УДК 517.54

Ю. Е. Хохлов

Сверточные операторы, сохраняющие однолистные функции

1. Введение. Однолистные нормированные конформные отображения единичного круга $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ образуют сложный нелинейный компакт S, лежащий в линейном топологическом пространстве $\mathcal{A}$ голоморфных функций. Невозможность перенесения в S линейной структуры из $\mathcal{A}$ (линейная комбинация однолистных функций может быть даже бесконечнолистной) затрудняет построение вариаций однолистных функций, решение экстремальных задач, получение интегральных представлений и т. д. Поэтому выделение в S объектов и структур, носящих линейный характер, остается важной нетривиальной задачей.

Большой цикл работ по теории однолистных функций посвящен вопросу построения линейных интегральных (или интегро-дифференциальных) операторов, переводящих класс S или его подклассы в себя (см. обзор в [1, § 14], [2]).

В одной из первых работ в этом направлении [3] на основании утверждения [4] о том, что оператор

$$f \to \mathcal{B}f \overset{\text{def}}{=} \int_0^z (f(\tau)/\tau)\, d\tau \tag{1}$$

переводит звездные функции в выпуклые (т. е. «улучшает» геометрические свойства), показано, что оператор $\mathcal{B}$ отображает класс S в себя. Однако в [5] приведен пример однолистной спиралеобразной функции $f_0(z) = z \exp[(i-1)\ln(1-iz)]$, которую оператор Бернацкого (1) переводит в неоднолистную функцию. Позднее в [6] был определен радиус круга, в котором функция $g(z) = \mathcal{B}f(z)$ однолистна для любой функции $f \in S$.

Другой линейный оператор введен в [7]:

$$f \to \mathcal{L}f \overset{\text{def}}{=} (2/z) \int_0^z f(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Этот оператор переводит в себя классические подклассы выпуклых, звездных и почти-выпуклых функций. В дальнейшем эти результаты были обобщены в [8] введением оператора

$$f \to \mathcal{B}_c f \overset{\text{def}}{=} (c+1)\, z^{-c} \int_0^z \tau^{c-1} f(\tau)\, d\tau, \quad c \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

но оба автора ограничились рассмотрением лишь подклассов из S. Позднее [9] были найдены примеры однолистных функций вида $f_0(z) = z(1+z)^{1-i}$, которые оператор $\mathcal{L}$ также переводит в неоднолистные.

В [10] и [11] исследованы дифференциальные операторы

$$f \to \mathcal{B}_n^{-1} f \overset{\text{def}}{=} z\,(z^{n-1} f(z))^{(n)}/n!, \quad f \to \mathcal{L}^{-1} f \overset{\text{def}}{=} [zf(z)]'/2 \tag{4}$$

являющиеся обратными к оператору Бернацкого (при $n = 1$) и Либеры (2) соответственно. Они также не сохраняют однолистности всего класса S в целом. В [2] при помощи свертки Адамара $f_1 * f_2(z) = z + \Sigma_{n=2}^{\infty} a_n(f_1)\, a_n(f_2)\, z^n$, $f_j(z) = z + \Sigma_{n=2}^{\infty} a_n(f_j)\, z^n$, $j = 1, 2$, введены линейные гипергеометрические операторы

$$f \to \mathcal{F}(a, b, c)\, f \overset{\text{def}}{=} zF(a, b;\, c;\, z) * f(z), \tag{5}$$

где $F(a, b;\, c;\, z) = 1 + \Sigma_{k=1}^{\infty} ((a)_k (b)_k/(c)_k (1)_k)\, z^k$ — гипергеометрическая функция Гаусса, $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$, $f \in S$. Приведенное трехпараметрическое семейство операторов (5) в качестве частных случаев содержит определенные выше операторы (1) — (4). В самом деле, $\mathcal{B} \equiv \mathcal{F}(1, 1, 2)$, $\mathcal{B}_n^{-1} \equiv \mathcal{F}(1, n+1, 1)$, $\mathcal{B}_c \equiv \mathcal{F}(1, c+1, c+2)$, а $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{-1}$ соответственно равны $\mathcal{F}(1, 2, 3)$ и $\mathcal{F}(1, 3, 2)$.

Рассмотрение операторов Бернацкого, Либеры и др., записанных с помощью $F(a, b, c)$, дает возможность изучать (1)—(4) как частные случаи (5) при натуральных значениях параметров a, b и c, тогда как гипергеометрические операторы естественно исследовать и для вещественных (или комплексных) параметров.

Часть результатов настоящей работы анонсирована в [12].

2. Гипергеометрические операторы. Одна из основных задач, которые возникают при рассмотрении гипергеометрических операторов (5), такова [2]: при каких значениях параметров a, b и c оператор $\mathcal{F}(a, b, c)$ отображает класс S в себя? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}(a, b, c)$ — линейный гипергеометрический оператор в классе S. Если параметры a, b, c принадлежат области $H \subset \mathbb{R}_+^3$, описываемой неравенствами*

$$a > 0; \quad b > 0; \quad c > a + b + 2; \quad (\Gamma(c-a-b-2)\,\Gamma(c)/\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)) \times \\ \times [(a)_2 (b)_2 + 3ab\,(c-a-b-2) + (c-a-b-2)_2] < 2, \tag{6}$$

то $\mathcal{F}(a, b, c)$ отображает класс S в себя.

Доказательство. Так как оператор $\mathscr{F}(a, b, c)$, примененный к произвольной однолистной функции $f(z) = z + \Sigma_{n=2}^{\infty} a_n(f) z^n$, не должен выводить из класса S, то потребуем для функции

$$g(z) = \mathscr{F}(a, b, c) f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n = \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} a_n(f),$$

выполнимости условия

$$\sigma_1 = \sum_{n=2}^{\infty} n |b_n| < 1, \tag{7}$$

гарантирующего однолистность $g(z)$ в U (см. [1]). Для этого оценим сумму σ_1, используя равномерную оценку для n-го коэффициента однолистной функции $|a_n(f)| \leqslant n$, доказанную в [13]:

$$\sigma_1 = \sum_{n=2}^{\infty} n |b_n| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \left| \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} \right|.$$

Преобразуем ряд, стоящий в правой части неравенства:

$$\sigma_1 \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{n-1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-2)!} + \frac{1}{(1)_{n-1}} \right] \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}}.$$

Меняя индекс суммирования и используя тот факт, что $(a)_{n+1} = a(a+1)_n$, приходим к следующему:

$$\sigma_1 \leqslant \frac{(a)_2(b)_2}{(c)_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+2)_n (b+2)_n}{(c+2)_n (1)_n} \right] + 3\frac{ab}{c} \left[1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)_n (b+1)_n}{(c+1)_n (1)_n} \right] + \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} \right] - 1.$$

Выражения в квадратных скобках представляют собой гипергеометрические ряды вида $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$, которые при $\gamma > \alpha + \beta$ сходятся в U и в точке $z = 1$ равны $F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)\,\Gamma(\gamma) / \Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\gamma - \beta)$. По условию теоремы $c > a + b + 2$, поэтому все ряды сходятся. После окончательных упрощений получим

$$\sigma_1 \leqslant \frac{\Gamma(c-a-b-2)\,\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} [(a)_2(b)_2 + 3ab(c-a-b-2) +$$

$$+ (c-a-b-2)_2] - 1.$$

Теперь с помощью неравенства (6) из условия теоремы нетрудно видеть, что $\sigma_1 < 1$. Поэтому функция $g(z) = \mathscr{F}(a, b, c) f(z)$ однолистна в силу выполнимости условия (7).

Замечание 1. В работе [12] утверждение теоремы было сформулировано с учетом известной оценки Фитцджеральда $|a_n(f)| \leqslant \sqrt{7/6}n$ в гипотезе Бибербаха, которая в настоящее время доказана в [13]. Поэтому формулировка теоремы в данной работе уточнена.

Рассмотрим аналогичную задачу в классе S^0 выпуклых функций.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{F}(a, b, c)$ — линейный гипергеометрический оператор в классе S^0. Если параметры a, b и c принадлежат области*

$H_0 \subset \mathbb{R}^3_+$, *описываемой неравенствами*

$$a > 0; \qquad b > 0; \qquad c > a + b + 1;$$

$$(\Gamma(c - a - b - 1)\,\Gamma(c)/\Gamma(c - a)\,\Gamma(c - b))\,[ab + c - a - b - 1] \leqslant 2, \tag{8}$$

то $\mathscr{F}(a, b, c)$ *переводит любую выпуклую функцию в однолистную.*

Доказательство проводится по схеме, примененной выше. При этом вместо оценки $|a_n(f)| \leqslant n$ для однолистных функций используется точная оценка [14] $|a_n(f)| \leqslant 1$ в классе S^0 и проверяется выполнимость условия (7), которое следует из предположений теоремы (8).

3. Обобщенные операторы Бернацкого и Либеры. Во введении отмечалось, что оператор Бернацкого не сохраняет однолистности функций. Этому случаю соответствуют значения параметров $a = 1$, $b = 1$ и $c = 2$, при которых ряд $F(a, b; c; 1)$ расходится. Точка $(1,1,2)$ не принадлежит области H, поэтому мы не можем утверждать принадлежность функции $\mathscr{F}(1,1, 2)\, f(z)$ классу S. Тем интереснее утверждение, получаемое как частный случай теоремы 1.

Следствие 1. *Обобщенный оператор Бернацкого*

$$f \to \mathscr{F}(1, 1, n + 1)\, f \overset{\text{def}}{=} n! z^{1-n} \int_0^z \int_0^{\tau_n} \cdots \int_0^{\tau_2} \frac{f(\tau_1)}{\tau_1}\, d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

для любых значений $n > 8$ *переводит произвольную однолистную функцию в однолистную.*

Доказательство заключается в проверке принадлежности тройки параметров $(1,1,c)$ области H при $c > 9$. Для этого, полагая в (6) $a = b = 1$, приходим к соотношению

$$\sigma(c) = (\Gamma(c - 4)\,\Gamma(c)/\Gamma(c - 1)\,\Gamma(c - 1))\,[4 + 3(c - 4) + \\ + (c - 4)(c - 3)] < 2.$$

Функция $\sigma(c)$ — монотонно убывающая для значений $c > 4$ с горизонтальной асимптотой $\sigma = 1$. Значение c_0, при котором $\sigma(c_0) = 2$, легко отыскивается и равно $c_0 = (11 + \sqrt{33})/2$. Следовательно, для всех натуральных значений $n > 8$ точка с координатами $(1, 1, n + 1) \in H$, что, в силу теоремы 1, гарантирует однолистность $\mathscr{F}(1,1, n + 1)\, f(z)$.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что рассмотрение обобщенного оператора Бернацкого с натуральным параметром c несколько завышает значение этого параметра. Например, в случае, описанном в следствии 1, точное значение $c_0 = 8{,}37\ldots$. При этом для любых $c > c_0$ оператор $F(1,1,c)$ переводит класс S в себя.

Обратимся к исследованию обобщенного оператора Либеры. Как отмечалось, оператор $\mathscr{L} \equiv \mathscr{F}(1, 2, 3)$ не сохраняет однолистности функций из S, но, как и в случае оператора Бернацкого, можно показать, что обобщенный оператор Либеры этим свойством обладает.

Следствие 2. *Оператор* $\mathscr{F}(1, 2, 15 + \alpha)$ *при любых положительных значениях* α *переводит произвольную однолистную функцию в однолистную.*

Доказательство этого утверждения также заключается в проверке принадлежности точек с координатами $(1, 2, 15 + \alpha)$ области H, однако мы не станем выполнять эту проверку, а получим более общий результат, который как частные случаи включает в себя утверждения следствий 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть линейный гипергеометрический оператор* $\mathscr{F}(1, b, c)$ *задан на классе* S. *Если* $b > 0$ *и* $c > c_0(b) + b + 2$, *где* $c_0(b)$ *наибольший положительный корень уравнения*

$$y^3 - 4by^2 - (5b^2 + b + 1)\, y - (2b^3 + b^2 - b) = 0, \tag{9}$$

то оператор $\mathscr{F}(1, b, c + \varepsilon)$ *для любых положительных значений* ε *отображает класс* S *в себя.*

Доказательство. Наша задача заключается в том, чтобы доказать выполнимость неравенства

$$\sigma(b, c) = (\Gamma(c-b-3)\Gamma(c)/\Gamma(c-1)\Gamma(c-b))[(1)_2(b)_2 + \\ + 3b(c-b-3) + (c-b-3)_2] < 2 \tag{10}$$

при предположении о справедливости утверждения теоремы. Займемся исследованием неравенства (10). Обозначив $y = c - b - 2$, преобразуем $\sigma(b, c)$ к виду

$$\sigma(b, y+b+2) = \sigma_b(y) = \frac{b(b+1)(b+2)}{y-1} - \\ - \frac{2b^3+b^2-b}{y} + \frac{b^3-2b^2+b}{y+1} + 1.$$

Исходное неравенство (10) можно переписать в эквивалентной форме $\sigma_b(y) < 2$ или, воспользовавшись тем, что $y > 1$, в виде $b(b+1)(b+2)(y-1)^{-1} - (2b^3+b^2-b)y^{-1} + (b^3-2b^2+b)(y+1)^{-1} < 1$. Проводя простые преобразования, приходим к неравенству, эквивалентному (10): $y^3 - 4by^2 - (5b^2+b+1)y - (2b^3+b^2-b) > 0$, которое выполняется в силу предположений теоремы. Поэтому оператор $\mathscr{F}(1, b, c+\varepsilon)$ для указанных в условии теоремы значений параметров b и c переводит класс однолистных функций S в себя.

Замечание 3. Отыскание значения c_0, указанного в формулировке теоремы 3, представляет задачу, связанную с громоздкими вычислениями, поэтому для расчетов полезно воспользоваться следующей приближенной формулой:

$$c_0 \approx 6b - 1, \quad c > 7b + 1. \tag{11}$$

Приближенный подсчет c по формуле (11) при $b = 1$ и $b = 2$ дает значения 8 и 15 соответственно, что незначительно отличается от точных значений.

4. Однолистные функции с квазиконформным продолжением. Обозначим через S_Q, $1 \leqslant Q < \infty$, множество всех однолистных Q-квазиконформных отображений $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ таких, что $f|_U \in S$ (см [15] г. VI]). С помощью введенного гипергеометрического оператора (5) можно построить отображение $F(a, b, c): S \to S_Q$ при соответствующем выборе параметров.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{F}(a, b, c)$ — линейный гипергеометрический оператор. Если параметры a, b, c принадлежат области $H_Q \subset \mathbb{R}^3_+$, описываемой неравенствами*

$$a > 0; \quad b > 0; \quad c > a + b + 2; \quad (\Gamma(c-a-b-2)\Gamma(c)/\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)) \times \\ \times [(q+1)(a)_2(b)_2 + 2(2q+1)ab(c-a-b-2) + 2q(c-a-b-2)_2] < q, \tag{12}$$

где $q = (Q-1)(Q+1)^{-1}$, то $\mathscr{F}(a, b, c)$ переводит любую однолистную функцию в однолистную функцию, допускающую Q-квазиконформное продолжение.

Доказательство. Убедимся в выполнимости для

$$g(z) = \mathscr{F}(a, b, c) f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n = \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} a_n(f)$$

достаточного условия Q-квазиконформной продолжимости [16]

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - (1-q)/(1+q)) |b_n| < 2q/(1+q). \tag{13}$$

Для этого оценим $|a_n(f)| \leqslant n$ и преобразуем сумму

$$\sigma_1 = \sum_{n=2}^{\infty} (n - (1-q)/(1+q))\, n\, (a)_{n-1} (b)_{n-1}/(c)_{n-1} (1)_{n-1}.$$

Путем прямых вычислений, сходных с проводившимися при доказательстве теоремы 1, получим

$$\sigma_1 = \frac{(a)_2 (b)_2}{(c)_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+2)_n (b+2)_n}{(c+2)_n (1)_n} \right] + 2\frac{ab}{c} \left[1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)_n (b+1)_n}{(c+1)_n (1)_n} \right] + \frac{2q}{1+q} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} \right] - \frac{2q}{1+q}.$$

Представляя выражения в квадратных скобках с помощью гипергеометрических рядов вида $F(\alpha, \beta; \gamma; 1)$, проводя окончательные упрощения и используя неравенство (12) из условия теоремы, убеждаемся в справедливости оценки $\sigma_1 < 2q(1+q)^{-1}$, что гарантирует выполнимость (13). Таким образом, функция $\mathcal{F}(a, b, c) f(z)$ допускает Q-квазиконформное продолжение на всю расширенную комплексную плоскость.

Замечание 4. Множество $U_Q\{f|_U : f \in S\}$ всюду плотно в классе S относительно топологии локально равномерной сходимости, поэтому предельный переход при $Q \to \infty$ приводит к области значений H, описанной в теореме 1.

Нетрудно отыскать значения c_q, начиная с которых обобщенные операторы Бернацкого $\mathcal{F}(1, 1, c)$ или Либеры $\mathcal{F}(1, 2, c)$ переводят класс S в S_Q.

В заключение сформулируем две задачи, тесно связанные с изложенным выше.

1. Найти точную область изменения параметров $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, для которых гипергеометрический оператор $\mathcal{F}(a, b, c) : S \to S$.

2. Определить точное значение c_0, начиная с которого обобщенные операторы Бернацкого и Либеры переводят класс S в себя. Гипотеза: $5 \leqslant c_0 \leqslant 9$.

1. *Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А.* Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций.— Успехи мат. наук, 1975, 30, № 4, с. 3—60.
2. *Хохлов Ю. Е.* Операторы и операции на классе однолистных функций.— Изв. вузов. Математика, 1978, № 10, с. 83—89.
3. *Biernacki M.* Sur l'integral des fonction univalentes.— Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math., Astronom. et Phys., 1960, 8, № 1, p. 29—34.
4. *Alexander J.* Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions.— Ann. of math., 1915—1916, 17, p. 12—22.
5. *Krzyz J., Lewandowski Z.* On the integral of univalent functions.— Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math., Astronom. et Phys., 1963, 11, N 7, p. 447—448.
6. *Похилевич В. А.* Об одной теореме М. Бернацкого.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1965, № 4, с. 423—425.
7. *Libera R.* Some classes of regular univalent functions.— Proc. Amer. Math. Soc., 1965, 16, № 4, p. 755—758.
8. *Bernardi S. D.* Convex and starlike univalent functions.— Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 135, p. 429—446.
9. *Campbell D. M., Singh V.* Valence properties of the solutions of a differential equation.— Pacific J. Math., 1979, 84, N 1, p. 29—33.
10. *Ruscheweyh St.* New criteria for univalent functions. — Proc. Amer. Math. Soc., 1975, 49, № 1, p. 109—115.
11. *Livingston A.* On the radius of univalence of certain analytic functions.— Proc. Amer. Math. Soc., 1966, 17, N 2, p. 352—357.
12. *Хохлов Ю. Е.* Свертка Адамара, гипергеометрические функции и линейные операторы в классе однолистных функций.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1984, № 7, с. 25—27.
13. *Branges L. de.* A proof of the Bieberbach conjecture.— Leningrad, 1984.— 21 p.— (Preprint / LOMI; E—5—84)
14. *Pommerenke C.* Univalent functions.— Göttingen : Vandenhoeck and Ruprecht, 1975.— 376 p.

15. *Крушкаль С. Л.* Квазиконформные отображения и римановы поверхности.— Новосибирск : Наука, 1975.— 195 с.
16. *Brown J. E.* Quasiconformal extensions for some geometric subclasses of univalent functions.— Abstracts Amer. Math. Soc., 1982, 3, N 7, p. 561.

Донецк. гос. ун-т

Поступила 10.11.83