambda_{r_2}(t)$, $r_1 + r_2 = k$, так, что $\forall t \in [0; L]$ корни одной группы не равны корням второй группы, т. е. $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $i = \overline{1, r_1}$, $j = \overline{r_1 + 1, r_2}$, $r_2 = k - r_1$ (заметим, что корни, принадлежащие одной и той же группе, могут быть равны между собой);

4) имеет место один из случаев: «резонансный» — функция $i^n k^n(t)$ при $t \in [0; L]$, $i = \sqrt{-1}$, $k(t) = d\Theta(t)/dt$ равна одному из корней уравнения (2), например $i^n k^n(t) = \lambda_1(t)$, однако $i^n k^n(t) \neq \lambda_j(t)$, $j = \overline{2, k}$; и «нерезонансный», когда $\forall t \in [0; L]$ $i^n k^n(t) \neq \lambda_j(t)$, $j = 1, k$.

1. Формальное расщепление однородной системы. Для удобства в системе (1) введем замену $\mu = \varepsilon^{1/nq}$. Тогда данная система запишется в виде

$$\mu^{np} x^{(n)} = A(t, \mu^{qn})\, x + f(t, \mu^{qn}) \exp(i\Theta(t)/\mu^p). \tag{3}$$

Теорема 1. *Если выполняются условия* 1)—3), *то система дифференциальных уравнений*

$$\mu^{np} x^{(n)} = A(t, \mu^{qn})\, x \tag{4}$$

имеет формальное вектор-решение вида

$$x(t, \varepsilon) = U(t, \mu)\, h(t, \mu), \tag{5}$$

где $U(t, \mu)$ — матрица порядка $(k \times k)$, а k-мерный вектор $h(t, \mu)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\mu^p \dot{h} = W(t, \mu) h, \tag{6}$$

в которой $W(t, \mu)$ — квазидиагональная матрица

$$W(t, \mu) = \operatorname{diag}\{W_1(t, \mu),\ W_2(t, \mu)\}, \tag{7}$$

$W_1(t, \mu)$, $W_2(t, \mu)$ — квадратные матрицы порядков r_1 и r_2 соответственно. При этом матрицы $U(t, \mu)$, $W(t, \mu)$ допускают формальные разложения:

$$U(t, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s U_s(t), \quad W(t, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s W_s(t).$$

(По поводу формальных разложений см. [2].)

Доказательство. Подставляя вектор (5) с учетом (6) в систему (4), получим тождество

$$\sum_{m=0}^{n} \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{(n-m)p+s} R_{nms}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \left(A_0(t) U_s(t) + \sum_{k=1}^{[s/nq]} A_k(t) U_{s-knq}(t) \right), \tag{8}$$

где $R_{nms}(t) = \mathring{R}_{n-1,m,s}(t) + \sum_{k=0}^{s} R_{n-1,m-1,k}(t) W_{s-k}(t)$, $[s/nq]$ — целая часть s/nq, $R_{00s}(t) = U_s(t)$. Приравнивая в (8) коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ, получим бесконечную матричную систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{\alpha} R_{n,n-k,l-kp}(t) + R_{nnl}(t) = A_0(t) U_l(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{[l/nq]} A_k(t) U_{l-knq}(t), \quad l = 0, 1, \ldots, \quad \alpha = \min\{[l/p], n\}. \tag{9}$$

Докажем разрешимость системы (9). Считая в (9) $l = 0$, получим уравнение

$$A_0(t) U_0(t) = U_0(t) W_0^n(t). \tag{10}$$

Известно [1], что в случае выполнения условия 3) матрицу $A_0(t)$ можно записать в виде

$$A_0(t) = B(t) V(t) B^{-1}(t), \tag{11}$$

где $B(t)$ — неограниченно дифференцируемая матрица, $V(t)$ — квазидиагональная матрица

$$V(t) = \begin{Vmatrix} V_1(t) & 0 \\ 0 & V_2(t) \end{Vmatrix}, \tag{12}$$

$V_i(t)$ — матрицы размеров $r_i \times r_i$, $i = 1, 2$. При этом собственные значения матрицы $V_1(t)$ — $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_{r_1}(t)$, а $V_2(t)$ — $\lambda_{r_1+1}(t), \ldots, \lambda_{r_2}(t)$. Тогда уравнение (10) можно записать в таком виде:

$$V(t) Q_0(t) = Q_0(t) W_0^n(t), \tag{13}$$

где $Q_0(t) = B^{-1}(t) U_0(t)$. Положив в (13) $Q_0(t) = E$, находим $W_0^n(t) = V(t)$, $U_0(t) = B(t)$. Так как $V(t)$ имеет структуру (12), то в силу (7)

$$W_{01}^n(t) = V_1(t), \tag{14}$$

$$W_{02}^n(t) = V_2(t). \tag{15}$$

Уравнения (14), (15) можно решить методом из [4]. В результате получим $W_{01}(t) = \Phi(t)\{\sqrt[n]{\lambda_1(t)\, E_1 + H_1}, \ldots, \sqrt[n]{\lambda_u(t)\, E_u + H_u}\}\, \Phi^{-1}(t)$,

где $\Phi(t)$ — матрица преобразования подобия,

$$H_k = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

$$E_k = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}, \quad k = \overline{1, u}, \quad \sqrt[n]{\lambda_k(t)\, E_k + H_k} =$$

$$= \lambda_k^{1/n}(t) + (1/n)\, \lambda_k^{1/n-1}(t)\, H_k + (1/2\,!)\,(1/n)\,(1/n-1)\, \lambda_k^{1/n-2}(t)\, H_k^2 + \ldots, \qquad k = \overline{1, u}. \tag{16}$$

Решение уравнения (15) имеет аналогичный вид.

Учитывая (11), перепишем (9) в виде

$$V(t)\, Q_l(t) - Q_l(t)\, W_0^n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} W_0^k(t)\, W_l(t)\, W_0^{n-k-1}(t) + F_l(t), \tag{17}$$

где

$$Q_l(t) = B^{-1}(t)\, U_l(t), \tag{18}$$

$$F_l(t) = B^{-1}(t) \left\{ \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{l-1} R_{k_1,k_2,k}(t)\, W_{l-k}(t)\, W_0^k(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\alpha} R_{n,n-k,l-kp}(t) - \sum_{k=1}^{[l/nq]} A_k(t)\, U_{l-knq}(t), \quad l = 1, 2, \ldots \right. . \tag{19}$$

Ввиду наложенных на числа p и q ограничений возможны два случая: $p > nq$ и $p < nq$. Рассмотрим только первый, так как случай $p < nq$ исследуется подобным образом. Из (17)—(19) следует: $F_l(t) \equiv 0$, $l = \overline{1, nq-1}$. Положив $Q_l(t) = E$, $l = \overline{1, nq-1}$, имеем $W_l(t) = 0$, $U_l(t) = B(t)$, $l = \overline{1, nq-1}$. При $l = nq$ $F_l(t) = -B^{-1}(t)\, A_1(t)\, B(t)$. При $l = \overline{nq+1, p-1}$

$$F_l(t) = B^{-1}(t) \left[\sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{[l/nq]} R_{k_1,k_1,k}(t)\, W_{l-k}(t)\, W_0^k(t) + \sum_{k=1}^{[l/nq]} A_k(t)\, U_{l-knl}(t) \right].$$

При $l > p-1$ $F_l(t)$ определяется формулой (19). Запишем матрицы $Q_l(t)$ $F_l(t)$ в виде блочных матриц:

$$Q_l(t) = \begin{Vmatrix} Q_{l11}(t) & Q_{l12}(t) \\ Q_{l21}(t) & Q_{l22}(t) \end{Vmatrix}, \quad F_l(t) = \begin{Vmatrix} F_{l11}(t) & F_{l12}(t) \\ F_{l21}(t) & F_{l22}(t) \end{Vmatrix},$$

где $Q_{lij}(t)$, $F_{lij}(t)$ — матрицы размеров $r_i \times r_j$, $i, j = 1, 2$, $l = nq$, $nq + 1, \ldots$. Тогда уравнение (17) можно записать иначе

$$V_i(t)\, Q_{lij}(t) - Q_{lij}(t)\, V_j(t) = \delta_{ij} \sum_{k=0}^{n-1} W_{0i}^k(t)\, W_{li}(t)\, W_{0j}^{n-k-1}(t) + F_{lij}(t), \tag{20}$$

$i, j = 1, 2$, $l = nq$, $nq + 1, \ldots$, δ_{ij} — символ Кронекера. Из (20) при $i = j$

получим

$$V_i(t)\,Q_{lii}(t) - Q_{lii}(t)\,V_i(t) =$$

$$= \delta_{ii} \sum_{k=0}^{n-1} W_{0i}^k(t)\,W_{li}(t)\,W_{0i}^{n-k-1}(t) + F_{lii}(t), \quad l = nq, \quad nq+1, \ldots. \qquad (21)$$

Положим в (21) $Q_{lii}(t) \equiv 0$, $l = nq$, $nq+1, \ldots$. Тогда уравнение (21) примет вид

$$\sum_{k=0}^{n-1} W_{0i}^k(t)\,W_{li}(t)\,W_{0i}^{n-k-1}(t) = -F_{lii}(t), \quad l = nq, \quad nq+1, \ldots. \qquad (22)$$

Покажем, что система

$$\sum_{k=0}^{n-1} W_{0i}^k(t)\,W_{li}(t)\,W_{0i}^{n-k-1}(t) = 0, \quad l = nq, \quad nq+1, \ldots. \qquad (23)$$

имеет только нулевое решение. Докажем это для $i = 1$ (случай $i = 2$ исследуется аналогично). Представим матрицу $W_{01}(t)$ в жордановой форме. Для этого достаточно привести к жордановой форме матрицы (16):

$$W_{01}(t) = \Phi(t)\,T(t)\,\{\sqrt[n]{\lambda_1(t)}\,E_1 + H_1, \ldots, \sqrt[n]{\lambda_u(t)}\,E_u + H_u\}\,T^{-1}(t)\,\Phi^{-1}(t),$$

тогда уравнение (23) примет вид

$$\sum_{k=0}^{n-1} G^k(t)\,X_{l1}(t)\,G^{n-k-1}(t) = 0, \qquad (24)$$

где

$$X_{l1}(t) = T^{-1}(t)\,\Phi^{-1}(t)\,W_{l1}(t)\,\Phi(t)\,T(t),$$

$$G(t) = \{\sqrt[n]{\lambda_1(t)}\,E_1 + H_1, \ldots, \sqrt[n]{\lambda_u(t)}\,E_u + H_u\}.$$

Разобъем $X_{l1}(t)$ на u^2 блоков $X_{l1}^{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, u}$. Тогда (24) распадется на u^2 систем вида

$$\sum_{k=0}^{n-1} G_i^k(t)\,X_{l1}^{ij}(t)\,G_j^{n-k-1}(t) = 0, \quad i, j = \overline{1, u},$$

или

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{01i}(t)\,E_i + H_i)^k X_{l1}^{ij}(t)\ (\lambda_{01j}(t)\,E_j + H_j)^{n-k-1} = 0,$$

откуда получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{01i}^k(t)\cdot\lambda_{01j}^{n-k-1}(t)\,X_{l1}^{ij}(t) = -\varphi H_i X_{l1}^{ij}(t)\,\varphi H_j + X_{l1}^{ij}(t)\,\varphi H_j + \varphi H_i X_{l1}^{ij}(t), \quad (25)$$

где φH_m некоторый многочлен от H_m со скалярными коэффициентами, который содержит H_m по крайней мере в первой степени. Введем обозначения: $a(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{01i}^k(t)\,\lambda_{01j}^{n-k-1}(t)$, $i, j = \overline{1, u}$. Проинтегрируем равенство (25) $r-1$ раз. Получим

$$a^r(t)\,X_{l1}^{ij}(t) = (-1)^r \sum_{\beta+\gamma=r} \varphi H_i^\beta X_{l1}^{ij}(t)\,\varphi H_j^\gamma + \sum_{\beta+\gamma>r} \varphi H^\beta X_{l1}^{ij}(t)\,\varphi H_j^\gamma. \qquad (26)$$

При $r \geqslant p_i + p_j - 1$ (p_i, p_j — размеры матриц H_i и H_j соответственно, $i, j = \overline{1, u}$,) правая часть (26) равна нулю. Покажем, что $a(t) \neq 0$ $\forall t \in [0; L]$

Рассмотрим два случая.

1. $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, u}$. Тогда

$$\lambda_i(t) - \lambda_j(t) = \lambda_{01i}^n(t) - \lambda_{01j}^n(t) = (\lambda_{01i}(t) - \lambda_{01j}(t)(a(t), \tag{27}$$

откуда следует, что $a(t) \neq 0$ $\forall t \in [0; L]$.

2. $i = j$ или, при отдельных значениях i, j $(\cdot \neq j)$, $\lambda_i(t) = \lambda_j(t)$ $\forall t \in [0; L]$, $i, j = \overline{1, u}$. Положив тогда $\lambda_{01i}(t) = \lambda_{01j}(t)$, получим

$$a(t) = n\lambda_{01i}^{n-1}(t) \neq 0, \quad i = 1, 2. \tag{28}$$

Из (27), (28) следует, что $X_{l1}^{ij}(t) \equiv 0$, а значит, согласно [4], уравнение (22) имеет единственное решение. Таким образом, $W_l(t)$, $Q_l(t)$ найдены ($l = 0, 1, \ldots$). Из (18) следует, что $U_l(t) = B(t)\,Q_l(t)$. Этим теорема 1 доказана.

Заметим, что из способа доказательства данной теоремы и условий 2) и 3) вытекает неограниченная дифференцируемость искомых матриц.

2. Случай простых корней уравнения (2). Рассмотрим частный случай, когда корни $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_k(t)$ уравнения (2) $\forall t \in [0; L]$ простые и отличные от нуля, т. е.

$$\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, k}. \tag{29}$$

При этом доказательство теоремы 1 значительно упрощается и позволяет представить решение системы в явном виде. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если выполняются условия* 1), 2) *и* (29), *то система дифференциальных уравнений* (4) *имеет формальное вектор-решение* (5), *где* $U(t, \mu)$, $h(t, \mu)$ *те же, что и в теореме* 1, *при этом* $W(t, \mu)$ — *диагональная матрица*: $W(t, \mu) = \mathrm{diag}\,\{W_1(t, \mu), \ldots, W_k(t, \mu)\}$.

Доказательство. Повторяя рассуждения предыдущего пункта, получим:

$$W_0(t) = \mathrm{diag}\,\{\sqrt[n]{V_1(t)}, \ldots, \sqrt[n]{V_k(t)}\}, \quad U_0(t) = B(t),$$

$$W_l(t) \equiv 0, \quad Q_l(t) = E, \quad U_l(t) = B(t), \quad l = \overline{1, nq - 1}.$$

Так как $W_0(t)$ и $W_l(t)$ диагональные, то из (17) следует $V(t)\,Q_l(t) - Q_l(t)\,W_0^n(t) = nW_0^{n-1}(t) + F_l(t)$, $l = nq$, $nq + 1, \ldots$. Далее методом из [2] находим

$$W_l(t) = -n^{-1}[W_0^{n-1}(t)]^{-1}F_{ld}(t), \quad l = nq, \quad nq + 1, \ldots,$$

$$Q_{lij}(t) = f_{lij}(t)/(\lambda_j(t) - \lambda_i(t)) \ (i \neq j), \quad l = nq, \quad nq + 1, \ldots, \quad Q_{lii}(t) \equiv 0,$$

$$l = nq, \quad nq + 1, \ldots,$$

где $F_{ld}(t)$ — диагональ матрицы $F_l(t)$, $f_{lij}(t)$ — недиагональные элементы матрицы $F_l(t)$. Теорема доказана.

3. Формальные расщепления неоднородных систем. Сформулируем теоремы.

Теорема 3. *Если выполняются условия теоремы 1, то система* (3) *в «резонансном» случае имеет формальное решение вида*

$$x(t, \varepsilon) = [U(t, \mu)\,h(t, \mu) + p(t, \mu)]\exp(i\Theta(t)/\mu^p),$$

где $h(t, \mu)$ — *k-мерный вектор, определяемый системой уравнений*

$$\mu^p\dot{h}(t, \mu) = [W(t, \mu) + ik(t)\,E]\,h(t, \mu) + z(t, \mu),$$

причем матрицы $U(t, \mu)$, $W(t, \mu)$ *такие же, как в теореме* 1, *а* $p(t, \mu)$, $z(t, \mu)$ — *k-мерные векторы, допускающие формальные разложения*

$$p(t, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s p_s(t), \qquad z(t, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s z_s(t),$$

при этом $z(t, \mu) = \mathrm{colon}(g(t, \mu), 0)$, *где* $g(t, \mu)$ — r_1-*мерный вектор*, 0 — *нулевой вектор.*

Теорема 4. *Если выполняются условия теоремы* 1, *то в «нерезонансном» случае система* (3) *имеет формальное вектор-решение*

$$x(t, \varepsilon) = p(t, \mu) \exp(i\Theta(t)/\mu^p), \tag{30}$$

где

$$p(t, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s p_s(t). \tag{31}$$

Приведем доказательство теоремы 4. Теорема 3 доказывается аналогично. Подставляя (30) в (3) с учетом (31), получим

$$\sum_{m=0}^{n-1} (ik(t))^m \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{(n-m)p+s} \varphi_{nms}(t) + \sum_{s-0}^{\infty} \mu^s i^n k^n(t) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \left[A_0(t) p_s(t) + \sum_{k=1}^{[s/nq]} A_k(t) p_{s-knq}(t) \right] + \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{nqs} f_{[s/nq]}(t), \tag{32}$$

где $\varphi_{nms}(t) = \dot{\varphi}_{n-1,m,s}(t) + \varphi_{n-1,m-1,s}(t)$, $\dot{\varphi}_{00s}(t) = p_s(t)$. Приравнивая в (31) выражения при одинаковых степенях параметра μ, получим бесконечную матричную систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \varphi_{n,n-k,l-kp}(t)(ik(t))^{n-\alpha} + i^n k^n(t) p_l(t) =$$

$$= A_0(t) p_l(t) + \sum_{k=1}^{[l/nq]} A_k(t) p_{l-k}(t) + f_{[l/nq]}(t),$$

откуда находим

$$p_l(t) = [A_0(t) - i^n k^n(t) E]^{-1} \left[\sum_{k=1}^{\alpha} \varphi_{n,n-k,l-kp}(t)(ik(t))^{n-\alpha} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{[s/nq]} A_k(t) p_{l-k}(t) - f_{[l/nq]}(t) \right].$$

Теорема доказана.

Заметим, что, используя метод из [3], можно доказать асимптотические свойства формальных решений, приведенных в теоремах 1—4.

1. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1966.— 252 с.
2. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— К. : Вища школа, 1971.— 226 с.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 575 с.
5. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Асимптотическое расщепление систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных.— Киев, 1976.— 40 с. (Препринт / АН УССР, Ин-т математики)
6. *Шкиль Н. И., Мейлиев Т. К.* Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром целого ранга.— В кн.: Теоремы тауберова типа и дифференциальные уравнения с малым параметром. Киев : Киев. пед. ин-т, 1983, с. 150—156.

Киев пед. ин-т

Поступила 19.12.83