УДК 517.5

Н. Н. Сорич

Одновременное приближение периодических функций и их производных суммами Фурье и Валле Пуссена в метрике L

Пусть H_L^ω (H_C^ω) — класс 2π-периодических функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию

$$\|\varphi(x+t)-\varphi(x)\|_L = \int_0^{2\pi} |\varphi(x+t)-\varphi(x)|\,dx \leqslant \omega(t)\ (\|\varphi(x+t)-\varphi(x)\|_C = \max_x |\varphi(x+t)-\varphi(x)| \leqslant \omega(t)),$$

где $\omega(t)$ — заданный произвольный модуль непрерывности; L — класс суммируемых 2π-периодических функций $\varphi(t)$ с нормой $\|\varphi\|_L \leqslant 1$; M — класс 2π-периодических функций, существенно ограниченных единицей; $W_\beta^r H_L^\omega$ ($W_\beta^r L$)—класс 2π-периодических функций $f(x)$, допускающих представление

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos(kt+\beta\pi/2)\,dt, \quad r>0, \quad \beta\in R, \tag{1}$$

в котором $\varphi(t)$ — функция из класса $H_L^\omega(L)$ и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = 0; \tag{2}$$

$W_\beta^r H_C^\omega$ ($W_\beta^r C$) — класс 2π-периодических функций, представимых в виде (1), где $\varphi(t)$ принадлежит классу $H_C^\omega(M)$ и удовлетворяет условию (2).

Пусть, далее, $r_1, \ldots, r_m$ — произвольный набор неотрицательных чисел, расположенных в неубывающем порядке, $r_m < r$, а $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ — m-мерный вектор с действительными координатами. Рассмотрим в качестве меры одновременного приближения функций и их производных суммами Фурье верхнюю грань по классу $W_\beta^r H_L^\omega$ ($W_\beta^r L$) функционала

$$\sum\nolimits_{n,m}(f) = \sum_{i=1}^{m} n^{-r_i}\, \| f_{\gamma_i}^{(r_i)}(x) - S_n(f_{\gamma_i}^{(r_i)}; x)\|_L, \tag{3}$$

т. е. величины

$$\mathscr{E}_{n,m}(L) = \sup_{f\in W_\beta^r L} \sum\nolimits_{n,m}(f), \quad \mathscr{E}_{n,m}(\omega, L) = \sup_{f\in W_\beta^r H_L^\omega} \sum\nolimits_{n,m}(f), \tag{4}$$

где $f_{\gamma_i}^{(r_i)}(x)$ — функция, связанная с функцией $f(x)$, имеющей разложение $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, посредством равенства

$$f_{\gamma_i}^{(r_i)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{r_i} (a_k \cos(kx + \gamma_i\pi/2) + b_k \sin(kx + \gamma_i\pi/2)); \tag{5}$$

$S_n(f; x)$ — частная сумма порядка n ряда Фурье функции $f(x)$.

В настоящей статье исследовано поведение величин $\mathcal{E}_{n,m}(L)$ и $\mathcal{E}_{n,m}(\omega, L)$ и для них получены асимптотические законы убывания.

Задача одновременного приближения в таком виде в равномерной метрике впервые была поставлена и решена в работе [1] для целых r, r_i, β, $r_i = \gamma_i$, на классах $W_\beta^r H_C^\omega$; в случае дробных r, r_i, $\beta \in R$ — в работе [2] на тех же классах. Для сумм Валле Пуссена, близких к суммам Фурье, при целых r, r_i, β, $r_i = \gamma_i$, на классах $W_\beta^r H_C^\omega$ эта задача была решена в [3]. Во всех этих случаях исследовалось поведение величины

$$\sup_{f \in W_\beta^r H_C^\omega} \left\| \sum_{i=1}^{m} n^{-r_i} \left| f_{\gamma_i}^{(r_i)}(x) - S_n(f_{\gamma_i}^{(r_i)}; x) \right| \right\|_C \tag{6}$$

или ей подобной для сумм Валле Пуссена.

Очевидно, что аналогами выражения (6) в метрике L будут величины $\mathcal{E}_{n,m}(L)$ и $\mathcal{E}_{n,m}(\omega, L)$. Особенности метрики L не позволяют решать эту задачу ранее предложенными методами для равномерной метрики. И это естественно, так как оказалось, что асимптотика выражений (4) отлична от асимптотики выражения (6). Справедлива такая теорема.

Теорема. *Пусть* $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_m < r$, *тогда при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_{n,m}(L) = 4\pi^{-2} m n^{-r} \ln n + O(n^{-r}), \tag{7}$$

$$\mathcal{E}_{n,m}(\omega, L) = m n^{-r} \mathcal{E}_n(\omega, L) + O(n^{-r}\omega(1/n)), \tag{8}$$

где $\mathcal{E}_n(\omega, L) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{\varphi \in H_L^\omega} \| \varphi(x) - S_n(\varphi; x) \|_L$, $\omega(t)$ — *произвольный модуль непрерывности.*

Доказательство. Пусть $f \in W_\beta^r L$, тогда из (1) и (5) следует, что $f_{\gamma_i}^{(r_i)} \in W_{\beta-\gamma_i}^{r-r_i} L$, откуда

$$\sum_{n,m}(f) = \sum_{i=1}^{m} n^{-r_i} \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{r_i - r} \cos(kt + (\beta - \gamma_i)\pi/2)\, dt \right\|_L.$$

Обозначим множество функций $\varphi(t)$ из L, удовлетворяющих условию (2), через L_0, а выражение $\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{r_i - r} \cos(kt + (\beta - \gamma_i)\pi/2)$ через $\mathcal{K}_i(t)$; тогда

$$\mathcal{E}_{n,m}(L) = \sup_{f \in W_\beta^r L} \sum_{i=1}^{m} n^{-r_i} \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \mathcal{K}_i(t)\, dt \right\|_L = \sup_{\varphi \in L_0} \Sigma n^{-r_i} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x + t) \mathcal{K}_i(t)\, dt \right| dx = \sup_{\varphi \in L_0} \Sigma n^{-r_i} \sup_{g_i \in M} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_i(x) \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \mathcal{K}_i(t)\, dt dx =$$

$$= \sup_{\varphi \in L_0} \sup_{g_i \in M} \Sigma n^{-r_i} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_i(x) \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \mathcal{K}_i(t)\, dt dx.$$

Применив теорему Фубини о перемене порядка интегрирования, получим

$$\mathcal{E}_{n,m}(L) = \sup_{\varphi \in L_0} \sup_{g_i \in M} \Sigma n^{-r_i} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}_i(t) \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) g_i(x)\, dx dt. \tag{9}$$

Известно (см. [4]), что для любых функций $\varphi(t) \in L_0$ и $g(t) \in M$ их свертка $\varphi * g$ принадлежит классу M и удовлетворяет условию (2); обозначим этот класс через M_0. Далее, из работы [5] следует, что для любой функции $h(t) \in M_0$

$$\int_0^{2\pi} \mathscr{K}_i(t)\, h(t)\, dt = n^{r_i - r} \int_{\delta_{1i}}^{2\pi-\delta_{2i}} \frac{\sin((n+1/2)t + (\beta-\gamma_i)\pi/2)}{2\sin(t/2)}\, h(t)\, dt + O(n^{r_i-r}), \tag{10}$$

где $\delta_{1i} = O(n^{-1})$ и $\delta_{2i} = O(n^{-1})$.

Очевидно, что в дальнейшем выражение $(\beta-\gamma_i)\pi/2$ можно заменить числом $\nu_i \equiv (\beta-\gamma_i)\pi/2 \pmod{2\pi}$, $\nu_i \in [0; 2\pi)$. Как легко проверить, для произвольной функции $h(t) \in M_0$

$$\int_{\delta_{1i}}^{2\pi-\delta_{2i}} \frac{\sin((n+1/2)t+\nu_i)}{2\sin(t/2)}\, h(t)\, dt = \int_{\delta'_{1i}}^{2\pi-\delta'_{2i}} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}\, h(t - 2\nu_i/$$

$$/(2n+1))\, dt + O(1). \tag{11}$$

Поэтому, учитывая (11), из (10) получим, что для любых функций $\varphi(t) \in L_0$ и $g_i(x) \in M$

$$\int_0^{2\pi} \mathscr{K}_i(t) \int_0^{2\pi} \varphi(x+t)\, g_i(x)\, dx dt = n^{r_i-r} \int_{\delta'_{1i}}^{2\pi-\delta'_{2i}} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \int_0^{2\pi} \varphi(x + t -$$

$$- 2\nu_i/(2n+1))\, g_i(x)\, dx dt + O(n^{r_i-r}) = n^{r_i-r} \int_{\delta'_{1i}}^{2\pi-\delta'_{2i}} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \varphi(x+t)\, g_i(x + 2\nu_i/(2n+1))\, dx dt + O(n^{r_i-r}). \tag{12}$$

Выберем числа δ'_{1i} и δ'_{2i} одинаковыми для всех номеров i; тогда, так как класс M инвариантен относительно сдвига по аргументу, из (9) и (12) вытекает

$$\mathscr{E}_{n,m}(L) = \sup_{\varphi\in L_0} \sup_{g_i \in M} \sum_{i=1}^{m} n^{-r} \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{2\pi-\delta_2} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t)\, g_i(x)\, dx dt +$$

$$+ O(n^{-r}) = mn^{-r} \sup_{\varphi\in L_0} \sup_{g_i\in M} \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{2\pi-\delta_2} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t)\, g(x)\, dx dt + O(n^{-r}). \tag{13}$$

Чтобы найти верхнюю грань повторного интеграла в (13), поступим следующим образом. Пусть $s \in R$, $s > 0$; рассмотрим класс $W_0^s L$. Известно (см., напр., [6]), что

$$\mathscr{E}_n(W_0^s L) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in W_0^s L} \| f(x) - S_n(f; x) \|_L = \frac{4}{\pi^2} n^{-s} \ln n + O(n^{-s}). \tag{14}$$

С другой стороны, так же, как и для $\mathscr{E}_{n,m}(L)$,

$$\mathscr{E}_n(W_0^s L) = \sup_{f\in W_0^s L} \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-s} \cos kt dt \right\|_L = \sup_{\varphi\in L_0} \sup_{g\in M} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-s} \cos kt\,dt\,dx = \sup_{\varphi\in L_0} \sup_{g\in M} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-s} \cos kt \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \times$$

$$\times g(x)\,dx\,dt = \sup_{\varphi\in L_0} \sup_{g\in M} n^{-s} \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{2\pi-\delta_2} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t)\, g(x)\,dx\,dt + O(n^{-s}), \tag{15}$$

где $\delta_1 = O(n^{-1})$ и $\delta_2 = O(n^{-1})$. Из (14) и (15) получим

$$\sup_{\varphi\in L_0} \sup_{g\in M} \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{2\pi-\delta} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t)\, g(x)\,dx\,dt = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1),$$

откуда

$$\mathscr{E}_{n,m}(L) = \frac{4}{\pi^2} mn^{-r} \ln n + O(n^{-r}). \tag{16}$$

Исследуем величину $\mathscr{E}_{n,m}(\omega, L)$. Обозначим множество функций $\varphi(t)$ из H_L^ω, удовлетворяющих условию (2), через $H_{L,0}^\omega$, а множество функций из H_C^ω с этим же условием — через $H_{C,0}^\omega$.

Тем же способом, что и в случае класса $W_\beta^r L$, доказывается, что

$$\mathscr{E}_{n,m}(\omega, L) = \sup_{f\in W_\beta^r H_L^\omega} \sum_{i=1}^{m} n^{-r_i} \int_0^{2\pi} | f_{\nu_i}^{(r_i)}(x) - S_n(f_{\nu_i}^{(r_i)}; x) |\, dx =$$

$$= \sup_{\varphi\in H_{L,0}^\omega} \sum_i n^{-r_i} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi(x+t) - \varphi(x)]\, \mathscr{K}_i(t)\,dt \right| dx =$$

$$= \sup_{\varphi\in H_{L,0}^\omega} \sup_{g_i\in M} \sum_i n^{-r_i} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathscr{K}_i(t) \int_0^{2\pi} [\varphi(x+t) - \varphi(x)]\, g_i(x)\,dx\,dt. \tag{17}$$

Свертка любой функции $\varphi(t) \in H_{L,0}^\omega$ и любой функции $g(t)$ из класса M принадлежит классу $H_{C,0}^\omega$ (см. [4]). Как показано в работе [7], для произвольной функции $h(t) \in H_{C,0}^\omega$

$$\int_0^{2\pi} \mathscr{K}_i(t)\,[h(t) - h(0)]\,dt = n^{r_i - r} \int_{\delta_{1i}}^{2\pi-\delta_{2i}} \frac{\sin((n+1/2)t + \nu_i)}{2\sin(t/2)} [h(t) - h(0)]\,dt +$$

$$+ O(n^{r_i - r}\omega(1/n)), \tag{18}$$

где $\delta_{1i} = O(n^{-1})$ и $\delta_{2i} = O(n^{-1})$.

Докажем, что для любой функции $h(t) \in H_C^\omega$

$$\int_{\delta_{1i}}^{2\pi-\delta_{2i}} \frac{\sin((n+1/2)t + \nu_i)}{2\sin(t/2)} [h(t) - h(0)]\,dt = \int_{\delta'_{1i}}^{2\pi-\delta'_{2i}} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} [h(t -$$

$$- 2\nu_i/(2n+1)) - h(0)]\,dt + O(\omega(1/n)). \tag{19}$$

Пусть $\tau_k = 2(k\pi - \nu_i)/(2n+1)$,

$$r_{n,i}(\tau) = \left[\frac{1}{\sin(\tau/2)} - \frac{1}{\sin((\tau + 2\nu_i/(2n+1))/2)} \right] \sin((n+1/2)\tau + \nu_i),$$

$$\bar{r}_{n,i}(t) = \int_t^{\pi - 2\nu_i/(2n+1)} r_{n,i}(\tau)\,d\tau.$$

Поскольку на промежутке $[\delta_{1i}; \pi - 2\nu_i/(2n+1)]$ разность в квадратных скобках в выражении функции $r_{n,i}(\tau)$ монотонно убывает, то, как следует из работы [1, с. 95], на каждом промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ функция $\bar{r}_{n,i}(t)$ имеет нуль t_k, $k=\overline{k_0, n-1}$, где τ_{k_0} — ближайшая справа точка к δ_{1i} среди точек τ_k, так что $\tau_{k_0} < t_{k_0} < \tau_{k_0+1} < \ldots < \tau_{n-1} < t_{n-1} < \tau_n < t_n = \pi - 2\nu_i/(2n+1)$; поэтому при $\forall h \in H_C^\omega$

$$\left|\int_{\delta_{1i}}^{\pi} r_{n,i}(\tau)[h(\tau)-h(0)]\,d\tau\right| \leqslant \left|\int_{\delta_{1i}}^{t_{k_0}} r_{n,i}(\tau)[h(\tau)-h(0)]\,d\tau\right| +$$

$$+\sum_{k=k_0}^{n-1}\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} r_{n,i}(\tau)[h(\tau)-h(0)]\,d\tau\right| + \left|\int_{t_n}^{\pi} r_{n,i}(\tau)[h(\tau)-h(0)]\,d\tau\right| \leqslant C\omega(t_{k_0}) +$$

$$+\max_k \omega(t_{k+1}-t_k)\int_{t_{k_0}}^{t_n} |r_{n,i}(\tau)|\,d\tau + \omega(\pi)\int_{t_n}^{\pi}|r_{n,i}(\tau)|\,d\tau.$$

Учитывая соотношения $t_{k_0} = O(n^{-1})$, $t_{k+1} - t_k \leqslant 2\pi/n$ и $\int_{t_n}^{\pi}|r_{n,i}(\tau)|\,d\tau \leqslant \leqslant 4\int_{t_n}^{\pi} d\tau = O(n^{-1})$, из предыдущего неравенства в силу (11) получим $\int_{\delta_{1i}}^{\pi} r_{n,i}(\tau)[h(\tau)-h(0)]\,d\tau = O(\omega(1/n))$. Понятно, что этот интеграл по промежутку $[\pi; 2\pi - \delta_{2i}]$ будет иметь такую же оценку, т. е.

$$\int_{\delta_{1i}}^{2\pi-\delta_{2i}} r_{n,i}(\tau)[h(\tau)-h(0)]\,d\tau = O(\omega(1/n)).$$

Из этого равенства и вида функции $r_{n,i}(\tau)$ после замены переменной $\tau + 2\nu_i/(2n+1) = t$ нетрудно получить соотношение (19). Таким образом, из (18) и (19) для любых функций $\varphi \in H_{L,0}^\omega$ и $g_i \in M$ следует

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{K}_i(t)\int_0^{2\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\,g_i(x)\,dxdt = n^{r_i-r}\int_{\delta'_{1i}}^{2\pi-\delta_{2i}} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \times$$

$$\times\int_0^{2\pi}[\varphi(x+t-2\nu_i/(2n+1))-\varphi(x)]\,g_i(x)\,dxdt + O(n^{r_i-r}\omega(1/n)) =$$

$$= n^{r_i-r}\int_{\delta'_{1i}}^{2\pi-\delta'_{2i}} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}\int_0^{2\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x+2\nu_i/(2n+1))]\,g_i(x+$$

$$+2\nu_i/(2n+1))\,dxdt + O(n^{r_i-r}\omega(1/n)) = n^{r_i-r}\int_{\delta'_{1i}}^{2\pi-\delta'_{2i}} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}\int_0^{2\pi}[\varphi(x+t)-$$

$$-\varphi(x)]\,g_i(x+2\nu_i/(2n+1))\,dxdt + n^{r_i-r}\int_{\delta'_{1i}}^{2\pi-\delta_{2i}} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}\,dt\int_0^{2\pi}[\varphi(x)-$$

$$-\varphi(x+2\nu_i/(2n+1))]\,g_i\left(x+\frac{2\nu_i}{2n+1}\right)dx + O(n^{r_i-r}\omega(1/n)). \qquad (20)$$

Легко доказать, что при $\varphi \in H_{L,0}^{\omega}$, $g_i \in M$

$$\int\limits_0^{2\pi} [\varphi(x) - \varphi(x + 2\nu_i/(2n+1))] \, g_i(x + 2\nu_i/(2n+1)) \, dx = O(\omega(1/n)),$$

$$\int\limits_{\delta'_{1i}}^{2\pi - \delta'_{2i}} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} = O(1).$$

Учитывая эти оценки, инвариантность класса M относительно сдвига аргумента и выбрав числа δ'_{1i}, δ'_{2i} одинаковыми для всех номеров i, из (17) и (20) получим

$$\mathscr{E}_{n,m}(\omega, L) = \sup_{\varphi \in H_{L,0}^{\omega}} \sup_{g_i \in M} \sum_i n^{-r} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta_1}^{2\pi - \delta_2} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \int\limits_0^{2\pi} [\varphi(x+t) - \varphi(x)] \times$$

$$\times g_i(x) \, dx dt + O(n^{-r}\omega(1/n)) = mn^{-r} \sup_{\varphi \in H_{L,0}^{\omega}} \sup_{g \in M} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta_1}^{2\pi - \delta_2} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \int\limits_0^{2\pi} [\varphi(x+$$

$$+ t) - \varphi(x)] \, g(x) \, dx dt + O(n^{-r}\omega(1/n)). \tag{21}$$

Верхнюю грань повторного интеграла в (21) будем искать так же, как и в (13). Пусть $f \in W_0^s H_L^{\omega}$, тогда из результатов работы [7] следует

$$f(x) - S_n(f;\ x) = n^{-s} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta_1}^{2\pi - \delta_2} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} [\varphi(x+t) - \varphi(x)] \, dt + \gamma, \tag{22}$$

где $\delta_1 = O(n^{-1})$, $\delta_2 = O(n^{-1})$, $\varphi(x) \equiv f_s^{(s)}(x)$, $\|\gamma\|_L = O(n^{-s}\omega(1/n))$;

$$\sup_{f \in W_0^s H_L^{\omega}} \|f(x) - S_n(f;\ x)\|_L = n^{-s} \mathscr{E}_n(\omega,\ L) \, O(n^{-s}\omega(1/n)). \tag{23}$$

Но с другой стороны, учитывая (22), имеем

$$\sup_{f \in W_0^s H_L^{\omega}} \|f(x) - S_n(f;\ x)\|_L = \sup_{f \in W_0^s H_L^{\omega}} \int\limits_0^{2\pi} |f(x) - S_n(f;\ x)| \, dx =$$

$$= \sup_{f \in W_0^s H_L^{\omega}} n^{-s} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \int\limits_{\delta_1}^{2\pi - \delta_2} [\varphi(x+t) - \varphi(x)] \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \, dt \right| dx + O(n^{-s}\omega(1/n)) =$$

$$= \sup_{\varphi \in H_L^{\omega}} \sup_{g \in M} n^{-s} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta_1}^{2\pi - \delta_2} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \int\limits_0^{2\pi} [\varphi(x+t) - \varphi(x)] g(x) \, dx dt + O(n^{-s}\omega(1/n)).$$

Сравнив это соотношение с (23), из (21) получим (8). Теорема доказана.

Замечание 1. Очевидно, что $\sum_{n,m}(f) = \sum_i n^{-r_i} \| f_{\gamma_i}^{(r_i)}(x) - S_n(f_{\gamma_i}^{(r_i)};\ x) \|_L = \left\| \sum_i n^{-r_i} | f_{\gamma_i}^{(r_i)}(x) - S_n(f_{\gamma_i}^{(r_i)};\ x) | \right\|_L$. Пусть $\sum_{n,m}(f;\ x;\ \alpha) = \sum_i \alpha_i n^{-r_i} \times \times (f_{\gamma_i}^{(r_i)}(x) - S_n(f_{\gamma_i}^{(r_i)};\ x))$, тогда $\left\| \sum_i n^{-r_i} | f_{\gamma_i}^{(r_i)}(x) - S_n(f_{\gamma_i}^{(r_i)};\ x) | \right\|_C = \max_{|\alpha_i|=1} \left\| \sum_{n,m}(f;\ x;\ \alpha) \right\|_C$. Поэтому, если в метрике L задачу одновременного приближения поставить в виде

$$\overline{\mathscr{E}}_{n,m}(L)[(\omega,\ L)] = \sup_{f\in W^r_\beta L[W^r_\beta H^\omega_L]} \max_{|\alpha_i|=1} \left\| \sum\nolimits_{n,m} (f;\ x;\ \alpha) \right\|_L,$$

то величины $\overline{\mathscr{E}}_{n,m}(L)$ и $\overline{\mathscr{E}}_{n,m}(\omega,\ L)$ будут иметь такую же асимптотику, как и в равномерном случае (см. [2]). В то же время можно доказать, что величины

$$\overline{\mathscr{E}}_{n,m}(C)[(\omega,\ C)] = \sup_{f\in W^r_\beta C[W_\beta H^\omega_C]} \sum_i n^{-r_i} \| f^{(r_i)}_{\gamma_i}(x) - S_n(f^{(r_i)}_{\gamma_i};\ x) \|_C$$

имеют такие же асимптотические законы убывания, как и величины $\mathscr{E}_{n,m}(L)$ и $\mathscr{E}_{n,m}(\omega,\ L)$.

Замечание 2. Все результаты, сформулированные для сумм Фурье, нетрудно доказать для сумм Валле Пуссена $\sigma_{n,p}(f;\ x) \overset{df}{=} \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} S_{n-k}(f;\ x)$, близких к суммам Фурье, $p = o(n)$.

1. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами — Киев : Наук. думка, 1981.— 340 с.
2. *Степанец А. И., Сорич Н. Н.* Совместное приближение периодических функций и их производных суммами Фурье.— Мат. заметки, 1984, **36**, № 6, с. 873—882.
3. *Задерей Н. Н.* Одновременное приближение периодических функций и их производных суммами Валле Пуссена.— Киев, 1981.— 32 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 81.24)
4. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
5. *Пинкевич В. Г.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Weyl'я. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, **4**, № 6, с. 521—528.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946, **10**, № 3, с. 207—244.
7. *Демченко А. Г.* О приближении в среднем периодических функций : Автореф. дис. ... ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1971.— 9 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 22.03.83,
после доработки — 25.05.84