УДК 517.944

Н. А. Евхута, П. П. Забрейко

О методе А. М. Самойленко отыскания периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

В работах [1, 2] А. М. Самойленко предложен и детально изучен новый метод отыскания периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем им и его учениками и последователями этот метод был перенесен на различные классы дифференциальных и эволюционных уравнений; в монографии [3] подведен итог основной части этих исследований.

В предлагаемой работе делается попытка так обобщить метод А. М. Самойленко, чтобы он оказался применимым и для исследования уравнений вида

$$x' = Ax + f(t, x) \tag{1}$$

с неограниченными операторами A (включающих, как известно, уравнения в частных производных параболического и гиперболического типов). Следует отметить, что некоторые результаты об уравнениях типа (1) изложены в [3], однако они относятся лишь к тому случаю, когда оператор A ограничен. Впрочем, излагаемые ниже результаты являются новыми и в случае, когда уравнение (1)—конечномерная система с нулевым оператором A.

1. Допустим, что X — некоторое банахово пространство, $f(t, x)$ — определенная при $t \in R$ и $x \in X$ и принимающая значения в X непрерывная по совокупности переменных и ω-периодическая по t функция; A — некоторый линейный, вообще говоря, неограниченный оператор в X, определяющий в X полугруппу $T(t)$.

Как хорошо известно, ω-периодические решения уравнения (1) должны дополнительно удовлетворять условию

$$x(\omega) = x(0). \tag{2}$$

Справедливо и обратное утверждение: если $x(t)$ — определенное на $[0, \omega]$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), то оно является сужением на $[0, \omega]$ ω-периодического решения уравнения (1).

Если $x(t)$ — решение уравнения (1), то (см., напр., [4]) оно удовлетворяет и интегральному уравнению

$$x(t) = T(t)x(0) + \int_0^t T(t-s) f(s, x(s))\, ds; \tag{3}$$

обратное в случае неограниченного оператора A, вообще говоря, неверно. Однако принято говорить о решениях уравнения (3) как об обобщенных решениях уравнения (1). Ниже речь будет идти именно об обобобщенных решениях уравнения (1), т. е. о решениях уравнения (3). Впрочем, при дополнительных предположениях о функции $f(t, x)$ обычными методами (см., напр., [4]) легко показать, что рассматриваемые обобщенные решения уравнения (1) будут классическими его решениями.

Нетрудно видеть, что задача об обобщенных ω-периодических решениях уравнения (1) равносильна задаче о разрешимости нелинейного интегрального уравнения

$$x(t) = T(t)\,x(\omega) + \int_0^t T(t-s)\,f(s,\ x(s))\,ds. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь нелинейное интегральное уравнение

$$x(t) = (T(t) + \omega^{-1}t - \omega^{-1}tT(\omega))\,\xi + \int_0^t T(t-s)\,f(s,\ x(s))\,ds - \omega^{-1}t\int_0^\omega T(\omega-s)\,f(s,\ x(s))\,ds \tag{5}$$

с параметром $\xi \in X$. Допустим, что это уравнение при любом $\xi \in X$ имеет единственное решение

$$x(t) = W\xi(t). \tag{6}$$

Тогда это решение будет и решением уравнения (4), если ξ таково, что

$$\xi - T(\omega)\,\xi = \int_0^\omega T(\omega-s)\,f(s,\ W\xi(s))\,ds. \tag{7}$$

Действительно, если (6) выполнено, то (5) можно переписать в виде (3). Более того, полагая в (5) $t = \omega$, получаем $x(\omega) = \xi$; иными словами, справедливо и (4).

Таким образом, в сделанных предположениях вместо уравнения (4) можно изучать систему (5), (7).

В частном случае, когда $A = 0$, уравнение (5) принимает вид

$$x(t) = \xi + \int_0^t f(s,\ x(s))\,ds - \omega^{-1}t\int_0^\omega f(s,\ x(s))\,ds,$$

а уравнение (7) —

$$\int_0^\omega f(s,\ W\xi(s))\,ds = 0.$$

Полученные уравнения — это уравнения численно-аналитического метода А. М. Самойленко нахождения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, рассматриваемый в этой работе метод исследования периодических решений уравнения (1) является непосредственным обобщением метода А. М. Самойленко.

2. Рассмотрим операторные функции

$$h(t) = T(t) + \omega^{-1}t - \omega^{-1}tT(\omega) \tag{8}$$

и

$$S(t,\ s) = \begin{cases} T(t-s) - \omega^{-1}tT(\omega-s) & \text{при} \quad s \leqslant t, \\ -\omega^{-1}tT(\omega-s) & \text{при} \quad s > t. \end{cases} \tag{9}$$

Уравнение (5) можно переписать в виде интегрального уравнения с параметром ξ:

$$x(t) = h(t)\,\xi + \int_0^\omega S(t,\ s)\,f(s,\ x(s))\,ds. \tag{10}$$

Для доказательства его разрешимости (т. е. доказательства существования оператора (6)) естественно в первую очередь воспользоваться методом последовательных приближений. Иначе говоря, искать оператор (6) как предел последовательных приближений

$$W_{n+1}\xi(t) = h(t)\xi + \int_0^\omega S(t, s) f(s, W_n\xi(s))\, ds, \tag{11}$$

в которых в качестве начального приближения W_0 выбран, например, оператор $h(t)\,\xi$.

Наиболее простым способом доказательства сходимости последовательных приближений (11) является применение принципа Банаха — Каччиополли сжимающих отображений. Естественно, при этом приходится требовать, чтобы функция $f(t, x)$ удовлетворяла условию Липшица по переменной x:

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leqslant k \| x_1 - x_2 \|. \tag{12}$$

Тогда, если использовать действующий в пространстве C непрерывных на $[0, \omega]$ вещественных функций интегральный оператор

$$Qz(t) = \int_0^\omega \| S(t, s) \| z(s)\, ds, \tag{13}$$

то оператор L, стоящий в правой части уравнения (10), будет удовлетворять в пространстве $C(X)$ непрерывных на $[0, \omega]$ и принимающих значения в пространстве X функций (с обычной нормой) условию

$$\| Lx_1(t) - Lx_2(t) \| \leqslant kQ \| x_1(t) - x_2(t) \| \quad (0 \leqslant t \leqslant \omega). \tag{14}$$

Из этого неравенства вытекает сходимость последовательных приближений (11), если только спектральный радиус $\rho(kQ)$ действующего в пространстве C оператора kQ меньше, чем 1.

Положим

$$m = \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \| h(t) \|. \tag{15}$$

Из приведенных рассуждений вытекает теорема об условиях применимости метода А. М. Самойленко для отыскания ω-периодических решений уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица* (11), *причем $k\rho(Q) < 1$, где Q — оператор* (13). *Тогда оператор* (6) *определен на всем пространстве $C(X)$, действует в нем и удовлетворяет условию Липшица с постоянной*

$$\tilde{k} = m \sum_{n=0}^{\infty} k^n \| Q^n \|. \tag{16}$$

Для применения теоремы 1 нужно уметь вычислять или хотя бы оценивать нормы операторнозначных функций (8) и (9), число (15) и спектральный радиус $\rho(Q)$ оператора (13). Далее будут рассмотрены основные случаи, когда это можно сделать.

3. Рассмотрим простейший частный случай, когда $A = 0$. Очевидно,

$$h(t) = I, \quad S(t, s) = \begin{cases} (1 - \omega^{-1}t)\, I & \text{при } s \leqslant t, \\ -\omega^{-1}tI & \text{при } s > t, \end{cases} \tag{17}$$

и поэтому $m = 1$, а оператор (13) имеет ядро

$$\| S(t, s) \| = \begin{cases} 1 - \omega^{-1}t & \text{при } s \leqslant t, \\ \omega^{-1}t & \text{при } s > t. \end{cases} \tag{18}$$

Для вычисления спектрального радиуса этого оператора достаточно (см., напр., [5]) найти его положительную собственную функцию; отвечающее ей положительное собственное значение и есть, в силу теоремы Перрона — Ентча, спектральный радиус $\rho(Q)$.

Уравнение $\lambda z = Qz$ можно переписать в виде $\lambda z(t) = (1 - 2\omega^{-1}t)\int\limits_0^t z(s)ds + \omega^{-1}t\int\limits_0^\omega z(s)\,ds$, откуда

$$\int\limits_0^t z(s)\,ds = (\lambda\omega)^{-1}\exp(\lambda^{-1}(t - \omega^{-1}t^2))\int\limits_0^t \exp(-\lambda^{-1}(s - \omega^{-1}s^2))\left(s\int\limits_0^\omega z(\sigma)d\sigma\right)ds =$$

$$= (\lambda\omega)^{-1}\exp(\lambda^{-1}(t - \omega^{-1}t^2))\int\limits_0^t s\exp(-\lambda^{-1}(s - \omega^{-1}s^2))\,ds\int\limits_0^\omega z(s)\,ds.$$

Полагая $t = \omega$ и сокращая на положительный множитель $\int\limits_0^\omega z(s)\,ds$, получаем уравнение $1 = (\lambda\omega)^{-1}\int\limits_0^\omega s\exp(-\lambda^{-1}(s - \omega^{-1}s^2))\,ds$, которое после несложных преобразований принимает вид

$$\int\limits_0^{(2\sqrt{\varkappa})-1}\exp\sigma^2 d\sigma = \sqrt{\varkappa}\exp(4\varkappa)^{-1} \quad (\varkappa = \omega^{-1}\lambda). \tag{19}$$

Очевидно, это уравнение имеет единственное решение $\varkappa$, заключенное, как показывает несложный подсчет, между числами 0,292 и 0,293. Таким образом верна такая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $A = 0$. *Тогда* $m = 1$ *и* $\rho(Q) = \varkappa\omega$, *где* $\varkappa$ — *корень уравнения* (19) ($\varkappa = 0{,}293$).

Путем прямого анализа последовательных приближений (11) в [3] показано, что в рассматриваемом случае они сходятся при $k\omega < \pi$. Теоремы 1 и 2 позволяют утверждать, что число π в этом неравенстве можно заменить на большее число $\varkappa^{-1} \approx 3{,}417$.

4. Рассмотрим случай, когда X — гильбертово пространство, а A — отрицательно определенный и самосопряженный оператор. В этом случае в силу классической спектральной теоремы справедливы равенства

$$\|h(t)\| = \sup_{\lambda\in \mathrm{sp}A}(e^{\lambda t} + \omega^{-1}t(1 - e^{\lambda\omega})), \tag{20}$$

$$\|S(t, s)\| = \begin{cases} \sup\limits_{\lambda\in \mathrm{sp}A}(e^{\lambda(t-s)} - \omega^{-1}te^{\lambda(\omega-s)}) & \text{при } s \leqslant t, \\ \sup\limits_{\lambda\in \mathrm{sp}A}\omega^{-1}te^{\lambda(\omega-s)} & \text{при } s > t. \end{cases} \tag{21}$$

Однако точное вычисление этих функций в общем случае, по-видимому, невозможно, и поэтому приходится пользоваться их различными оценками сверху.

Очевидно, однако, что в рассматриваемом случае $m = 1$, так как функция $e^{\lambda t} + \omega^{-1}t(1 - e^{\lambda\omega})$ при $t \in [0, \omega]$, $\lambda \in (-\infty, 0)$ не превышает 1, а при $t = 0$ равна 1.

Далее, так как спектр оператора A содержится в $(-\infty, 0)$, то ядро $\|S(t, s)\|$ оператора A не превышает ядра

$$q_1(t, s) = \begin{cases} \sup\limits_{\lambda<0}(e^{\lambda(t-s)} - \omega^{-1}te^{\lambda(\omega-s)}) & \text{при } s \leqslant t, \\ \sup\limits_{\lambda<0}\omega^{-1}te^{\lambda(\omega-s)} & \text{при } s > t \end{cases} \tag{22}$$

(совпадая с ним, по крайней мере, в случае, когда $\mathrm{sp}\,A = (-\infty, 0)$). Несложный подсчет показывает, что

$$q_1(t, s) = \begin{cases} (\omega - t)(\omega - s)^{-1}(\omega t^{-1})^{(t-s)/(\omega-t)}((t-s)(\omega-s)^{-1})^{(t-s)/(\omega-s)} & \text{при} \quad s \leqslant t, \\ \omega^{-1}t & \text{при} \quad s > t. \end{cases}$$

К сожалению, вычислить спектральный радиус интегрального оператора с этим ядром в явном виде не удается.

Однако для приложений достаточно иметь оценки сверху для спектрального радиуса $\rho(Q_1)$ оператора Q_1 с ядром (22). Для получения простейших из них достаточно заметить, что ядро (22) не превышает ядра

$$q_2(t, s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s \leqslant t, \\ \omega^{-1}t & \text{при } s > t. \end{cases} \tag{23}$$

Спектральный радиус $\rho(Q_2)$ соответствующего интегрального оператора Q_2 легко вычисляется по изложенной в п. 3 схеме; он оказывается равным $\varkappa\omega$, где $\varkappa$ — корень уравнения

$$2 \int_0^{(\sqrt{2\varkappa})^{-1}} \exp \sigma^2 d\sigma = \sqrt{2\varkappa} \exp(2\varkappa)^{-1}. \tag{24}$$

Более точные оценки можно получить из неравенств $\rho(Q) \leqslant \| Q^n \|^{1/n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Несложный подсчет показывает, что $\| Q_1 \| = 0{,}612\,\omega$, $\sqrt{\| Q_1^2 \|} = 0{,}519\,\omega$, и поэтому $\rho(Q_1) \leqslant 0{,}519\,\omega$. Таким образом, верна теорема.

Теорема 3. *Пусть A — отрицательно определенный и самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X. Тогда $m = 1$ и $\rho(Q) \leqslant 0{,}519\,\omega$.*

Утверждение теоремы 3 можно существенно уточнить, если известны числа $m(A)$, $M(A)$ (или хотя бы одно из них), или если известно, что спектр оператора A имеет люки.

5. Пусть X — гильбертово пространство, A — кососамосопряженный оператор в X. В этом случае в силу классической спектральной теоремы справедливы аналогичные (20) и (21) равенства

$$h(t) = \sup_{\lambda \in \mathrm{sp} A} | e^{\lambda t} + \omega^{-1} t (1 - e^{\lambda\omega}) | \tag{25}$$

и

$$\| S(t, s) \| = \begin{cases} \sup\limits_{\lambda \in \mathrm{sp} A} | e^{\lambda(t-s)} - \omega^{-1} t e^{\lambda(\omega - s)} | & \text{при } s \leqslant t, \\ \sup\limits_{\lambda \in \mathrm{sp} A} | \omega^{-1} t e^{\lambda(\omega - s)} | & \text{при } s > t. \end{cases} \tag{26}$$

Как и в предыдущем случае, точное вычисление этих функций, вообще говоря, невозможно. Однако каждая из них мажорируется функцией

$$p(t) = \sup_{-\infty < z < \infty} | e^{izt} + \omega^{-1} t (1 - e^{iz\omega}) | \tag{27}$$

$$q_1(t, s) = \begin{cases} \sup\limits_{-\infty < z < \infty} | e^{iz(t-s)} - \omega^{-1} t e^{iz(\omega - s)} | & \text{при } s \leqslant t, \\ \sup\limits_{-\infty < z < \infty} | \omega^{-1} t e^{iz(\omega - s)} | & \text{при } s > t, \end{cases} \tag{28}$$

соответственно (причем функции (25) и (27) и функции (26) и (28) совпадают, если $\mathrm{sp}\, A = (-\infty, \infty)$). Нетрудно показать, что

$$p(t) = 1 + 2\omega^{-1} t \tag{29}$$

и

$$q_1(t, s) = \begin{cases} 1 + \omega^{-1} t & \text{при } s \leqslant t, \\ \omega^{-1} t & \text{при } s > t. \end{cases} \tag{30}$$

Из этих соотношений очевидно следует, что $m \leqslant 3$. Спектральный радиус

$\rho(Q_1)$ интегрального оператора Q_1 с ядром (30) вычисляется по изложенной в п. 3 схеме; он определяется равенством $\rho(Q_1) = \varkappa\omega$, где $\varkappa$ — единственный корень уравнения

$$\exp \varkappa^{-1} = 2\varkappa^{-1} + 1. \tag{31}$$

Несложный подсчет показывает, что $\varkappa \approx 0{,}796$.

Из проведенных рассуждений вытекает теорема.

Теорема 4. *Пусть A — кососамосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X. Тогда $m \leqslant 3$ и $\rho(Q) \leqslant \varkappa\omega$, где $\varkappa$ — корень уравнения* (31) ($\varkappa \approx 0{,}796$).

6. Допустим теперь, что X — произвольное банахово пространство и A — оператор в X, порождающий полугруппу $T(t)$, удовлетворяющую условию

$$\| T(t) \| \leqslant Me^{at} \quad (0 \leqslant t < \infty) \tag{32}$$

с некоторыми постоянными M и a. В этом случае оператор-функции (8) и (9) удовлетворяют, очевидно, неравенствам

$$\| h(t) \| \leqslant Me^{at} + t\omega^{-1} + t\omega^{-1} Me^{a\omega}, \tag{33}$$

$$\| S(t, s) \| \leqslant q_1(t, s), \tag{34}$$

где

$$q_1(t, s) = \begin{cases} M(1 + t\omega^{-1} e^{a(\omega - t)})\, e^{a(t-s)} & \text{при } s \leqslant t, \\ Mt\omega^{-1} e^{a(\omega - s)} & \text{при } s > t. \end{cases} \tag{35}$$

Из (33) легко получаются оценки для числа m, описанные в приведенной ниже теореме 5. Для вычисления же спектрального радиуса $\rho(Q_1)$ интегрального оператора Q_1 с ядром (35) снова можно применить использованный в п. 3 метод. Соответствующее уравнение

$$\lambda z(t) = M \int_0^t e^{a(t-s)} z(s)\, ds + Mt\omega^{-1} \int_0^\omega e^{a(\omega - s)} z(s)\, ds$$

имеет положительное решение, если λ удовлетворяет скалярному уравнению

$$\exp\left(\frac{M + \lambda a}{\lambda}\, \omega\right) - 1 = (2 + \lambda a M^{-1})(M\lambda^{-1} + a)\, \omega.$$

Если через $\varkappa(\xi)$ обозначить единственный положительный корень уравнения

$$\exp(\varkappa^{-1} + \xi) - 1 = (2 + \varkappa\xi)(\varkappa^{-1} + \xi), \tag{36}$$

то соответствующее позитивное собственное значение λ оператора Q_1 определится равенством $\lambda = \varkappa(a\omega) M\omega$.

Теорема 5. *Пусть A — оператор, производящий полугруппу $T(t)$, которая удовлетворяет неравенству* (32). *Тогда*

$$m \leqslant \begin{cases} \max\{M,\ 1 + 2Me^{a\omega}\} & \text{при } a \leqslant 0, \\ 1 + 2Me^{a\omega} & \text{при } a > 0, \end{cases} \tag{37}$$

а спектральный радиус $\rho(Q_1)$ оператора Q_1 удовлетворяет неравенству

$$\rho(Q_1) \leqslant M\varkappa(a\omega)\, \omega, \tag{38}$$

где $\varkappa(\xi)$ — корень уравнения (36).

В частности, из теоремы 5 следует, что при $a \to -\infty$ числа m и $\rho(Q)$ стремятся соответственно к M и к нулю.

Отметим, что оценки в утверждении теоремы 5 могут быть улучшены, если предположить, что A порождает аналитическую полугруппу.

7. Теоремы 1—5 существенно расширяют область применения численно-аналитического метода А. М. Самойленко для качественного исследования

и приближенного построения периодических решений различных типов дифференциальных уравнений. Следует отметить, что утверждения этих теорем можно значительно обобщить, если вместо банахова пространства X рассматривать пространство, нормированное векторами из конечномерного пространства R^m или даже произвольного K-пространства; изменения в формулировках теорем и их доказательствах очевидны.

В статье рассмотрен случай, когда нелинейность $f(t, x)$ в уравнении (1) была определена на всем пространстве X. Все основные конструкции статьи переносятся и на тот случай, когда нелинейность $f(t, x)$ определена на некотором шаре или даже на некоторой области пространства X; при этом, конечно, нужно следить, чтобы значения всех рассматриваемых операторов находились в соответствующих шарах или областях.

1. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I.— Укр. мат. журн., 1965, 17, № 4, с. 82—93.
2. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II.— Укр. мат. журн., 1966, 18, № 2, с. 50—59.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища школа, 1976.— 182 с.
4. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.— М. : Наука, 1966.— 500 с.
5. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений.— М. : Наука, 1969.— 455 с.

Новочеркасск. политехн. ин-т,
Белорус. гос. ун-т

Поступила 17.02.84