УДК 517.5

Д. Н. Бушев

Об асимптотически наилучшем приближении классов дифференцируемых функций линейными положительными операторами

Введем следующие обозначения: C, L_∞, L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — пространства 2π-периодических функций, соответственно непрерывных, суммируемых в p-й степени, существенно ограниченных с нормами

$$\| f \|_C = \max_x | f(x) |, \quad \| f \|_{L_\infty} = \operatorname{supvrai} | f(x) |, \quad \| f \|_{L_p} = \Big(\int_0^{2\pi} | f(x) |^p \, dx \Big)^{1/p};$$

$$H_X^\omega = \{ f(x) \in X : \| f(x+t) - f(x) \|_X \leqslant \omega(t) \},$$

где $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности, X есть L или C; $W_\alpha^\psi \mathfrak{M}$ — класс 2π-периодических функций таких, что $f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) B_\alpha^\psi(t)\, dt$,

где $\varphi(u) \in \mathfrak{M}$, $\int_0^{2\pi} \varphi(u)\, du = 0$, $B_\alpha^\psi(t) = \sum_{k=1}^\infty \psi(k) \cos(kt - \alpha\pi/2)$, α — любое действительное число, $\psi(k)$ — последовательность, удовлетворяющая условиям:

$$\sum_{k=1}^\infty \psi(k)/k < \infty, \qquad \psi(k) \geqslant \psi(k+1). \tag{1}$$

Такие классы функций впервые рассматривались в [1]. При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, классы $W^{\psi}_{\alpha}\mathfrak{M}$ обозначим $W^{r}_{\alpha}\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ — множества 2π-периодических функций $\varphi(u)$ и $\|\varphi\|_{L_p} \leqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\bigvee\limits_0^{2\pi}[\varphi] \leqslant 1$, $\mathfrak{M} = H^{\omega}_X$, то $W^{\psi}_{\alpha}\mathfrak{M}$ будем обозначать соответственно $W^{\psi}_{\alpha}L_p$, $W^{\psi}_{\alpha}V$, $W^{\psi}_{\alpha}H^{\omega}_C$. Здесь $\bigvee\limits_0^{2\pi}[\varphi]$ — вариация функции $\varphi(u)$ на $[0; 2\pi]$. При $\alpha = r$ $W^{r}_{\alpha}\mathfrak{M}$ обозначим через $W^{r}\mathfrak{M}$.

Пусть L_n и L^{+}_n — произвольные линейный и линейный положительные операторы, действующие из множества $\mathfrak{M} \subset X$ в пространство всех тригонометрических полиномов степени не выше $(n-1)$.

Обозначим через

$$U_n(\lambda, \mu; f; x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x-t)\,\Lambda_n(\lambda, \mu; t)\,dt = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\lambda^{(n)}_k \mathcal{A}_k(f; x) +$$

$$+ \mu^{(n)}_k \overline{\mathcal{A}}_k(f; x)),\quad U^{+}_n(f; x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x+t)\,\Lambda^{+}_n(t)\,dt = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{(n)}_k \mathcal{A}_k(f; x),$$

$$U^{+}_n(\lambda, \mu; f; x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x-t)\,\Lambda^{+}_n(\lambda, \mu; t)\,dt = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\lambda^{(n)}_k \mathcal{A}_k(f; x) +$$

$$+ \mu^{(n)}_k \overline{\mathcal{A}}_k(f; x),\quad \tilde{U}^{+}_n(f; x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x+t)\,\tilde{\Lambda}^{+}_n(\lambda, \mu; t)\,dt = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\tilde{\lambda}^{(n)}_k \mathcal{A}_k(f; x)$$

линейные и линейные положительные операторы соответственно с ядрами

$$\Lambda_n(\lambda, \mu; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\lambda^{(n)}_k \cos kt + \mu^{(n)}_k \sin kt),\quad \Lambda^{+}_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{(n)}_k \cos kt \geqslant 0,$$

$$\Lambda^{+}_n(\lambda, \mu; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\lambda^{(n)}_k \cos kt + \mu^{(n)}_k \sin kt) \geqslant 0,$$

$$\tilde{\Lambda}^{+}_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\tilde{\lambda}^{(n)}_k \cos kt \geqslant 0,$$

где $\mathcal{A}_k(f; x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$, $\overline{\mathcal{A}}_k(f; x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$, a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \tilde{\lambda}^{(n)}_k)/(1 - \tilde{\lambda}^{(n)}_1) = k^2$.

Пусть $\mathcal{E}(\mathfrak{M}; P_n)_X \overset{\mathrm{df}}{=} \inf\limits_{P_n}\sup\limits_{f\in\mathfrak{M}}\|f(x) - P_n(f; x)\|_X$, где $P_n(f; x)$ — один из операторов L_n, L^{+}_n, $U_n(\lambda, \mu; f; x)$, $U^{+}_n(\lambda, \mu, f; x)$, $U^{+}_n(f; x)$, $\tilde{U}^{+}_n(f; x)$.

В [2] доказано, что при $n \to \infty$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}(Z_2; U^{+}_n)_C = \sup_{f\in Z_2}\|f(x) - \mathcal{K}_n(f; x)\|_C + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \qquad (2)$$

Здесь $\mathcal{K}_n(f; x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x+t)\,\mathcal{K}_n(t)\,dt$ — оператор Коровкина,

$$\mathcal{K}_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\tilde{\lambda}^{(n)}_k \cos kt \geqslant 0,\quad \tilde{\lambda}^{(n)}_k = \frac{n-k+1}{n+1}\cos\frac{k\pi}{n+1} +$$

$$+ \frac{1}{n+1}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{k\pi}{n+1},$$

Z_2 — класс 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию $|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)| \leqslant t^2$.

В [3] доказано, что при $n \to \infty$ и $r = 2, 3, 4, \ldots$ имеет место равенство

$$\mathscr{E}(W^r L_\infty; U_n^+)_C = \sup_{f \in W^r L_\infty} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_C + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{2n^2} K_{r-2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{3}$$

где $K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k(r+1)}/(2k+1)^{r+1}$ — константы Фавара.

Известно (см., напр., [4, с. 193]), что

$$W^2 L_\infty = Z_2, \tag{4}$$

и при $r = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sup_{f \in W^r L_\infty} \| f(x) - U_n^+(f; x) \|_C = \sup_{f \in W^r L} \| f(x) - U_n^+(f; x) \|_L. \tag{5}$$

Если $\mathfrak{M}$ — множество, содержащее константы и инвариантное относительно сдвига, т. е. из включения $f(x) \in \mathfrak{M}$ следует, что $f(x+t) \in \mathfrak{M}$, то (см., напр., [6, с. 195—196])

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}; L_n)_X = \mathscr{E}(\mathfrak{M}; U_n(\lambda, \mu))_X. \tag{6}$$

Аналогично можно доказать, что если множество $\mathfrak{M}$ содержит константы и инвариантно относительно сдвига, то

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}; L_n^+)_X = \mathscr{E}(\mathfrak{M}; U_n^+(\lambda, \mu))_X. \tag{7}$$

Можно установить также, что если множество $\mathfrak{M}$, содержащее константы, инвариантно относительно сдвига и, кроме того, из включения $f(x) \in \mathfrak{M}$ следует, что $f(-x) \in \mathfrak{M}$, то

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}; U_n(\lambda, \mu))_X = \mathscr{E}(\mathfrak{M}; U_n)_X, \ \mathscr{E}(\mathfrak{M}; U_n^+(\lambda, \mu))_X = \mathscr{E}(\mathfrak{M}; U_n^+)_X. \tag{8}$$

Из соотношений (2), (4), (5), (7), (8) следует, что

$$\mathscr{E}(Z_2; L_n^+)_C = \sup_{f \in Z_2} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_C + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{9}$$

$$\mathscr{E}(W^r L_\infty; L_n^+)_C = \mathscr{E}(W^r L; L_n^+)_L = \sup_{f \in W^r L_\infty} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_C + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{2n^2} K_{r-2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad r = 2, 3, 4, \ldots. \tag{10}$$

В настоящей работе будут найдены асимптотические значения величин $\mathscr{E}(\mathfrak{M}; L_n^+)_X$ и $\mathscr{E}(\mathfrak{M}; \tilde{U}_n^+)_X$ для некоторых классов дифференцируемых функций.

В [2] доказано, что если функция $f(x)$ в точке x имеет обобщенную вторую производную $D_2 f(x) = \lim_{t \to \infty} t^{-2}(f(x+t) - 2f(x) + f(x-t))$, то

$$U_n^+(f; x) - f(x) = D_2 f(x)(1 - \lambda_1^{(n)}) + o(n^{-2}) \tag{11}$$

тогда и только тогда, когда $\lim_{n \to \infty} (1 - \lambda_k^{(n)})/(1 - \lambda_1^{(n)}) = k^2$.

Пусть $\mathfrak{M}_X''$ — множество 2π-периодических функций $f(x)$, у которых $f'(x)$ локально абсолютно непрерывна, а $D_2 f(x) \in \mathfrak{M}_X \subset X$, если $X = L_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $D_2 f(x) \in \mathfrak{M}_C \subset L_\infty$, если $X = C$. Тогда справедлива лемма.

Лемма 1. *При* $n \to \infty$

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}_{L_p}''; \tilde{U}_n^+)_{L_p} = \sup_{f \in \mathfrak{M}_{L_p}''} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_{L_p} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2n^2} \sup_{D_2 f \in \mathfrak{M}_{L_p}} \| D_2 f \|_{L_p} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{12}$$

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}''_C;\ \tilde{U}_n^+)_C = \sup_{D_2 f \in \mathfrak{M}''_C} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_C +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{2n^2} \sup_{D_2 f \in \mathfrak{M}_C} \| D_2 f \|_{L_\infty} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Из соотношения (11) следует, что

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}''_{L_p};\ \tilde{U}_n^+)_{L_p} = \sup_{D_2 f \in \mathfrak{M}_{L_p}} \| D_2 f \| \inf_{\tilde{\lambda}_1^{(n)}} | 1 - \tilde{\lambda}_1^{(n)} | + o(\inf_{\tilde{\lambda}_1^{(n)}} | 1 - \tilde{\lambda}_1^{(n)} |). \tag{14}$$

Известно (см., напр., [7, с. 94]), что для любого неотрицательного ядра $\Lambda_n^+(t)$ справедливо неравенство

$$\lambda_1^{(n)} \leqslant \cos \pi/(n+1). \tag{15}$$

Из соотношений (14), (15) следует, что

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}''_{L_p};\ \tilde{U}_n^+)_{L_p} \geqslant \sup_{D_2 f \in \mathfrak{M}_{L_p}} \| D_2 f \|_{L_p} \left| 1 - \cos\frac{\pi}{n+1} \right| + o\left(\left| 1 - \cos\frac{\pi}{n+1} \right|\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2n^2} \sup_{D_2 f \in \mathfrak{M}_{L_p}} \| D_2 f \|_{L_p} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{16}$$

Так как

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}''_{L_p};\ \tilde{U}_n^+)_{L_p} \leqslant \sup_{f \in \mathfrak{M}''_{L_p}} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_{L_p} = \frac{\pi^2}{2n^2} \sup_{D_2 f \in \mathfrak{M}_{L_p}} \| D_2 f \|_{L_p} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{17}$$

то из (16), (17) следует (12). Равенство (13) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Из результатов работы [8] следует такое утверждение.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$E_n(W_\alpha^\psi; L_2)_{L_2} \stackrel{\text{df}}{=} E_n(f)_{L_2} \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in W_\alpha^\psi L_2} \inf_{T_{n-1}} \| f(x) - T_{n-1}(x) \|_{L_2} =$$

$$= \sup_{f \in W_\alpha^\psi H_n L_2} \| f \|_{L_2} = \psi(n), \tag{18}$$

где $T_{n-1}(x)$ — тригонометрический многочлен степени не выше $(n-1)$, $W_\alpha^\psi H_n L_2$ — подмножество функций $f(x)$ класса $W_\alpha^\psi L_2$ таких, что $\int_0^{2\pi} f(x) \times T_{n-1}(x)\,dx = 0$ для любого многочлена $T_{n-1}(x)$.

Если последовательность $\psi(k)$ такая, что последовательность $k^2\psi(k)$ удовлетворяет условиям (1), то справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *При $n \to \infty$ имеет место равенство*

$$\mathscr{E}(W_\alpha^\psi L_2;\ L_n^+)_{L_2} = \sup_{f \in W_\alpha^\psi L} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_{L} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{2n^2}\psi(1) + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{19}$$

Доказательство. Отметим, что если последовательность $k^2\psi(k)$ удовлетворяет условиям (1), то и последовательность $\psi(k)$ удовлетворяет условиям (1).

Так как $f(x) = a_0/2 + \pi^{-1}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x+t) B_\alpha^\psi(t)\,dt$ является вторым 2π-периодическим интегралом от функции $u(x) = \pi^{-1}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x+t) B_\alpha^{u^2\psi}(t)\,dt$, то $f'(x)$ — локально абсолютно непрерывна и почти всюду $u(x) = f''(x) \in \in W_\alpha^{u^2\psi} H_1 L_2$. Значит, по лемме 2

$$\sup_{f'' \in W_\alpha^{u^2\psi} H_1 L_2} \| f'' \|_{L_2} = \psi(1). \tag{20}$$

Используя равенство (10), лемму 1 и равенство (20), получим

$$\mathscr{E}(W_\alpha^\psi L_2; L_n^+)_{L_2} = \mathscr{E}(W_\alpha^\psi L_2; U_n^+(\lambda, \mu))_{L_p} \leqslant \mathscr{E}(W_\alpha^\psi L_2; \tilde{U}_n^+)_{L_2} =$$

$$= \sup_{f \in W_\alpha^\psi L_2} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_{L_2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{2n^2}\psi(1) + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{21}$$

Так как

$$f_1(x) = \pi^{-1}\int\limits_0^{2\pi} \pi^{-1/2}\cos(x+t) B_\alpha^\psi(t)\,dt = \psi(1)\,\pi^{-1/2}\cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2}\right) \in W_\alpha^\psi H_1 L_2$$

и для любого оператора $u_n^+(\lambda; \mu; f; x)$ справедливы соотношения

$$\| f_1(x) - U_n^+(\lambda, \mu; f_1; x) \|_{L_2} = \left\| (1 - \lambda_1^{(n)}) \frac{\psi(1)}{\sqrt{\pi}} \cos\left(x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \mu_1^{(n)} \frac{\psi(1)}{\sqrt{\pi}} \sin\left(x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right\|_{L_2} = \left(\pi\left((1 - \lambda_1^{(n)})^2 \frac{\psi^2(1)}{\pi} + (\mu_1^{(n)})^2 \frac{\psi^2(1)}{\pi}\right)\right)^{1/2} =$$

$$= \psi(1)\sqrt{(1 - \lambda_1^{(n)})^2 + (\mu_1^{(n)})^2} \geqslant \psi(1)\left(1 - \sqrt{(\lambda_1^{(n)})^2 + (\mu_1^{(n)})^2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \psi(1)\left(1 - \cos\frac{\pi}{n+1}\right) = \frac{\pi^2}{2n^2}\psi(1) + o(n^{-2}),$$

то

$$\mathscr{E}(W_\alpha^\psi L_2; U_n^+(\lambda, \mu))_{L_2} \geqslant \| f_1(x) - U_n^+(\lambda, \mu; f_1; x) \|_{L_2} \geqslant \frac{\pi^2}{2n^2}\psi(1) + o(n^{-2}). \tag{22}$$

Здесь используется тот факт, что $((\lambda_1^{(n)})^2 + (\mu_1^{(n)})^2)^{1/2} \leqslant \cos(\pi/(n+1))$ (см., напр., [7, с. 94]). Из соотношений (21), (22) следует (19), и теорема 1 доказана.

Теорема 2. *При $n \to \infty$ справедливо равенство*

$$\mathscr{E}(W_\alpha^\psi L_\infty; \tilde{U}_n^+)_C = \sup_{f \in W_\alpha^\psi L_\infty} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_C + o(n^{-2}) =$$

$$= \frac{\pi}{2n^2} E_1(B_{\alpha-2}^{u^2\psi})_L + o(n^{-2}), \tag{23}$$

где последовательность $k^2\psi(k)$ удовлетворяет условиям (1).

Доказательство. Вследствие того, что $f(x)$ — второй 2π-периодический интеграл от функции $u(x) = \pi^{-1}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x+t) B_{\alpha-2}^{u^2\psi}(t)\,dt$ и по теореме 4.1.3 из [9, с. 72] $u(x)$ — непрерывная функция, то $u(x) = f''(x) \in \in W_{\alpha-2}^{u^2\psi} H_1 L_\infty$. Следовательно,

$$\sup_{f'' \in W_{\alpha-2}^{u^2\psi} H_1 L_\infty} \| f'' \|_C = \sup_{\|\varphi\|_{L_\infty} \leqslant 1} \left\| \pi^{-1}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x+t) B_{\alpha-2}^{u^2\psi}(t)\,dt \right\|_C, \tag{24}$$

где $\int_0^{2\pi} \varphi(u)\,du = 0$. Известно (см. [9, с. 78]), что если $K(t) \in L$, $\varphi(u) \in L_\infty$ и $\int_0^{2\pi} \varphi(u)\,du = 0$, то

$$\sup_{\|\varphi\|_{L_\infty} \leqslant 1} \left\| \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) K(t)\,dt \right\|_C = \pi^{-1} E_1(K)_L. \tag{25}$$

Используя лемму 1, из соотношений (24), (25) получим (23). Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *При $n \to \infty$ и $r > 2$ справедливо равенство*

$$\mathscr{E}(W^r_\alpha L_\infty; \tilde{U}^+_n)_C = \sup_{f \in W^r_\alpha L_\infty} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_C + o(n^{-2}) =$$

$$= (\pi^2/2n^2) M_{r-2,\alpha-2} + o(n^{-2}), \tag{26}$$

где $M_{r,\alpha} = (4/\pi) \sin(\alpha\pi/2) \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-(r+1)}$ *при* $0 < r < 1$ *и* $\alpha \in [r; 2-r]$,

$M_{r,\alpha} = (4/\pi) \left| \sum_{k=0}^{\infty} \sin((2k+1)\beta - (\alpha\pi/2))/(2k+1)^{r+1} \right|$ *при* $r > 1$ *и* $\alpha \in]-\infty; +\infty[$ *и при* $0 < r \leqslant 1$ *и* $\alpha \in [0; 2] \setminus [r; 2-r]$, β — *число, удовлетворяющее условию* $\sum_{k=0}^{\infty} \cos((2k+1)\beta - (\alpha\pi/2))/(2k+1)^{r+1} = 0$.

Доказательство. Можно проверить, что последовательность $k^2\psi(k) = k^2 k^{-r}$ при $r > 2$ удовлетворяет условиям (1) и $f''(x) \in W^{r-2}_{\alpha-2} H_1 L_\infty$ — непрерывная функция. По теореме 6 из [10]

$$\pi^{-1} E_1 (B^{r-2}_{\alpha-2})_L = \pi^{-1} \| B^{r-2}_{\alpha-2} \|_L = M_{r-2,\alpha-2}. \tag{27}$$

Используя теорему 2 и равенство (27), получим (26).

Теорема 3. *При $n \to \infty$ и $r > 2$ справедливо равенство*

$$\mathscr{E}(W^r_\alpha L; \tilde{U}^+_n)_L = \sup_{f \in W^r_\alpha L} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_L + o(n^{-2}) =$$

$$= (\pi^2/2n^2) M_{r-2,\alpha-2} + o(n^{-2}), \tag{28}$$

где $M_{r,\alpha}$ — та же величина, что и в следствии 1.

Доказательство. Используя рассуждения, применяемые при доказательстве теоремы 1, докажем, что $f'(x)$ локально абсолютно непрерывна, а $f''(x) \in W^{r-2}_{\alpha-2} H_1 L$. Согласно лемме 1,

$$\mathscr{E}(W^r_\alpha L; \tilde{U}^+_n)_L = \sup_{f \in W^r_\alpha L} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_L + o(n^{-2}) =$$

$$= (\pi^2/2n^2) \sup_{f'' \in W^{r-2}_{\alpha-2} H_1 L} \| f'' \| + o(n^{-2}). \tag{29}$$

Ядро $B^r_\alpha(t)$ при $r > 0$, по теореме 5 из [10], удовлетворяет условиям теоремы 4.3.3 из [9]. Так как $\int_0^{2\pi} f''(x)\,dx = 0$, то по теореме 4.3.3 и в силу равенства (27)

$$\sup_{f'' \in W^{r-2}_{\alpha-2} H_1 L} \| f'' \|_L = \sup_{f \in W^{r-2}_{\alpha-2} L} E_1(f)_L = \frac{1}{\pi} E_1 (B^{r-2}_{\alpha-2})_L = M_{r-2,\alpha-2}. \tag{30}$$

Из равенств (29), (30) получим (28). Теорема 3 доказана.

Л е м м а 3. *Если последовательность* $k\psi(k)$ *удовлетворяет условиям* (1), *то*

$$E_n(W^{u\psi}_{\alpha-1}V)_L \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in W^{u\psi}_{\alpha-1}V} E_n(f)_L = E_n(W^{\psi}_{\alpha}L)_L \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in W^{\psi}_{\alpha}L} E_n(f)_L. \qquad (31)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что последовательность $\psi(k)$ также удовлетворяет условиям (1).

Так как $B^{\psi}_{\alpha}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos(kt - \alpha\pi/2)$ — первый 2π-периодический интеграл от суммируемой функции $B^{u\psi}_{\alpha-1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k)\cos(kt-\alpha\pi/2)$, то $B^{\psi}_{\alpha}(t)$ — абсолютно непрерывная функция. Пусть $g(x) = a_0/2 + \pi^{-1}\int_0^{2\pi}\varphi(x+ + t)B^{\psi}_{\alpha}(t)\,dt \in W^{\psi}_{\alpha}L$. Вследствие абсолютной непрерывности $B^{\psi}_{\alpha}(t)$ и суммируемости $\varphi(x+t)$ возможно интегрирование по частям. Поэтому $g(x) = = a_0/2 + \pi^{-1}\int_0^{2\pi}\left(-\int\varphi(x+t)\,dt\right)B^{u\psi}_{\alpha-1}(t)\,dt$. Так как $\bigvee_0^{2\pi}\left[-\int\varphi(x+t)dt\right] = = \|\varphi(x+t)\|_L \leqslant 1$, то $g(x)\in W^{u\psi}_{\alpha-1}V$. Значит,

$$W^{\psi}_{\alpha}L \subset W^{u\psi}_{\alpha-1}V. \qquad (32)$$

Если $f(x)\in W^{u\psi}_{\alpha-1}V$, то $f_h(x)\in W^{\psi}_{\alpha}L$, где $f_h(x) = (2h)^{-1}\int_{-h}^{h} f(x+t)\,dt = = (2h)^{-1}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$, $h>0$, — функция Стеклова от функции $f(x)$. Действительно, применяя теорему Фубини, получим

$$f_h(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B^{u\psi}_{\alpha-1}(t)\left((2h)^{-1}\int_{x-h}^{x+h}\varphi(z+t)\,dz\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_h(x+t)B^{u\psi}_{\alpha-1}(t)\,dt.$$

Так как $\varphi_h(x+t)$ — абсолютно непрерывная, а $B^{u\psi}_{\alpha-1}(t)$ — суммируемая функции, то возможно интегрирование по частям. Поэтому $f_h(x) = = -\pi^{-1}\int_0^{2\pi}\varphi'_h(x+t)B^{\psi}_{\alpha}(t)\,dt$.

Вследствие того, что $\bigvee_0^{2\pi}[\varphi]\leqslant 1$, получаем $\|\varphi'_h(x+t)\|_L \leqslant \bigvee_0^{2\pi}[\varphi]\leqslant 1$ (см. [9, с. 100]). Значит, $f_h(x)\in W^{\psi}_{\alpha}L$. Следовательно, $E_n(f_h)_L \leqslant E_n(W^{\psi}_{\alpha}L)_L$.

Пользуясь тем, что $E_n(f)_L \leqslant E_n(f-f_h)_L + E_n(f_h)_L \leqslant \|f-f_h\|_L + + E_n(f_h)_L \leqslant \|f-f_h\|_L + E_n(W^{\psi}_{\alpha}L)_L$, из теоремы 5.2.1 работы [9, с. 99] получим

$$\lim_{h\to 0} E_n(f)_L = E_n(f)_L \leqslant \lim_{h\to 0}(\|f-f_h\|_L + E_n(W^{\psi}_{\alpha}L)_L) = E_n(W^{\psi}_{\alpha}L)_L.$$

Так как $f(x)$ — произвольная функция из класса $W^{u\psi}_{\alpha-1}V$, то

$$E_n(W^{u\psi}_{\alpha-1}V)_L \leqslant E_n(W^{\psi}_{\alpha}L)_L. \qquad (33)$$

Из неравенств (32), (33) следует (31). Лемма 3 доказана.

С л е д с т в и е 2. *Если* $r>0$, *то*

$$E_n(W^{r}_{\alpha}V)_L = E_n(W^{r+1}_{\alpha+1}L)_L. \qquad (34)$$

Теорема 4. *При $n \to \infty$ и $r > 2$ справедливо равенство*

$$\mathscr{E}(W_\alpha^r V; \tilde{U}_n^+)_L = \sup_{f \in W_\alpha^r V} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_L + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{2n^2} M_{r-1,\alpha-1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{35}$$

где величина $M_{r,\alpha}$ определена в следствии теоремы 2.

Доказательство. Так как при $r > 2$ $f(x) \in W_\alpha^r V$ — второй 2π-периодический интеграл от функции $u(x) = \pi^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(x+t) B_{\alpha-2}(t)\, dt$, то $f'(x)$ локально абсолютно непрерывна и почти всюду $u(x) = f''(x) \in W_{\alpha-2}^{r-2} H_1 V$. Используя лемму 1, получим

$$\mathscr{E}(W_\alpha^r V; \tilde{U}_n^+)_L = \sup_{f \in W_\alpha^r V} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_L + o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2n^2} \sup_{f'' \in W_{\alpha-2}^{r-2} H_1 V} \| f'' \|_L + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{36}$$

При доказательстве леммы 3 мы установили, что $W_{\alpha-2}^{r-2} V \supset W_{\alpha-1}^{r-1} L$. Значит,

$$\sup_{f'' \in W_{\alpha-2}^{r-2} H_1 V} \| f'' \|_L \geqslant \sup_{f \in W_{\alpha-1}^{r-1} H_1 L} \| f \|_L. \tag{37}$$

Из равенства (30) следует, что

$$\sup_{f \in W_{\alpha-1}^{r-1} H_1 L} \| f \|_L = M_{r-1,\alpha-1}. \tag{38}$$

Используя рассуждения, применяемые при доказательстве леммы 3, получим

$$\sup_{f'' \in W_{\alpha-2}^{r-2} H_1 V} \| f'' \|_L \leqslant \sup_{f \in W_{\alpha-1}^{r-1} H_1 L} \| f \|_L. \tag{39}$$

Из соотношений (36), (37), (38), (39) следует (35).

Теорема 5. *При $n \to \infty$ и $r = 2, 3, 4, \ldots$ имеет место равенство*

$$\mathscr{E}(W^r H_C^\omega; \tilde{U}_n^+)_C = \sup_{f \in W^r H_C^\omega} \| f(x) - \mathscr{K}_n(f; x) \|_C +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{2n^2} \mathscr{A}_{r-2}(\omega) + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{40}$$

где $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, а величины $\mathscr{A}_r(\omega) = \left\{\sup \| f \|_C \mid f \in W^r H_C^\omega, \int\limits_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0\right\}$ вычислены в [11].

Доказательство. Так как при $r = 2, 3, 4, \ldots$ $f''(x) \in W^{r-2} H_C^\omega$, то (см. [11])

$$\sup_{f'' \in W^{r-2} H_C^\omega} \| f'' \|_C = \mathscr{A}_{r-2}(\omega). \tag{41}$$

Используя лемму 1, равенство (41), получим (40).

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.— Киев, 1983.— 57 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 83.10).
2. *Коровкин П. П.* Об одном асимптотическом свойстве положительных методов суммирования рядов Фурье и о наилучшем приближении функций класса Z_2 линейными положительными полиномиальными операторами.— Успехи мат. наук, 1958, 13, с. 99—103.
3. *Давыдчик А. Н.* Приближение периодических функций линейными положительными операторами.— В кн.: Исследования по современным проблемам суммирования и при-

ближения функций и их приложениям.— Днепропетровск : Днепропетров. ун-т, 1982, с. 187—193.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 508 с.
5. *Моторный В. П.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами в среднем.— Мат. заметки, 1974, **16**, № 1, с. 15—26.
6. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976.— 304 с.
7. *Полиа Г.*, *Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. II — М. : Наука, 1978.— 431 с.
8. *Кушпель А. К.*, *Степанец А. И.* Оценки наилучших приближений на классах периодических функций.— В кн.: Тез. Междунар. конф. по теории приближения функций (Киев, 30 мая — 6 июня 1983 г.). Киев : Ин-т математики, 1983, с. 111.
9. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
10. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер.— Мат. заметки, 1974, **16**, № 5, с. 691—701.
11. *Корнiйчук М. П.* Про екстремальнi властивостi перiодичних функцiй.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1962, № 8, с. 993—998.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 18.11.83