УДК 517.948

Нгуен Быонг

О приближенных решениях уравнения типа Гаммерштейна в банаховых пространствах

В [1] рассмотрена регуляризация уравнения типа Гаммерштейна в гильбертовом пространстве и показано, что при наличии решения исходного уравнения последовательность решений регуляризованных уравнений компактна, причем все ее предельные точки — решения исходного уравнения. В настоящей работе мы обобщим эти результаты для случая банаховых пространств, рассмотрим метод Галеркина для регуляризованных уравнений, затем, пользуясь этими результатами, исследуем проблему аппроксимации решения одной бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных.

1. Для уравнения типа Гаммерштейна

$$x + BF(x) = f_0, \tag{1}$$

где F — монотонный и хеминепрерывный оператор из вещественного строго выпуклого банахова пространства X в его сопряженное X^*, которое является равномерно выпуклым, а B — линейный, ограниченный и монотонный оператор из X^* в X, рассмотрим регуляризованное уравнение

$$x + B_n F(x) = f_0, \tag{2}$$

где $B_n = B + \alpha_n U$, U — дуальное отображение [2] из X^* в X, параметр регуляризации $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \to 0$.

Теорема 1. *Для каждого $f_0 \in X$ и фиксированного n уравнение* (2) *имеет единственное решение.*

Доказательство единственности решения. Пусть x_1, x_2 — решения уравнения (2) тогда

$$x_1 - x_2 + B_n F(x_1) - B_n F(x_2) = 0. \tag{3}$$

Применяя к обеим частям равенства (3) функционал $F(x_1) - F(x_2)$ и учитывая монотонность F, получаем $\langle B_n F(x_1) - B_n F(x_2), F(x_1) - F(x_2)\rangle \leqslant \leqslant 0$, где $\langle x, x^*\rangle$ (или $\langle x^*, x\rangle$) обозначает значение $x^* \in X^*$ в точке $x \in X$. Дуальное отображение U из равномерно выпуклого пространства X^* (следует из строго выпуклого X^*) в X есть строго монотонный оператор (см. [2, лемма 22.1]). Поэтому B_n тоже строго монотонный оператор. Из этого факта и последнего неравенства получим $F(x_1) = F(x_2)$. Тогда из (3) вытекает $x_1 = x_2$, т. е. уравнение (2) может иметь только одно решение.

Доказательство существования решения. Дуальное отображение из рефлексивного банахова пространства X^* (так как оно равномерно выпуклое) в строго выпуклое X хеминепрерывно [2, с. 314]. Поэтому B_n — хеминепрерывный оператор. Кроме того, легко видеть, что B_n удовлетворяет условию $\langle B_n(x^*) - B_n(y^*), x^* - y^*\rangle \geqslant (\varphi(\|x^*\|) - \varphi(\|y^*\|)) \times \times (\|x^*\| - \|y^*\|)$, где $\varphi(t) = \alpha_n t$. Из [3] следует, что B_n^{-1} — монотонный и хеминепрерывный (так как он непрерывен) из всего X в X^*. Покажем, что B_n^{-1} коэрцитивен, т. е. $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} (\langle B_n^{-1}(x), x\rangle/\|x\|) = +\infty$. Сделаем замену $x^* = B_n^{-1}(x)$; тогда $\|x\| \leqslant \|B_n(x^*)\| \leqslant (\|B\| + \alpha_n)\|x^*\|$, т. е. $\|x^*\| \to +\infty$, если $\|x\| \to +\infty$ и

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} (\langle B_n^{-1}(x), x\rangle/\|x\|) = \lim_{\|x^*\|\to+\infty} (\langle x^*, B_n(x^*)\rangle/\|B_n(x^*)\|) \geqslant \alpha_n (\|B\| + \alpha_n)^{-1} \times$$

$$\times \lim_{\|x^*\|\to+\infty} (\langle x^*, U(x^*)\rangle/\|x^*\|) = +\infty.$$

Легко видеть, что оператор T_{n,f_0}, определяемый таким образом: $T_{n,f_0}(x) = = -B_n^{-1}(f_0 - x)$, — хеминепрерывный и монотонный оператор. Докажем, что T_{n,f_0} коэрцитивен.

Пусть

$$L := \lim_{\|x\|\to+\infty} (\langle T_{n,f_0}(x), x\rangle/\|x\|) = \lim_{\|x\|\to+\infty} [\langle B_n^{-1}(f_0 - x), f_0 - x\rangle/\|x\| -$$

$$- \langle B_n^{-1}(f_0 - x), f_0\rangle/\|x\|].$$

Сделаем замену $x^* = B_n^{-1}(f_0 - x)$; получим $\|x\| \leqslant \|f_0\| + (\|B\| + \alpha_n)\|x^*\|$. Из этого неравенства следует, что $\|x^*\| \to +\infty$, если $\|x\| \to +\infty$ и $\|x\| \leqslant 2(\|B\| + \alpha_n)\|x^*\|$ при достаточно большом $\|x^*\|$. Тогда

$$L = \lim_{\|x^*\|\to+\infty} (\langle x^*, B_n(x^*)\rangle/\|f_0 - B_n(x^*)\|) - \lim_{\|x\|\to+\infty} (\langle B_n^{-1}(f_0 - x), f_0\rangle/\|x\|) \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{\|x^*\|\to+\infty} (\langle x^*, B_n(x^*)\rangle/2(\|B\| + \alpha_n)\|x^*\|) - (\|f_0\|/\alpha_n) \times$$

$$\times \lim_{\|x\|\to+\infty} (\|f_0 - x\|/\|x\|) = +\infty.$$

Уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$A_{n,f_0}(x) = 0, \tag{4}$$

где $A_{n,f_0} = T_{n,f_0} + F$. Очевидно, что A_{n,f_0} есть монотонный и хеминепрерывный оператор из X в X^*. Кроме того, он коэрцитивен. Для проверки последнего свойства не теряя общности предполагаем, что $F(0) = 0$ (так как вместо (1) рассматриваем уравнения $x+B\tilde{F}(x)=\tilde{f}$, $\tilde{F}(x)=F(x)-F(0)$ и $\tilde{f}=f_0-BF(0)$). Тогда

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} (\langle A_{n,f_0}(x), x\rangle/\|x\|) = \lim_{\|x\|\to+\infty} [\langle T_{n,f_0}(x), x\rangle/\|x\| + \langle F(x), x\rangle/\|x\|] \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{\|x\|\to+\infty} (\langle T_{n,f_0}(x), x\rangle/\|x\|) = +\infty.$$

Из [2] следует, что уравнение (4) имеет решение, которое является также решением уравнения (2). Теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) *имеет решение. Тогда последовательность решений* $\{x_n\}$ *уравнений* (2) *компактна и произвольная сходящаяся подпоследовательность последовательности* $\{x_n\}$ *сходится к некоторому решению уравнения* (1).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству второй теоремы из [2], поэтому здесь его приводить не будем.

Замечание. Если уравнение (1) имеет одно решение, то к нему сходится последовательность $\{x_n\}$ при $n\to+\infty$.

2. Предположим для X существование последовательностей конечномерных подпространств $\{X_m\}: X_m\subset X_{m+1}$ и соответствующего семейства проекторов $\{P_m\}$ из X на X_m таких, что при всяком m $\|P_m\|=1$ и $P_m x\to x$, $P_m^* x^*\to x^*$ для произвольных элементов $x\in X$ и $x^*\in X^*$, когда $m\to+\infty$. Галеркинские приближения x_m для уравнения (2) строятся как решения уравнения

$$P_m X + P_m B_n P_m^* F P_m X = P_m f_0, \quad x\in X, \tag{5}$$

или уравнения

$$x + B_{n,m} F_m(x) = f_m, \quad x\in X_m, \tag{6}$$

где $F_m = P_m^* F P_m$ отображает из X_m в X_m^*, $B_{n,m}=P_m B_n P_m^*$ — из X_m^* в X_m, $f_m = P_m f_0$.

Теорема 3. *При указанных выше условиях*

I) *для каждого* m *существует единственное галеркинское приближение* x_m;

II) *если вместо монотонности* F *имеем*

$$\langle F(x)-F(y), x-y\rangle \geqslant \gamma(\|x\|-\|y\|)^2 \quad \forall x,y\in X, \tag{7}$$

где γ — *произвольное положительное число, то* x_m *слабо сходится к* $\bar{x}$ — *решению уравнения* (2), *и* $\|x_m\|\to\|\bar{x}\|$, *когда* $m\to+\infty$, *т. е. если* x *обладает еще E-свойством, то* $x_m\to\bar{x}$, *когда* $m\to+\infty$.

Доказательство. I). Легко проверить, что F_m — монотонный и хеминепрерывный оператор из X_m в X_m^*, $B_{n,m}=P_m B P_m^* + \alpha_n P_m U P_m^*$, где $P_m B P_m^*$ — линейный ограниченный и монотонный оператор из X_m^* в X_m, а $P_m U P_m^*$ — дуальное отображение из X_m^* в X_m [2, лемма 22.4]. Тогда, согласно теореме 1, уравнение (6) имеет единственное решение.

II). Для X построим банахово пространство $Z=X\times X^*$ как в [4], с нормой $\|z\|=(\|x\|^2+\|x^*\|^2)^{1/2}$, где $z=[x,x^*]$, $x\in X$ и $x\in X^*$. Тогда $Z^* = X^*\times X^{**} = X^*\times X$, т. е.: 1) $\forall\Phi\in Z^*$ существует единственная пара $\varphi^*\in X^*$ и $y\in X$ такая, что $\forall z\in Z$ $\langle\Phi, z\rangle = \langle\varphi^*, x\rangle + \langle y, x^*\rangle$; 2) $\|\Phi\|^2 = \|\varphi^*\|^2+\|y\|^2$.

Для уравнений (2) и (6) рассмотрим соответственно два уравнения

$$A_n(z) = \bar{f}, \quad z\in Z, \tag{8}$$

$$A_{n,m}(z) = \bar{f}_m, \quad z\in Z_m, \tag{9}$$

где A_n и $A_{n,m}$ — операторы из Z в Z^*, которые определяются таким образом: $A_n(z) = [F(x)-x^*, x+B_n(x^*)]$, $A_{n,m}(z)=[F_m(x)-x^*, x+B_{n,m}(x^*)]$, и $\bar{f}=[0; f_0]$; $\bar{f}_m=[0, f_m]$.

Очевидно, что $\bar{z}=[\bar{x}, F(\bar{x})]$ и $z_m=[x_m, F_m(x_m)]$ — решения уравнений (8), (9) соответственно, где x — решение уравнения (2). Наоборот, если

$\bar z$ и z_m — решения соответствующих уравнений (8), (9), то $\bar x$ и x_m — решения уравнений (2) и (6) соответственно.

Оператор A_n удовлетворяет условию

$$\langle A_n(z_1) - A_n(z_2), z_1 - z_2\rangle \geqslant \gamma_n (\| z_1\| - \| z_2\|)^2 \quad \forall z_1, z_2 \in Z, \tag{10}$$

где $\gamma_n = \min(\gamma, \alpha_n)$. Действительно,

$$\langle A_n(z_1) - A_n(z_2), z_1 - z_2\rangle = \langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2\rangle + \langle Bx_1^* - Bx_2^*, x_1^* - x_2^*\rangle +$$
$$+ \alpha_n \langle U(x_1^*) - U(x_2^*), x_1^* - x_2^*\rangle \geqslant \gamma(\| x_1\| - \| x_2\|)^2 + \alpha_n (\| x_1^*\| - \| x_2^*\|)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \gamma_n (\| z_1\| - \| z_2\|)^2.$$

Аналогично доказывается неравенство (10) для $A_{n,m}$ $\forall z_i \in Z_m$, $i = 1, 2$.

Пусть $\mathcal{P}_m = [P_m, P_m^*]$ — оператор из Z на $Z_m: \mathcal{P}_m(z) = [P_m x, P_m^* x^*]$. Тогда $\mathcal{P}_m^* = [P_m^*, P_m]$ отображает Z^* на Z_m^*, $\bar f_m = \mathcal{P}_m^* \bar f$ и $A_{n,m} = \mathcal{P}_m^* A_n \mathcal{P}_m$. Таким же способом, как в [5], получаем оценку

$$\| z_m\| \leqslant R_n \quad \forall m, \tag{11}$$

где $R_n = \| f_0\|/\gamma_n$. Положим $y_m = A_n(z_m)$; тогда y_m удовлетворяет уравнению $\mathcal{P}_m^*(y_m - \bar f) = 0$ и $\{y_m\}$ — ограниченное множество (см. [5]). Следовательно,

$$\lim_{m\to+\infty} \langle y_m - \bar f, z\rangle = 0 \quad \forall z \in Z. \tag{12}$$

В самом деле,

$$|\langle y_m - \bar f, z\rangle| = |\langle y_m - \bar f, z - \mathcal{P}_m z\rangle + \langle y_m - \bar f, \mathcal{P}_m z\rangle| = |\langle y_m - \bar f, z - \mathcal{P}_m z\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \| y_m - \bar f\| (\| x - P_m x\|^2 + \| x^* - P_m^* x^*\|^2)^{1/2}.$$

По свойствам проекторов P_m правая часть этого неравенства стремится к 0, когда $m \to +\infty$.

Согласно (10) $\gamma_n (\| z_m\| - \| \bar z\|)^2 \leqslant \langle y_m - \bar f, z_m - \bar z\rangle = -\langle y_m - \bar f, \bar z\rangle$; отсюда с учетом соотношения (12) получим $\| z_m\| \to \| \bar z\|$ при $m \to +\infty$.

Докажем, что $z_m \rightharpoonup \bar z$. Из оценки (11) и рефлексивности Z следует существование подпоследовательности $z_{m_j}: z_{m_j} \rightharpoonup \bar z_1$; покажем, что $\bar z_1 = \bar z$. Действительно, из монотонности A_n имеем

$$\forall z \in Z \quad \langle A_n(z) - \bar f, z - z_{m_j}\rangle = \langle A_n(z) - y_{m_j}, z - z_{m_j}\rangle +$$
$$+ \langle y_{m_j} - \bar f, z - z_{m_j}\rangle \geqslant \langle y_{m_j} - \bar f, z - z_{m_j}\rangle = \langle y_{m_j} - \bar f, z\rangle. \tag{13}$$

Последнее равенство имеет место, так как из $y_{m_j} = A_n(z_{m_j})$, $z_{m_j} = P_{m_j} z_{m_j}$ следует $\langle y_{m_j} - \bar f, z_{m_j}\rangle = \langle \mathcal{P}_{m_j}(y_{m_j} - \bar f), z_{m_j}\rangle = 0$. Устремляя в (13) $j \to +\infty$ получим $\forall z \in Z$ $\langle A_n(z) - \bar f, z - \bar z_1\rangle \geqslant 0$. Тогда $A_n(\bar z_1) = \bar f$. Равенство $\bar z_1 = \bar z$ следует из единственности решения уравнения (8). Аналогично доказывается, что всякая слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{z_m\}$ слабо сходится к $\bar z$. Таким образом, $z_m \rightharpoonup \bar z$. Остальная часть доказательства теоремы следует из следующей леммы.

Лемма. *Пусть X и Y — два банаховых пространства и $Z = X \times Y$ — банахово пространство с нормой $\| z\| = (\| x\|^2 + \| y\|^2)^{1/2}$ (см. [4, с. 164]), а последовательность $z_m = [x_m, y_m]$ такова, что $\| z_m\| \to \| z_0\|$, $z_m \rightharpoonup z_0 = [x_0, y_0]$ при $m \to +\infty$. Тогда* а) $x_m \rightharpoonup x_0$, $y_m \rightharpoonup y_0$ *при* $m \to +\infty$; *б)* $\| x_m\| \to \| x_0\|$, $\| y_m\| \to \| y_0\|$ *при* $m \to +\infty$.

Доказательство. По условию леммы $Z^* = X^* \times Y^*$, тогда $\forall \varphi \in Z^*$ $\varphi = [f, g]$, где $f \in X^*$, $g \in Y^*$, и $\langle \varphi, z_m\rangle = \langle f, x_m\rangle + \langle g, y_m\rangle$ (см. [4, с. 164]). Из слабой сходимости z_m к z_0 следует $\forall f \in X^*$, $g = 0$ $\langle f, x_m\rangle \to \langle f, x_0\rangle$ при $m \to +\infty$, т. е. $x_m \rightharpoonup x_0$ при $m \to +\infty$. Аналогично можно показать, что $y_m \rightharpoonup y_0$.

Из слабой сходимости последовательностей $\{x_m\}$ и $\{y_m\}$ к x_0 и y_0 соответственно получаем $\|x_0\| \leqslant \underline{\lim}\|x_m\|$ и $\|y_0\| \leqslant \underline{\lim}\|y_m\|$. С другой стороны, из условия $\|z_m\| \to \|z_0\|$ при $m \to +\infty$ следует, что существует подпоследовательность $\{\|z_{m_j}\|\}: \|x_{m_j}\| \to a$ и $\|y_{m_j}\| \to b$, причем $a^2 + b^2 = \|x_0\|^2 + \|y_0\|^2$. Кроме того, из последних неравенств вытекает $\|x_0\| \leqslant a$ и $\|y_0\| \leqslant b$. Отсюда и из последнего равенства получаем, что $a = \|x_0\|$ и $b = \|y_0\|$, т. е. $\|x_{m_j}\| \to \|x_0\|$ и $\|y_{m_j}\| \to \|y_0\|$. Аналогичным способом доказывается, что всякие сходящиеся подпоследовательности соответствующих последовательностей $\{\|x_m\|\}$ и $\{\|y_m\|\}$ сходятся соответственно к $\|x_0\|$ и $\|y_0\|$, т. е. $\|x_m\| \to \|x_0\|$ и $\|y_m\| \to \|y_0\|$ при $m \to +\infty$. Лемма доказана.

3. Исследуем систему алгебраических уравнений

$$x_i + \left[1 + \left(\sum_{l=1}^{\infty} |x_l|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{l=1}^{\infty} |x_l|^p\right)^{(1-p)/p} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}|x_j|^{p-2}x_j = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

где $1 < p < +\infty$ — любое фиксированное число $(p \neq 2)$, $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^p < +\infty$, коэффициенты b_{ij} удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{а) } b_{ij} = b_{ji} \ \forall i,\ j = 1, 2, \ldots; \qquad \text{б) } b_{ii} \geqslant \sum_{j=1,\ \neq i}^{\infty} |b_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$\text{в) } \sum_{i,j=1}^{\infty} |b_{ij}|^p < +\infty,$$

и матрица B, составленная из b_{ij}, имеет вид

$$\text{г) } B = \begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_M \end{bmatrix},$$

где B_i — $n_i \times n_i$-матрица, n_i — целое неотрицательное число. Из условия в) следует, что B — ограниченный оператор из l_q в l_p. Докажем, что B — монотонный оператор, т. е. $\langle By, y\rangle \geqslant 0 \ \ \forall y \in l_q \ \ (p^{-1} + q^{-1} = 1)$. Так как очевидно, что B — линейный оператор, возьмем любой вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in l_q$ и запишем его в виде $y = (y^{n_1}, y^{n_2}, \ldots, y^{n_M}, \ldots)$, где $y^{n_i} = (y_{n_{i-1}} + 1,\ y_{n_{i-1}} + 2, \ldots, y_{n_i})$, $i = 1, 2, \ldots,\ n_0 = 0$. Тогда из условия г) $\langle By, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle B_i y^{n_i}, y^{n_i}\rangle$. Из условий а) и б) имеем: $\langle B_i y^{n_i}, y^{n_i}\rangle \geqslant 0 \ \ \forall i = 1, 2, \ldots$ (см. [6]). Пусть U_p — дуальное отображение из l_p в l_q; тогда $U_p(x) = \|x\|_p^{2-p} z_x^p$, где $z_x^p = (|x_1|^{p-2}x_1, \ldots, |x_n|^{p-2}x_n, \ldots)$ и $\operatorname{grad}\|x\|_p = \|x\|_p^{1-p} z_x^p$. Если $F(\cdot) = \operatorname{grad}\|\cdot\|_p + U_p(\cdot)$, то система (14), (15) имеет вид (1). Так как оператор U_p удовлетворяет условию (7) с $\gamma = 1$ [2], то $\operatorname{grad}\|x\|_p$ — непрерывный оператор в любой точке, отличной от начала. Если доопределить $\operatorname{grad}\|0\|_p = 0$, то $\operatorname{grad}\|\ \|_p$ будет хеминепрерывным в нуле и монотонным как субдифференциал выпуклой функции [7]. Пространство l_p удовлетворяет всем условиям а) — г) при $P_m x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots)$ $\forall x \in l_p : x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$, и систему уравнений (14) можно аппроксимировать следующей системой:

$$\left\{1+\alpha\left[1+\left(\sum_{l=1}^{m}|x_l|^p\right)^{-1/p}\right]\right\}x_i+\left[1+\left(\sum_{l=1}^{m}|x_l|^p\right)^{1/p}\right]\times$$

$$\times\left(\sum_{l=1}^{m}|x_l|^p\right)^{(1-p)/p}\sum_{j=1}^{m}b_{ij}|x_j|^{p-2}x_j=f_i,\quad i=1,2,\ldots,m. \qquad (16)$$

1. *Фонарев А. А.* О приближенных решениях уравнения типа Гаммерштейна.— Сиб. мат. журн., 1980, 21, № 1, с. 226—228.
2. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.— М. : Наука, 1972.— 415 с.
3. *Brezis H.*, *Sibony M.* Méthodes d'approximation et d'iteration pour les opérateurs monotones.— Arch. Rat. Mech. Anal., 1968, 28, N 1, p. 59—82.
4. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators.— New York : Springer-Verlag, 1966.— 592 p.
5. *Рязанцева И. П.* О методе Галеркина для решения уравнений с разрывными операторами.— Изв. вузов. Математика, 1978, № 7, с. 68—72.
6. *Varga R. S.* Matrix iterative analysis.— Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
7. *Rockafellar R. T.* On the maximality of subdifferential mapping.— Pacif. J. Math., 1970, 33, p. 209—216.

СРВ Поступила 27.12.83