УДК 517.982:510.67

Е. В. Токарев

О понятии неразличимости и о свойстве p-Мазура в банаховых пространствах

В работе вводится и исследуется новое понятие неразличимости элементов банахова пространства. Это понятие применяется к исследованию свойства p-Мазура.

Всюду ниже кардиналы отождествляются с начальными ординалами, терминология теории банаховых пространств следует работе [1], а теории моделей — книге [2].

1. Неразличимые элементы банаховых пространств. Следуя [3], рассмотрим язык L первого порядка, содержащий помимо переменных, логических символов и символа равенства бинарный функциональный символ $+$; унарные функциональные символы $(q) \in b\,\mathbf{Q}$ (для каждого рационального q) и два одноместных предикатных символа P и Q. Совокупность всех алгебраических систем для языка L (L-систем) обозначим через $\mathscr{M}$ (L), а класс всех банаховых пространств — через $\mathscr{B}$.

Всякому $X \in \mathscr{B}$ отвечает L-система $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(X)$ с носителем $|\mathfrak{M}| = X$, в которой $+^{\mathfrak{M}}$ интерпретируется как сложение векторов, $q^{\mathfrak{M}}$ — как умножение на скаляр $q \in \mathbf{Q}$, $P^{\mathfrak{M}}$ — как единичный шар X ($P^{\mathfrak{M}} = \{x \in X : \|x\| \leqslant \leqslant 1\}$), а $Q^{\mathfrak{M}} = \{x \in X : \|x\| > 1\}$.

Отождествляя X с $\mathfrak{M}(X)$, можно говорить о формулах $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ языка L, выполненных на каком-нибудь наборе элементов $(x_1, \ldots, x_n)$ пространства X.

Определение 1. *Пусть $X \in \mathcal{B}$, а $\langle V, < \rangle$ — некоторое линейно упорядоченное подмножество X. V называется неразличимым в X, если для каждого $n < \omega$ на всех строго упорядоченных n-ках элементов $(x_1, \ldots, x_n)$ множества V выполнено одно и то же множество формул вида $\varphi(v_1, v_2, \ldots, \ldots, v_n)$ языка* L.

Нетрудно проверить, что всякое неразличимое в X множество $\langle V, < \rangle$ инвариантно относительно растяжения, т. е. для каждого набора скаляров $(\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ $(n < \omega)$ $\left\| \sum_1^n \lambda_i x_{j_i} \right\| = \left\| \sum_1^n \lambda_i x_{m_i} \right\|$, где $x_{j_1} < x_{j_2} < \ldots < x_{j_n}$, а $x_{m_1} < x_{m_2} < \ldots < x_{m_n}$ в смысле порядка «$<$» на V. Используя это замечание, методами работы [4] можно установить следующее.

Предложение 1. *Если $X \in \mathcal{B}$ и неразличимое в X множество $\langle V < \rangle$ вполне упорядочено отношением «$<$», то либо V образует безусловный базис замыкания в X своей линейной оболочки* span V, *либо этим же свойством обладает множество разностей $(x_{2\alpha+1} - x_{2\alpha})$, где $V = (x_\alpha)_{\alpha<\gamma}$, $x_{\alpha_1} < x_{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2$, а все начальные ординалы считаются четными.*

Пусть $\varkappa$, β, α — кардиналы. Запись Эрдеша $\varkappa \to (\beta)_\alpha^{<\omega}$ означает, что для каждого разбиения множества $S_\omega(\varkappa)$ всех конечных подмножеств $\varkappa$ на α частей $(C_i)_{i<\alpha}$ существует $\gamma \subset \varkappa$ мощности β такое, что множество $[\gamma]^n$ всех n-ок $\{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle : x_1 < \ldots < x_n;\ x_i \in \gamma\}$ содержится в одном из классов $(C_i)_{i\in\alpha}$ (который зависит от n) для каждого $n < \omega$.

Следуя [2], обозначим через $\varkappa(\alpha)$ наименьший кардинал $\varkappa$ такой, что $\varkappa \to (\alpha)_2^{<\omega}$. Если $\alpha < \beta$, то предположение о существовании $\varkappa(\beta)$ сильнее предположения о существовании $\varkappa(\alpha)$. Если $\varkappa(\alpha)$ существует, то он достаточно велик, так как является недостижимым. Кроме того, для каждого бесконечного кардинала α выполнено соотношение $\varkappa(\alpha) \to (\alpha)_{2^\omega}^{<\omega}$ (см. [2]).

Теорема 1. *Всякое $X \in \mathcal{B}$ мощности* card $X \geqslant \varkappa(\alpha)$ *содержит подпространство с безусловным базисом мощности α.*

Доказательство. Занумеруем все элементы X кардиналом (ординалом) $\varkappa(\alpha)$: $X = \{x_i : i < \varkappa(\alpha)\}$. Каждая формула $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ языка L определяет разбиение всех строго упорядоченных n-ок $\{\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} \rangle : i_1 < i_2 < \ldots < i_n\}$ на два класса: C_1^φ или C_2^φ в зависимости от того, выполнена на этой последовательности формула φ или $\neg\varphi$. Таким образом, счетное множество формул языка L определяет разбиение $S_\omega(X)$ на 2^ω классов $(C_i)_{i<2^\omega}$.

По определению $\varkappa(\alpha)$, найдется подмножество $(x_i')_{i<\alpha} \subset (x_i)_{i<\varkappa(\alpha)}$ такое, что $[(x_i)]^m$ целиком попадает в один из классов разбиения C_{i_m} (в зависимости от m). Поэтому на всякой строго упорядоченной n-ке $\{\langle x_{i_1}', \ldots, x_{i_n}' \rangle : i_1 < \ldots < i_n\}$ выполнена одна и та же совокупность формул языка L, т. е. множество $V = \{x_i'\}_{i<\alpha}$ неразличимо. Доказательство теоремы завершается применением предложения 1.

Замечание 1. Фактически в теореме 1 доказано больше, чем утверждалось, именно: всякое $X \in \mathcal{B}$ мощности большей или равной $\varkappa(\alpha)$ содержит неразличимое множество V, вполне упорядоченное по типу α.

Замечание 2. Для случая рамсеевских кардиналов α (т. е. таких, что $\alpha = \varkappa(\alpha)$) результат, близкий к теореме 1, отмечался в работе [5].

В дальнейшем потребуется такое определение.

Определение 2. *Пусть* $X, Y \in \mathcal{B}$. *Назовем* X *и* Y *элементарно эквивалентными* (*запись*: $X \equiv_A Y$), *если существует ультрафильтр* $\mathfrak{A}$ *такой, что ультрастепени* $(X)_{\mathfrak{U}}$ *и* $(Y)_{\mathfrak{U}}$ *изометричны.*

Напомним [6]: ультрастепень банахова пространства X по ультрафильтру $\mathfrak{A}$ — это фактор-пространство $(X)_{\mathfrak{U}} = l_\infty(X, \mathfrak{A})/N(X, \mathfrak{A})$, где $l_\infty(X, \mathfrak{A}) = \left(\sum_{\cup\mathfrak{U}} \oplus X\right)_{l_\infty}$, а $N(X, \mathfrak{A})$ — подпространство $l_\infty(X, \mathfrak{A})$, состоящее из таких $(x_i)_{i\in\cup\mathfrak{U}} \in l_\infty(X, \mathfrak{A})$, для которых $\lim_{\mathfrak{U}} \| x_i \|_X = 0$.

Для $X \in \mathcal{B}$ положим $X^{\xi} = \{Y \in \mathcal{B} : Y \equiv_A X\}$.

Теорема 2. *Пусть* $X \in \mathcal{B}$; $Y \in X^{\xi}$. *Если* (x_i) — *последовательность нормированных элементов* Y *с бесконечномерной линейной оболочкой, не содержащая сильно сходящихся подпоследовательностей* (*кратко*: $(1\text{-}\infty)$-*последовательность*), *а* $\mathfrak{A}$ — *ультрафильтр над* $\mathbb{N}$, *можно найти такое пространство* $Z \in X^{\xi}$ *и множество неразличимых* $\langle V, < \rangle \subset Z$, *что* $\langle V, < \rangle$ *имеет наперед заданный порядковый тип* η, *причем на всех строго упорядоченных* n-*ках* $\langle y_1 < \ldots < y_n \rangle \subset V$ *выполнено соотношение*

$$\left\| \sum_1^n \lambda_i y_i \right\|_Z = \underbrace{\lim_{\mathfrak{U}} \lim_{\mathfrak{U}} \ldots \lim_{\mathfrak{U}}}_{n \text{ раз}} \left\| \sum_1^n \lambda_i x_{m_i} \right\|_Y = L_{\mathfrak{U}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

а любой изотонный автоморфизм $\langle V, < \rangle$ *можно продолжить до изометрического автоморфизма пространства* Z.

(Для простоты обозначений не отмечалось, что пространство Z и неразличимое в Z множество $\langle V, < \rangle$ зависят от задания $(1\text{-}\infty)$-последовательности (x_n), ультрафильтра $\mathfrak{A}$ и от выбранного заранее порядкового типа η.)

Доказательство. Рассмотрим пространство s_0 всех вещественных финитных последовательностей и определим на нем норму по формуле $\left|\left|\left| \sum_1^n \lambda_i e_i \right|\right|\right| = L_{\mathfrak{U}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}$ (δ_{ij} — символ Кронекера) — естественный базис s_0. Обозначим пополнение s_0 по этой норме через $\mathrm{SM}_{\mathfrak{U}}(x_n)$. Нетрудно проверить, что (e_i) является базисом пространства $\mathrm{SM}_{\mathfrak{U}}(x_n)$, инвариантным относительно растяжения, и что $\mathrm{SM}_{\mathfrak{U}}(x_n)$ изометрично подпространству ультрастепени $(Y)_{\mathfrak{U}}$. Поэтому на всех n-ках $\{\langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_n} \rangle : i_1 < \ldots < i_n\}$ выполнено соотношение

$$\left|\left|\left| \sum_1^n \lambda_j e_{i_j} \right|\right|\right| = L_{\mathfrak{U}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{1}$$

которое можно выразить совокупностью формул языка L. Значит можно применить теорему Эренфойгта — Мостовского (см. [2]) и утверждать, что среди моделей теории $\mathrm{Th}(Y)_{\mathfrak{U}}$ (т. е. совокупности всех предложений φ языка L, выполненных в $(Y)_{\mathfrak{U}}$) найдется модель $\mathfrak{N}$, обладающая множеством неразличимых $\mathcal{V}$ заданного порядкового типа η, причем среди множества формул, выполненных на упорядоченных n-ках из $\mathcal{V}$, содержатся все формулы, описывающие соотношения вида (1).

Расширим теорию $\mathrm{Th}(Y)_{\mathfrak{U}}$ до теории $\mathrm{Th}^*(Y)_{\mathfrak{U}}$, имеющей термальные скулемовские функции. Пусть $\mathfrak{H}(\mathcal{V}) \prec \mathfrak{N}$ — скулемовское замыкание, порожденное множеством $\mathcal{V}$.

Определим пространство $[\mathfrak{H}(\mathcal{V})] = Z$ как пополнение фактор-пространства $\Pi_{\mathfrak{H}}/N_{\mathfrak{H}}$ по фактор-норме, индуцированной нормой (см. [3]) $\| x \|_{\mathfrak{H}} = (\inf \{q \in \mathbb{Q} : q^{\mathfrak{H}} x \in P^{\mathfrak{H}}\})^{-1}$, где $\Pi_{\mathfrak{H}} = \{x \in \mathfrak{H} : \| x \|_{\mathfrak{H}} < \infty\}$; $N_{\mathfrak{H}} = \{x \in \mathfrak{H} : \| x \|_{\mathfrak{H}} = 0\}$. Пусть $V \subset Z$ — образ множества $\mathcal{V} \subset \mathfrak{H}(\mathcal{V})$ при отображении $\pi : \mathfrak{H}(\mathcal{V}) \to Z$. Отметим следующие два факта.

1. Элементы $\mathcal{V}$ отображением π не склеиваются. Это следует из того, что для всех $v_1 < v_2$ выполнено соотношение $\| v_1 - v_2 \|_{\mathfrak{H}} = L_{\mathfrak{U}}(1, -1, (x_n) \neq 0$.

2. $Y \equiv_A X$. Действительно, согласно [3], из условий $\mathfrak{H}(\mathcal{V}) \equiv \mathfrak{N}(Y)_{\mathfrak{A}}$ ($\equiv$ означает элементарную эквивалентность в смысле теории моделей) следует, что $[\mathfrak{H}(\mathcal{V})] \equiv_A [\mathfrak{N}] \equiv_A [(Y)_{\mathfrak{U}}] = (Y)_{\mathfrak{A}}$.

Положим $Z = [\mathfrak{H}(\mathcal{V})]$. Очевидно, V неразличимо в Z, причем выполнено соотношение (1). Поскольку всякий изотонный автоморфизм множества $\mathcal{V}$ можно продолжить до автоморфизма модели $\mathfrak{H}(\mathcal{V})$(см. [2,теорема 3.3.11]), то такое же утверждение справедливо и для изотонных автоморфизмов множества $\langle V, < \rangle$.

Следствие. *В классе X^{ξ} имеются пространства с неразличимыми множествами произвольного порядкового типа, имеющие произвольно большие группы автоморфизмов.*

Замечание 3. В работе [4] было установлено, что из всякой (1-∞)-последовательности элементов $(x_n) \subset X$ можно извлечь так называемую хорошую подпоследовательность (x_n'), для которой

$$L_{\mathfrak{A}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lim_{m_1 \to \infty} \lim_{m_2 \to \infty} \ldots \lim_{m_n \to \infty} \| \Sigma \lambda_i x'_{m_i} \|.$$

Если ограничиться рассмотрением только хороших последовательностей (x_n), то вместо $L_{\mathfrak{A}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $SM_{\mathfrak{A}}(x_n)$ можно писать просто $L(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $SM(x_n)$, так как числа $L(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и пространство $SM(x_n)$ в данном случае от выбора ультрафильтра $\mathfrak{A}$ не зависят. Пространство $SM(x_n)$ в работе [7] было названо растягивающей моделью пространства X, построенной по последовательности (x_n).

Нетрудно проверить, что если $Z \in X^{\xi}$, $V = V(x_n)$ — неразличимое множество в Z, построенное при доказательстве теоремы 2, а $V_0 = \{v_1; v_2; \ldots\}$ — вполне упорядоченное по типу ω подмножество V, то пространство $\operatorname{span}_z V_0$ (т. е. замыкание в Z линейной оболочки множества V_0) совпадает с пространством $SM(x_n)$ с точностью до изометрии, отображающей множество V_0 на стандартный базис (e_n) растягивающей модели $SM(x_n)$.

2. Свойство p-Мазура и растягивающие модели. Пусть $X \in \mathcal{B}$. Рассмотрим класс $pp_0(X)$, состояий из всех хороших последовательностей $(x_n) \subset X$, слабо сходящихся к нулю. Обозначим $SM_0(X) = \{SM(x_n) : (x_n) \in pp_0(X)\}$.

Свойство p-Мазура банаховых пространств введено в [8]; там же дано его определение. Установим характеризацию этого свойства в терминах совокупности $SM_0(X)$. Предварительно заметим, что естественный базис каждого пространства $Y = SM(x_n) \in SM_0(X)$ является безусловным (см. [4]), так что выполнены естественные вложения $l_1 \subseteq^c Y \subseteq^c c_0$ (индекс c подчеркивает непрерывность вложений).

Следующее предложение описывает простейшие свойства банаховых пространств, обладающих свойством p-Мазура (класс всех банаховых пространств, обладающих свойством p-Мазура обозначим через $\mathfrak{M}_p$).

Предложение 2. 1) *Если $X \in \mathfrak{M}_p$ и Y изоморфно X, то $Y \in \mathfrak{M}_p$;*

2) *пусть $1 < p < q < \infty$, тогда $\mathcal{B} = \mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_p \supset \mathfrak{M}_q \supset \mathfrak{M}_\infty \neq \varnothing$, причем все вложения строгие;*

3) *если $X \in \mathcal{B}$ содержит подпространство, изоморфное l_1, то X имеет фактор-пространство $Y = X/Z$ такое, что $Y \notin \mathfrak{M}_p$, $p > 1$;*

4) *если $X \in \mathcal{B}$ не содержит подпространства, изоморфного l_1 и $X \in \mathfrak{M}_p$, то $X/Y \in \mathfrak{M}_p$ для всякого подпространства $Y \underset{\to}{\subseteq} X$.*

Доказательство. Справедливость 1) очевидна. 2) Совпадение $\mathcal{B} = \mathfrak{M}_1$ доказано Мазуром (см. [1]), а непустота класса $\mathfrak{M}_\infty$ следует из того, что $X \in \mathfrak{M}_\infty$ тогда и только тогда, когда X обладает свойством Шура (т. е. в X совпадают слабая и сильная сходимости последовательностей), в частности $l_1 \in \mathfrak{M}_\infty$. Включения $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_p \supset \mathfrak{M}_q \supset \mathfrak{M}_\infty$ очевидны, а их строгость следует из легко проверяемого факта: $l_p \notin \mathfrak{M}_p$, но $l_p \in \mathfrak{M}_q$ для любых $q > p > 1$.

3). Пусть $Y \underset{\to}{\subseteq} l_1 \underset{\to}{\subseteq} X$. Поскольку фактор-пространство l_1/Y можно изометрически вложить в X/Y, X имеет фактор-пространство Z, содержащее подпространство, изоморфное $C[0, 1]$. В силу универсальности $C[0, 1]$, соотношений $l_p \notin \mathfrak{M}_p$, $p>1$, и наследственности свойства p-Мазура ($X \in \mathfrak{M}_p$; $Y \underset{\to}{\subseteq} X \Rightarrow Y \in \mathfrak{M}_p$) очевидно, что $Z \notin \mathfrak{M}_p$, $p>1$.

Выполнение 4) следует из леммы 2 работы [9].

В работе [8] исследовалось выполнение свойства p-Мазура на подпространствах $L_p[0, 1]$. Теорему 2 работы [8] можно доказать и иначе.

Теорема 3. *Если $(x_n) \in pp_0(B)$, а $B \underset{\to}{\subseteq} L_p$, и B не содержит почти дизъюнктных систем функций, то $B \in \mathfrak{M}_p$.*

Доказательство. Пусть $(x_n) \in pp_0(B)$. Поскольку L_p имеет безусловный базис, можно считать, если надо — перейдя к подпоследовательности, что (x_n) — безусловная базисная последовательность. Поэтому $\| \Sigma \alpha_i x_i \|_{L_p} \leqslant \mathrm{const}\,(\Sigma |\alpha_i|^p)^{1/p}$, т. е. оператор $T: l_p \to L_p$, $T(\alpha) = \Sigma \alpha_i x_i$, непрерывен. Если бы этот оператор был изоморфизмом, то в B нашлось бы подпространство, изоморфное l_p. Поскольку на B нормы $\| \cdot \|_{L_p}$ и $\| \cdot \|_{L_1}$ эквивалентны (см. [10]), отсюда следовало бы, что l_p имеет устойчивый тип p, а это неверно (см. [11]). Значит, T — не изоморфизм, а именно это и надо доказать.

Из доказательства теоремы 3 следует, что ни для какой растягивающей модели $Y \in SM_0(B)$ не может быть выполнено непрерывное вложение $Y \subseteq^c l_p$. Оказывается, это свойство полностью характеризует класс $\mathfrak{M}_p$.

Теорема 4. *Пусть $p \in (1, \infty)$. $X \in \mathfrak{M}_p$, если и только если никакое $E \in SM_0(X)$ не может быть непрерывно вложено в пространство l_p (символически: $X \in \mathfrak{M}_p \Leftrightarrow (\forall E)\ (E \in SM_0(X) \Rightarrow \neg\,(E \subseteq^c l_p))$).*

Доказательство. Достаточность. Пусть $(x_n) \in pp_0(X)$; $E = SM(x_n) \in SM_0(X)$ и пусть $E \not\subseteq^c l_p$. Тогда найдется последовательность $(a_j) \subset E$, $a_j = \Sigma \xi_n^j (e_n\ (e_n)$ — стандартный базис E), такая, что $k_p(j) = \| a_j \|_{l_p} / ||| a_j |||_E \to \infty$ при $j \to \infty$. Без ограничения общности можно считать, что $||| a_j |||_E = 1$; $\xi_n^j > 0$, $n, j = 1, 2, \ldots$, и что каждый элемент a_j финитен, т. е. $\xi_n^j = 0$ при $n \geqslant n(j)$ для некоторой последовательности натуральных $n(j)$. Обозначим $\alpha_n^j = \xi_n^j / k_p(j)$. Тогда $\sum_{n=1}^{n(j)} (\alpha_n^j)^p = 1$. В силу определения растягивающей модели, для каждого $i < \omega$ найдется $N(j) < \omega$ такое, что при $k > N(j)$ выполнено неравенство $\left\| \sum_{n=1}^{n(j)} \alpha_n^j x_{n+k} \right\| \leqslant 2\,(k_p(j))^{-1}$. Последнее означает, что $\| \Sigma \beta_n^j x_n \| \to 0$ при $n \to \infty$, где $\beta_n^j = 0$ при $n < N(j)$; $\beta_{i+N(j)}^j = \alpha_i^j$, $i = 1, \ldots, n(j)$, $\beta_{i+N(j)}^j = 0$ при $i > N(j)$. Поскольку последовательность $(x_n) \in pp_0(X)$ произвольна, $X \in \mathfrak{M}_p$.

Необходимость. Пусть для некоторой последовательности $(x_n) \in pp_0(X)$ пространство $E = SM(x_n) \in SM_0(X)$ непрерывно вложено в $l_p: E \subseteq^c l_p$. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого набора неотрицательных чисел (α_i^n) с $\sum_j (\alpha_i^n)^p = 1$ выполнено неравенство

$$\left||| \sum_n \alpha_n^j e_n \right|||_E \geqslant \varepsilon. \qquad (2)$$

Обозначим через Δ_p совокупность всех финитных последовательностей неотрицательных рациональных чисел (α_j) таких, что $\sum_j (\alpha_j)^p = 1$. Очевидно, элементы Δ_p можно занумеровать ординалом $\omega: \Delta_p = (d_j)_{j<\omega}$. Воспользовавшись определениями растягивающей модели, хорошей последовательности и неравенством (2), из (x_n) можно выбрать такую подпоследовательность $(x_{n,1}) \subset (x_n)$, что для $d_1 = (\alpha_i^1)_{i=1}^{m_1}$ и для любой подпоследовательности $(x_{n_i,1}) \subset (x_{n,1})$ выполнено неравенство $\left\| \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i^1 x_{n_i,1} \right\| \geqslant \varepsilon/2$. Предположим, что уже выбраны последовательности $(x_{n,1})$; $(x_{n,2})$; ... ; $(x_{n,N-1})$. Пусть последовательность $(x_{n,N})$ — такая подпоследовательность $(x_{n,N-1})$, что для каждой ее подпоследовательности $(x_{n_i,N})$ выполняется неравенство $\left\| \sum_{i=1}^{m_N} \alpha_i^N x_{n_i,N} \right\| \geqslant \varepsilon/2$, где $(\alpha_i^N)_{i=1}^{m_N} = d_N$. Теперь определим последовательность $(x_n') \subset (x_n)$, выбирая $x_1' = x_{n_1} \in (x_{n,1})$; $x_2' = x_{n_2} \in (x_{n,2})$ так, чтобы $n_2 > n_1$, и, вообще, выбирая $x_j' = x_{nj} \in (x_{n,j})$ так, чтобы $n_j > n_{j-1}$. Очевидно, что для каждого $d = (\alpha_i) \in \Delta_p$ справедливо соотношение $\| \sum \alpha_i x_i' \| \geqslant \varepsilon/2$. Поскольку в определении свойства p-Мазура без ограничения общности можно рассматривать только линейные комбинации элементов с рациональными коэффициентами, ясно, что в этом случае $X \notin \mathfrak{M}_p$.

Замечание 4. Интересно сравнить этот результат с результатом [7], характеризующим в терминах множества $SM_0(X)$ свойство Банаха — Сакса.

Сопоставляя результаты работ [7] и [12], нетрудно получить такое утверждение.

Предложение 3. *Если из всякой последовательности $(x_n) \subset \subset pp_0(X)$ можно извлечь симметричную базисную подпоследовательность, то среди пространств $E \in SM_0(X)$ нет пространства, изоморфного l_1. То же справедливо, если X — это l-выпуклая банахова решетка с порядково непрерывной нормой или если X — некоторое пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ или Марцинкевича $M_0(\varphi)$.*

Автор благодарит рецензента за внимание к работе и ценные замечания, послужившие ее улучшению.

1. *Банах С.* Курс функціонального аналізу.— К. : Рад. шк., 1948.— 214 с.
2. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей.— М. : Мир, 1977.— 614 с.
3. *Stern J.* Ultrapowers and local properties of Banach spaces.— Trans. Amer. Math. Soc., 1978, **240**, p. 231—252.
4. *Brunel A., Sucheston L.* On B-convex Banach spaces.— Math. System Theory, 1973, N 7, p. 294—299.
5. *Ketonen J.* Banach spaces and large cardinals.— Fund. Math., 1974, **81**, p. 291—303.
6. *Heinrich S.* Ultrapowers in Banach space theory.—J. Reine Angew. Math., 1980, **313**, p. 72—104.
7. *Beauzamy B.* Banach — Saks properties and spreading models.— Math. Scand., 1979, **44**. p. 357—384.
8. *Новиков С. Я., Семенов Е. М., Токарев Е. В.* О структуре подпространств пространств $\Lambda_p(\mu)$.— Теор. функций, функц. анализ и их прил., 1984, **42**, с. 91—97.
9. *Годун Б. В., Раков С. А.* Свойство Банаха—Сакса и задача трех пространств.—Мат. заметки, 1982, **31**, № 1, с. 61—74.
10. *Токарев Е. В.* О подпространствах симметричных пространств функций.— Функц. анализ и его примен., 1979., **15**, вып. 2, с. 90—91.
11. *Maurey B.* Théorèmes de factorication pour les opérateurs linéaires a valeurs dans les espaces L^p.— Asterisque, 1974, N 1, p. 1—163.
12. *Токарев Е. В.* О свойстве Банаха—Сакса в банаховых решетках.— Сиб. мат. журн., 1983, **24**, № 1, с. 187—189.

ВНИИкондиционер, Харьков

Поступила 15.08.83,
после доработки — 24.07.84