УДК 517

А. Б. Харазишвили

О некоторых σ-алгебрах

В настоящей статье рассматриваются структурные свойства некоторых σ-алгебр частей основных базисных пространств, а также исследуются свойства различных мер, определяемых на этих σ-алгебрах.

В дальнейшем мы будем иметь дело главным образом с основным базисным пространством E, мощность которого равна первому несчетному кардинальному числу ω_1 и которое наделено определенной группой преобразований G. Предполагаем, что все рассматриваемые ниже меры, задаваемые на пространстве E, являются рассеянными, т. е. принимают нулевые значения на одноэлементных подмножествах в E. Символом ω_0, как обычно, будем обозначать первый бесконечный кардинал, т. е. мощность множества N всех натуральных чисел.

Пусть μ — какая-нибудь полная мера на пространстве E. Напомним, что множество $X \subset E$ называется почти G-инвариантным относительно этой меры, если

$$(\forall g)\,(g \in G \Rightarrow \mu\,(g\,(X)\,\Delta X) = 0).$$

Ясно, что класс всех таких множеств образует σ-алгебру в E. Далее, множество $X \subset E$ называется почти G-инвариантным в пространстве E, если $(\forall g)\ (g \in G \Rightarrow \mathrm{Card}\ (g\ (X)\ \Delta X) \leqslant \omega_0)$. Таким образом, почти G-инвариантные множества являются почти G-инвариантными относительно любой меры, заданной на базисном пространстве E.

Имеет место следующая основная лемма.

Лемма 1. *Предположим, что мощность группы G равна ω_1 и эта группа действует транзитивно в пространстве E. Тогда найдется дизъюнктное покрытие $(X_i)_{i \in I}$ пространства E, удовлетворяющее таким соотношениям:*

1) $\mathrm{Card}.(I) = \omega_1$;
2) $(\forall i)\,(i \in I \Rightarrow \mathrm{Card}\,(X_i) \leqslant \omega_0)$;
3) *каково бы ни было множество $J \subset I$, объединение частичного семейства $(X_i)_{i \in J}$ представляет собой почти G-инвариантное подмножество базисного пространства E.*

Доказательство. Пусть $(G_\xi)_{\xi < \omega_1}$ — возрастающая по включению трансфинитная последовательность групп, мощность каждой из которых не превосходит ω_0, а их объединение совпадает с исходной группой G. Зафиксируем какой-нибудь элемент $e \in E$ и для всякого индекса $\xi < \omega_1$ положим $X_\xi = G_\xi\,(e) \setminus \bigcup\limits_{\zeta < \xi} G_\zeta\,(e)$. Непосредственная проверка позволяет убедиться в том, что семейство $(X_i)_{i \in I} = (X_\xi)_{\xi < \omega_1}$ является искомым. Тем самым лемма доказана.

Теорема 1. *Предположим, что выполняется гипотеза континуума, и пусть E — основное базисное пространство мощности ω_1, а G — группа преобразований этого пространства, действующая в нем транзитивно и имеющая ту же мощность. Тогда существует счетное семейство $(E_{m,n})_{m<\omega_0, n<\omega_0}$ частей пространства E, обладающее следующими свойствами:*

1) *каждое множество $E_{m,n}$ почти G-инвариантно в E;*

2) *какова бы ни была ненулевая σ-конечная мера μ, заданная на E, найдется хотя бы одно множество $E_{m,n}\,(\mu)$ из указанного семейства, не принадлежащее области определения меры μ.*

Доказательство. Воспользуемся известной матрицей Банаха — Куратовского. Пусть I — множество индексов, мощность которого равна ω_1. Если выполняется гипотеза континуума, то, согласно результату Банаха — Куратовского [1], существует счетное семейство $(I_{m,n})_{m<\omega_0, n<\omega_0}$ частей множества I, удовлетворяющее приведенным ниже соотношениям:

а) $I_{m,n} \subset I_{m+1,n}$;

б) $\bigcup\limits_m I_{m,n} = I$ при любом $n < \omega_0$;

в) для всякого отображения $f: N \to N$ пересечение $\bigcap\limits_n I_{f(n),n}$ не более чем счетно.

Из этих соотношений непосредственно вытекает, что для произвольной ненулевой σ-конечной меры λ, заданной на I и принимающей нулевые значения на одноэлементных подмножествах в I, обязательно найдется хотя бы одно множество $I_{m,n}(\lambda)$, не измеримое относительно λ. Пусть теперь $(X_i)_{i\in I}$ — дизъюнктное покрытие базисного пространства E, описанное в лемме 1. Для каждой пары $(m, n)\in N\times N$ положим $E_{m,n}=\bigcup_{i\in I_{m,n}} X_i$. Тогда легко проверяется, что семейство $(E_{m,n})_{m<\omega_0, n<\omega_0}$ обладает свойствами 1) и 2), т. е. является искомым.

Замечание 1. Вместо матрицы Банаха — Куратовского можно было воспользоваться так называемым множеством Лузина. Пусть R — действительная прямая. Если справедлива гипотеза континуума, то с помощью трансфинитной индукции без особого труда можно построить множество $I\subset R$, удовлетворяющее следующим соотношениям:

а) I несчетно;

б) I всюду плотно в R;

в) любое нигде не плотное множество в R пересекается с множеством I не более чем в счетном числе точек.

Такое множество I и называется множеством Лузина.

Рассмотрим I как метрическое пространство (наделенное индуцированной метрикой). Ясно, что всякое множество первой категории в I не более чем счетно. Поэтому каждая σ-конечная борелевская мера в I, принимающая нулевые значения на одноточечных частях от I, тождественно равна нулю (мы воспользовались хорошо известной теоремой теории метрических пространств, в силу которой произвольная рассеянная σ-конечная борелевская мера, заданная в сепарабельном метрическом пространстве, обязательно сосредоточена на некотором подмножестве первой категории этого пространства). Если обозначить символом $(I_{m,n})_{m<\omega_0, n<\omega_0}$ какую-нибудь счетную базу пространства I и определить множества $E_{m,n}$ посредством аналогичных равенств $E_{m,n}=\bigcup_{i\in I_{m,n}} X_i$, то получится семейство $(E_{m,n})_{m<\omega_0, n<\omega_0}$, для которого выполняются свойства 1) и 2) теоремы 1.

Замечание 2. Пусть снова E — основное базисное пространство мощности ω_1, а G — некоторая группа преобразований этого пространства, действующая в нем транзитивно и имеющая ту же мощность. Тогда можно утверждать, что существует семейство $(E_\xi)_{\xi<\omega_1}$ частей пространства E удовлетворяющее приводимым ниже соотношениям:

1) каждое множество E_ξ почти G-инвариантно в E;

2) какова бы ни была ненулевая σ-конечная мера μ, заданная на E, в семействе $(E_\xi)_{\xi<\omega_1}$ найдется несчетное число попарно непересекающихся множеств, не измеримых относительно μ.

Доказательство этого утверждения (с помощью леммы 1) аналогично доказательству теоремы 1, только вместо матрицы Банаха — Куратовского надо применить трансфинитную матрицу Улама [2]. Особо отметим, что при доказательстве существования семейства $(E_\xi)_{\xi<\omega_1}$ не требуется гипотеза континуума. Отметим также, что упомянутая трансфинитная матрица Улама используется в различных вопросах теории инвариантных мер, связанных с продолжимостью этих мер (см. [3]).

Замечание 3. Рассмотрим n-мерное евклидово пространство R^n, $n\geqslant 1$, наделенное группой G_n всех его изометрических преобразований. Пусть l_n обозначает обычную n-мерную лебегову меру, задаваемую на этом пространстве. Остается нерешенным следующий вопрос: содержит ли пространство R^n хотя бы одно подмножество, не измеримое относительно меры l_n и почти G_n-инвариантное относительно этой же меры? Имеются основания предполагать, что этот вопрос вообще неразрешим без применения дополнительных теоретико-множественных гипотез. С другой стороны, рассмотрим σ-алгебру всех тех частей пространства R^n, которые представимы в виде $(X\cup Y)\setminus Z$, где X — измеримое по Лебегу подмножество в R^n, а Y и Z — неконтинуальные подмножества в R^n, т. е. $\mathrm{Card}\,(Y)<2^{\omega_0}$, $\mathrm{Card}\,(Z)<2^{\omega_0}$. На указанной σ-алгебре определим функционал $\bar{l}_n$ с помощью равенства $\overline{l}_n((X \cup Y) \setminus Z) = l_n(X)$. Нетрудно проверить, что такое определение корректно и что функционал $\overline{l}_n$ представляет собой G_n-инвариантную меру, служащую продолжением лебеговой меры l_n. Заметим, что функционал $\overline{l}_n$ невозможно отличить от меры l_n, поскольку соотношение $\overline{l}_n = l_n$ не противоречит аксиомам теории множеств. В то же время для меры $\overline{l}_n$ сформулированный выше вопрос решается положительным образом, т. е. в пространстве R^n существует множество, не измеримое относительно меры $\overline{l}_n$ и почти G_n-инвариантное относительно этой же меры (множество, обладающее указанными свойствами, без особого труда строится методом трансфинитной индукции). Следовательно, можно сказать, что мера $\overline{l}_n$ в некотором «обобщенном» смысле позволяет дать решение поставленного выше вопроса (подробнее о таком подходе к различным неразрешимым соотношениям теории множеств см. в работе [4]).

Пусть E — базисное пространство мощности ω_1, а M — некоторый класс мер, заданных на этом пространстве. Будем говорить, что мера $\mu \in M$ обладает свойством единственности в классе M, если для всякой меры $\lambda \in M$, область определения которой совпадает с областью определения меры μ, выполняется равенство $\lambda = \mu$.

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что пространство E наделено транзитивной группой преобразований G, имеющей мощность ω_1, а также ненулевой σ-конечной G-инвариантной мерой μ. Обозначим символом M_μ класс всевозможных мер, задаваемых на E и являющихся продолжениями меры μ. Пусть μ' — произвольная G-инвариантная мера, принадлежащая классу M_μ и обладающая свойством единственности в этом классе. Тогда найдется G — инвариантная мера μ'', служащая строгим продолжением меры μ' и также обладающая свойством единственности в указанном классе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу замечания 2 существует почти G-инвариантное множество $T \subset E$, не измеримое относительно меры μ' и такое, что $\mu'_*(T) = 0$.

Рассмотрим σ-алгебру S всех тех частей пространства E, которые представимы в виде $(X \cup T_1) \setminus T_2$, где множество X принадлежит области определения меры μ', а множества T_1 и T_2 принадлежат счетно-аддитивному G-инвариантному идеалу, порождаемому одноэлементным семейством $\{T\}$. На σ-алгебре S зададим функционал μ'' с помощью равенства $\mu''((X \cup T_1) \setminus T_2) = \mu'(X)$. Легко проверяется, что функционал μ'' определен корректно и представляет собой G-инвариантную меру, являющуюся строгим продолжением меры μ'. Остается убедиться в том, что мера μ'' обладает свойством единственности в классе M_μ. Но это вытекает из тех фактов, что мера μ' обладает свойством единственности в классе M_μ и что каждая мера, принадлежащая классу M_μ, одновременно принимает нулевые значения на всех элементах указанного выше идеала.

З а м е ч а н и е 4. Можно сформулировать аналог теоремы 2 и для σ-конечных G-квазиинвариантных мер. Доказательство проходит по той же схеме.

З а м е ч а н и е 5. Неизвестно, можно ли получить аналог теоремы 2 для евклидова пространства R^n, $n \geqslant 1$, наделенного транзитивной группой G изометрических преобразований и ненулевой σ-конечной G-инвариантной мерой μ. Здесь, разумеется, речь идет о получении аналога этой теоремы без использования дополнительных теоретико-множественных гипотез.

Итак (см. замечание 3), в ряде случаев конкретные вопросы, касающиеся свойств конкретных σ-алгебр и мер, задаваемых на этих σ-алгебрах, оказываются неразрешимыми при современной аксиоматике теории множеств. Приведем еще один пример такого рода.

Пусть S_1 обозначает σ-алгебру всех частей единичного сегмента $[0, 1]$, а S_2 — σ-алгебру всех частей единичного квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$. Далее, обозначим символом $S_1 \times S_1$ ту σ-алгебру частей единичного квадрата, которая является произведением σ-алгебры S_1 на σ-алгебру S_1. Естественно возникает вопрос: имеет ли место равенство $S_1 \times S_1 = S_2$? Для исследования этого вопроса предположим сначала, что выполняется гипотеза континуума. Тогда, как известно, квадрат $[0,1] \times [0,1]$ можно разбить на два множества A и B такие, что: 1) для любого $x \in [0,1]$ отрезок $\{x\} \times [0, 1]$ пересекается с множеством A не более чем в счетном числе точек; 2) для любого $y \in [0,1]$ отрезок $[0,1] \times \{y\}$ пересекается с множеством B не более чем в счетном числе точек. Отсюда легко вывести, что имеет место равенство $S_1 \times \times S_1 = S_2$, т. е. при гипотезе континуума ответ на поставленный вопрос положительный.

С другой стороны, предположим, что выполняется следующая гипотеза: мощность континуума есть наименьшее кардинальное число, обладающее тем свойством, что на множестве всех его частей можно определить вероятностную рассеянную меру. Покажем, что в таком случае $S_1 \times S_1 \neq S_2$. Допустим противное: $S_1 \times S_1 = S_2$. Пусть μ_1 — какая-нибудь вероятностная рассеянная мера, определенная на множестве всех частей единичного сегмента $[0, 1]$, и φ—начальное порядковое число, соответствующее мощности континуума. Точки сегмента $[0,1] \times \{0\}$ занумеруем в инъективную φ-последовательность $(x_\xi)_{\xi<\varphi}$, а точки сегмента $\{0\}\times[0, 1]$ занумеруем в инъективную φ-последовательность $(y_\xi)_{\xi<\varphi}$. Далее, положим $A=\{(x_\xi, y_\zeta): :\zeta<\xi\}$, $B=\{(x_\xi, y_\zeta):\xi\leqslant\zeta\}$. Получим разбиение $\{A, B\}$ единичного квадрата $[0, 1]\times[0, 1]$. Мера $\mu_2=\mu_1\times\mu_1$ определена на всех подмножествах этого квадрата. Применяя теорему Фубини, будем иметь $\mu_2(A)=0$, $\mu_2(B)=0$, что противоречит равенству $\mu_2(A\cup B)=1$. Таким образом, в случае справедливости сформулированной выше гипотезы ответ на поставленный вопрос будет отрицательным.

1. *Banach S.*, *Kuratowski C.* Sur une generalisation du probleme de la mesure.— Fund. Math., 1929, **14**, p. 127—131.
2. *Ulam S.* Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre, Fund. Math., 1930, **16**, p. 140—150.
3. *Харазишвили А. Б.* О продолжениях инвариантных мер.— Сообщ.АН ГССР, 1976, **83**, № 3, с. 533—536.
4. *Харазишвили А. Б.* Об одном подходе к некоторым неразрешимым соотношениям теории множеств.— Сообщ. АН ГССР, 1983, **112**, № 3, с. 485—488.

Ин-т матем. АН УССР. Киев

Поступила 29.03.84