УДК 517.5:517.7

В. Р. Кравчук

Об эффективном приближении элементарных функций рациональными полиномами порядка $(n, 1)$

В работе [1] предложен новый метод (так называемый РА-метод) рациональной аппроксимации решений линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами.

В настоящей статье РА-метод применяется к аппроксимации некоторых элементарных функций рациональными функциями $R_{n,1}(x)$ порядка $(n, 1)$.

Обозначим через $f(x)$ одну из функций $\ln(1+x)$, e^x, $(1+x)^\alpha$, заданных на каком-нибудь симметричном сегменте $[-h, h]$ (для функций $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$ $h < 1$). Для каждой из этих функций построены рациональные функции порядка $(n, 1)$, при которых $\| f(x) - R_{n,1}(x) \|_{C[-h,h]} \leqslant AE_{n,1}(f)_{C[-h,h]}$, где $A = \text{const}$ и $E_{n,1}(f)$ — величина наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ рациональными функциями порядка $(n, 1)$.

1. Рациональная аппроксимация функции $\ln(1+x)$. С целью построения рациональных полиномов, хорошо приближающих на сегменте $[-h, h]$, $h \in (0, 1)$, функцию $\ln(1+x)$, рассмотрим вспомогательную функцию

$$y(x) = (x + x_1)\ln(1+x), \quad x \in [-h, h], \tag{1}$$

где x_1 — некоторое число, которое мы определим позже.

На указанном сегменте функция $y(x)$ может быть определена как решение задачи Коши

$$(x + x_1)(x+1)y' - (x+1)y = (x + x_1)^2, \quad y(0) = 0, \tag{2}$$

или же как решение эквивалентного ей интегрального уравнения

Вольтерра

$$(x+x_1)(x+1)\,y(x)=\int\limits_0^x(3t+x_1+2)\,y(t)\,dt+\frac{1}{3}x^3+x_1x^2+x_1^2x. \qquad (3)$$

Многочлен $y_n(x)=\sum\limits_{j=0}^{n}c_jx^j$ при каждом натуральном n будем, согласно РА-методу, искать в виде решения операторного уравнения

$$(x+x_1)(x+1)\,y_n(x)=\int\limits_0^x(3t+x_1+2)\,y_n(t)\,dt+\frac{1}{3}x^3+x_1x^2+x_1^2x-$$

$$-\tau T_{n+2}\left(\frac{x}{h}\right), \qquad (3')$$

где $T_{n+2}(\zeta)=\cos(n+2)\arccos\zeta=\sum\limits_{i=0}^{n+2}t_i\zeta^i$ и τ — некоторая неизвестная величина.

Теорема 1. *При всяком фиксированном $h\in(0,\ 1)$ и произвольном натуральном n существует единственное решение операторного уравнения* (3′), *при котором $x+x_1\neq 0$ $\forall x\in[-h,\ h]$. Коэффициент $x_1=x_1(n)$ такого решения удовлетворяет условиям*

$$1+1/Cn<x_1<1+1/n, \qquad C=(1+5h^2)/(1-h^2), \quad n=1,2,\ldots. \qquad (4)$$

Доказательство. Производя в (3′) интегрирование и приравнивая в обеих частях коэффициенты при одинаковых степенях x, получим для определения неизвестных $c_j(j=\overline{0,\,n})$, x_1 и τ систему из $n+3$ уравнений, исходя из которой коэффициенты многочлена $y_n(x)$ можно выразить через x_1 и τ при помощи первых $n+1$ уравнений. После этого решение уравнения (3′) сводится к определению параметров x_1 и τ из двух последних уравнений системы. Чтобы избежать громоздких вычислений, поступим следующим образом. Продифференцировав дважды уравнение (3′) почленно, получим

$$(x+x_1)(x+1)\,y_n'-(x+1)\,y_n=(x+x_1)^2-\tau h^{-1}T_{n+2}(xh^{-1}), \qquad (2')$$

$$(x+x_1)(x+1)\,y_n''+(x+x_1)\,y_n'-y_n=2(x+x_1)-\tau h^{-2}\,T_{n+2}(xh^{-1}). \qquad (2'')$$

Полагая в (2′) $x=-1$, найдем

$$0=(x_1-1)^2-\tau h^{-1}T_{n+2}(-h^{-1})\Rightarrow\tau=h\,(x_1-1)^2/T_{n+2}'(-h^{-1}). \qquad (5)$$

Вычитая почленно из уравнения (2′) уравнение (2″), умноженное на $x+1$, и полагая после этого $x=-x_1$, получим для определения x_1 следующее уравнение:

$$-hT_{n+2}'(-x_1h^{-1})+(1-x_1)\,T_{n+2}''(-x_1h^{-1})=0. \qquad (6)$$

Так как нули многочленов $T_{n+2}'(xh^{-1})$ (степени $n+1$) и $T_{n+2}''(xh^{-1})$ (степени n) заключены в интервале $(-h,h)\subset[-1,1]$ и перемежаются, то для комбинации этих многочленов вида левой части уравнения (6) существует по крайней мере n корней, принадлежащих этому же промежутку.

Покажем, что последний, $(n+1)$-й корень уравнения (6) находится в интервале $(1+1/Cn,\ 1+1/n)$, где $C=\mathrm{const}>1$. Для этого, учитывая представление для многочлена Чебышева $T_{n+2}(\zeta)$ степени $n+2$ (см. [2, с. 19])

$$T_{n+2}(\zeta)=\sum_{j=0}^{[(n+2)/2]}(-1)^j\,\frac{n+2}{n-j+2}\binom{n-j+2}{j}2^{n-2j+1}\zeta^{n-2j+2}, \qquad (7)$$

запишем левую часть уравнения (6) следующим образом:

$$\mathscr{D}_n^h(x_1):=-hT_{n+2}\left(-\frac{x_1}{h}\right)+(1-x_1)T''_{n+2}\left(-\frac{x_1}{h}\right)=$$

$$=-h\sum_{j=0}^{[(n+1)/2]}(-1)^j\frac{(n+2)(n-2j+2)}{n-j+2}\binom{n-j+2}{j}2^{n-2j+1}\times$$

$$\times\left(-\frac{x_1}{h}\right)^{n-2j+1}+(1-x_1)\sum_{j=0}^{[(n+1)/2]}(-1)^j\frac{(n+2)(n-2j+2)(n-2j+n)}{n-j+2}\times$$

$$\times\binom{n-j+2}{j}2^{n-2j+1}\left(-\frac{x_1}{h}\right)^{n-2j}=(-1)^{n+1}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{[(n+1)/2]}(-1)^j\frac{(n+2)(n-2j+2)}{n-j+2}\binom{n-j+2}{j}2^{n-2j+1}\left(\frac{x_1}{h}\right)^{n-2j}\times$$

$$\times[(n-2j)x_1-(n-2j+1)].$$

Полагая после этого $x_1=x_1^*=1+1/an$, где $a\geqslant 1$ — некоторый параметр, с учетом (7) и справедливого для многочленов Чебышева 2-го рода $U_n(x)$ представления (см. [2, с. 19])

$$U_n(x)=\sum_{j=0}^{[n/2]}(-1)^j\binom{n-j}{j}2^{n-2j}x^{n-2j}$$

получим:

$$\mathscr{D}_n^h(x_1^*)=(-1)^{n+1}\sum_{j=0}^{[(n+1)/2]}(-1)^j\frac{(n+2)(n-2j+2)}{n-j+2}\binom{n-j+2}{j}2^{n-2j+1}\times$$

$$\times\left(\frac{x_1^*}{h}\right)^{n-2j}\frac{[-2j-(a-1)n]}{an}=\frac{(-1)^{n+1}}{an}\times$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{[(n+1)/2]}(-1)^j\frac{(n+2)(n-2j+2)(-2j)}{n-j+2}\binom{n-j+2}{j}2^{n-2j+1}\left(\frac{x_1^*}{h}\right)^{n-2j}-\right.$$

$$\left.-(a-1)n\frac{h}{x_1^*}T'_{n+2}\left(\frac{x_1^*}{h}\right)\right]=\frac{(-1)^{n+1}}{an}\left[\sum_{j=1}^{[(n+1)/2]}(-1)^{j+1}(n+2)\times\right.$$

$$\left.\times(n-2j+2)\binom{n-j+1}{j-1}2^{n-2j+2}\left(\frac{x_1^*}{h}\right)^{n-2j}-(a-1)n\frac{h}{x_1^*}T'_{n+2}\left(\frac{x_1^*}{h}\right)\right]=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{an}\left[\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k(n+2)(n-2k)\binom{n-k}{k}2^{n-2k}\left(\frac{x_1^*}{h}\right)^{n-2k-2}-\right.$$

$$\left.-(a-1)n\frac{h}{x_1^*}T'_{n+2}\left(\frac{x_1^*}{h}\right)\right]=\frac{(-1)^{n+1}h}{anx_1^*}\left[(n+2)U'_n\left(\frac{x_1^*}{h}\right)-\right.$$

$$\left.-(a-1)nT'_{n+2}\left(\frac{x_1^*}{h}\right)\right].\tag{8}$$

Из последнего представления, учитывая, что $U'_n(x) > 0$ при $x > 1$, заключаем, что $\operatorname{sign} \mathscr{D}_n^h(1 + 1/n) = (-1)^{n+1}$ если положить в (8) $a = 1$. Если же $a > 1$, то на основании (8) и тождества (см. [2, с. 23]) $T_{n+2}(x) = [U_{n+2}(x) - U_n(x)]/2$ получим

$$\mathscr{D}_n^h(x_1^*) = \frac{(-1)^{n+1}h}{2anx_1^*}\left[(an+n+4)\,U'_n\left(\frac{x_1^*}{h}\right) - (a-1)\,nU'_{n+2}\left(\frac{x_1^*}{h}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sign} \mathscr{D}_n^h(x_1^*) = (-1)^{n+1} \operatorname{sign}\left[\frac{an+n+4}{(a-1)\,n} - \frac{U'_{n+2}(x_1^* h^{-1})}{U'_n(x_1^* h^{-1})}\right].$$

Так как из равенства

$$U_n(x) = [(x + \sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2-1})^{n+1}]/2\sqrt{x^2-1}, \quad |x| \in (1, \infty), \tag{9}$$

(см. [2, с. 14]) следует, что $U'_{n+2}(x)/U'_n(x) > x^2$ при $x > 1$, то при фиксированном $h \in (0, 1)$ положим

$$U'_{n+2}(x_1^* h^{-1})/U'_n(x_1^* h^{-1}) =: \gamma = \gamma(a, n, h) \geqslant 1/h^2 > 1. \tag{10}$$

Тогда

$$\operatorname{sign} \mathscr{D}_n^h(x_1^*) = \operatorname{sign} \mathscr{D}_n^h\left(1 + \frac{1}{an}\right) = (-1)^{n+1} \operatorname{sign}\left(\frac{a+1+4n^{-1}}{a-1} - \gamma\right) =$$

$$= (-1)^{n+1} \operatorname{sign} \frac{\gamma + 1 + 4n^{-1} - (\gamma - 1)\,a}{a-1},$$

откуда следует, что $\operatorname{sign} \mathscr{D}_n^h(1 + 1/an) = (-1)^n$, если только $\gamma + 1 + 4n^{-1} - (\gamma - 1)\,a < 0 \Leftrightarrow a > (\gamma + 1 + 4n^{-1})/(\gamma - 1)$.

Поскольку, согласно (10), $(\gamma + 1 + 4n^{-1})/(\gamma - 1) < (1 + 5h^2)/(1 - h^2) = C$, то при всяком $n \in \mathbb{N}$ существует корень x_1 уравнения (6), заключенный в интервале $(1 + 1/Cn,\ 1 + 1/n)$. Этим теорема 1 доказана.

Прежде чем перейти к следующей теореме, приведем без доказательства нужную нам оценку для интеграла от многочлена Чебышева $T_n(x)$.

Лемма. *Имеют место неравенства*

$$\left|\int_\zeta^\eta T_n\left(\frac{t}{h}\right) dt\right| \leqslant \frac{2nh}{n^2-1} \cos\frac{\pi}{2n} < \frac{2h}{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots; \quad \zeta, \eta \in [-h, h].$$

Теорема 2. *При каждом натуральном n рациональная функция $R_{n,1}(x) = y_n(x)/(x + x_1)$, где $\{x + x_1,\ x_1 \notin [-h, h];\ y_n(x)\}$ — решение уравнения (3′), обладает тем свойством, что*

$$\| \ln(1 + x) - R_{n,1}(x) \|_{C[-h,h]} \leqslant \left(\frac{1+h}{1-h}\right)^3 (1 + \alpha_n)\, E_{n,1}[\ln(1 + x)]_{C[-h,h]},$$

где $\alpha_n = \alpha_n(h) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Вычитая почленно из уравнения (3) уравнение (3′), видим, что отклонение $r_n(x) := y(x) - y_n(x)$ определяется интегральным уравнением Вольтерра

$$(x + x_1)(x + 1)\, r_n(x) = \int_0^x (3t + x_1 + 2)\, r_n(t)\, dt + \tau T_{n+2}\left(\frac{x}{h}\right).$$

Решением же этого уравнения, как легко убедиться, является функция

$$r_n(x) = \tau\left[\frac{T_{n+2}(xh^{-1})}{(x + x_1)(x + 1)} + (x + x_1)\int_0^x \frac{3t + x_1 + 2}{(t + x_1)^3 (t + 1)^2}\, T_{n+2}\left(\frac{t}{h}\right) dt\right].$$

Поэтому, полагая $r_{n,1}(x) := r_n(x)/(x + x_1) = \ln(1 + x) - y_n(x)/(x + x_1)$, получаем для отклонения $r_{n,1}(x)$ построенной рациональной функции $y_n(x)/(x+x_1)$ от функции $\ln(1+x)$ формулу

$$r_{n,1}(x)=\frac{\tau}{(x+x_1)^2(x+1)}\left[T_{n+2}\left(\frac{x}{h}\right)+\varphi_n^h(x)\right],\quad x\in[-h,h], \tag{11}$$

где

$$\varphi_n^h(x):=(x+x_1)^2(x+1)\int_0^x\frac{3t+x_1+2}{(t+x_1)^3(t+1)^2}T_{n+2}\left(\frac{t}{h}\right)dt.$$

Так как функция $z(t):=(3t+x_1+2)/(t+x_1)^3(t+1)^2$ непрерывна и монотонно убывает на сегменте $[-h,h]$, то на основании второй теоремы о среднем для интегралов и приведенной выше леммы получим:

а) при $x\in[0,h]$

$$|\varphi_n^h(x)|=\left|(x+x_1)^2(x+1)\frac{x_1+2}{x_1^3}\int_0^{\Theta_1 x}T_{n+2}\left(\frac{t}{h}\right)dt\right|<\frac{M_1(h)}{n+1},$$

где $M_1(h)=6h(1+h)^3$, $0<\Theta_1<1$;

б) при $x\in[-h,0)$

$$|\varphi_n^h(x)|=\left|(x+x_1)^2(x+1)\int_x^0\frac{3t+x_1+2}{(t+x_1)^3(t+1)^2}T_{n+2}\left(\frac{t}{h}\right)dt\right|=$$

$$=\frac{3x+x_1+2}{(x+x_1)(x+1)}\left|\int_x^{\Theta_2 x}T_{n+2}\left(\frac{t}{h}\right)dt\right|<\frac{M_2(h)}{n+1},$$

где $M_2(h)=6h/(1-h)$, $0<\Theta_2<1$.

Таким образом, при $n\geqslant M=\max\{M_1,M_2\}-1$ во всех точках сегмента $[-h,h]$ выполняется неравенство $|\varphi_n^h(x)|<1$. Но в таком случае согласно (11) отклонение $r_{n,1}(x)$ в $n+3$ точках $s_k=-h\cos[k\pi/(n+2)]\in\in[-h,h]$, $k=\overline{0,n+2}$, принимает значения с чередующимися знаками. Поэтому на основании теоремы Валле-Пуссена (см. [3, с. 63]) и формулы (11) при $n\geqslant M$ имеют место неравенства

$$E_{n,1}[\ln(1+x)]_{C[-h,h]}\geqslant\min_{0\leqslant k\leqslant n+2}|r_{n,1}(s_k)|\geqslant\frac{|\tau|(1-\alpha_n')}{(h+x_1)^2(h+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|\tau|\leqslant\frac{(h+x_1)^2(h+1)}{1-\alpha_n'}E_{n,1}[\ln(1+x)]_{C[-h,h]},$$

где $\alpha_n'=\alpha_n(h):=\|\varphi_n^h(x)\|_{C[-h,h]}\to 0$ при $n\to\infty$.

С другой стороны, на основании (11) для любых $n\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство $\|r_{n,1}(x)\|_{C[-h,h]}\leqslant|\tau|(1+\alpha_n')/(-h+x_1)^2(-h+1)$.

Из двух последних неравенств, учитывая, что $(h+x_1)^2(h+1)/(-h+x_1)^2(-h+1)<[(1+h)/(1-h)]^3$, убеждаемся в справедливости теоремы при $n\geqslant M$, а значит, и при всех $n\in\mathbb{N}$.

Следствие. *При произвольном фиксированном $h\in(0,1)$ имеют место следующие порядковые равенства:*

$$E_{n,1}[\ln(1+x)]_{C[-h,h]}\asymp\frac{1}{n^2}\frac{1}{|T_{n+2}'(-h^{-1})|}\asymp\frac{1}{n^2(n+2)}\times$$

$$\times\left(\frac{h}{1+\sqrt{1-h^2}}\right)^{n+2},\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{12}$$

Действительно, на основании теоремы $E_{n,1}[\ln(1+x)]_{C[-h,h]}\asymp\asymp\|r_{n,1}(x)\|_{C[-h,h]}$. Поэтому, учитывая равенства (11) и (5) и неравенства

(4), получим

$$E_{n,1}[\ln(1+x)]_{C[-h,h]} \asymp |\tau| = \frac{h(x_1-1)^2}{|T'_{n+2}(-h^{-1})|} \asymp \frac{h}{n^2 |T'_{n+2}(-h^{-1})|}.$$

Последнее равенство в (12) вытекает из равенств $T'_{n+2}(x) = (n+2)U_{n+1}(x)$ (см. [2, с. 13]) и (9).

Теорема 3. *При произвольном фиксированном* $h \in (0, 1)$ *имеет место соотношение*

$$E_{n,1}[\ln(1+x)]_{C[-h,h]} \asymp \frac{1}{n^2} E_{n+1}[\ln(1+x)]_{C[-h,h]}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $E_{n+1}(f)$ — *величина наилучшего равномерного приближения функции* $f(x)$ *многочленами степени не выше* $n+1$.

Доказательство. Как показано в работе [4],

$$E_{n+1}[\ln(1+x)]_{C[-h,h]} \asymp \frac{1}{|T'_{n+2}(-h^{-1})|}.$$

После этого утверждение теоремы вытекает непосредственно из следствия теоремы 2.

2. Аналогичные результаты получены для функций e^x и $(1+x)^\alpha$. Приведем их формулировки.

1. Для функции e^x на всяком конечном симметричном сегменте $[-h, h]$ при каждом натуральном $n > \sqrt{3h+1} - 2$ построены рациональные функции порядка $(n, 1)$ вида $P_n(x)/(x+x_1)$, $x_1 = x_1(n)$, при которых

$$\| e^x - P_n(x)/(x+x_1) \|_{C[-h,h]} = (1+\alpha_n) E_{n,1}(e^x)_{C[-h,h]},$$

где $\alpha_n = \alpha_n(h) \to 0$ при $n \to \infty$.

2. При всяком натуральном n рациональные функции $R_{n,1}(x)$, построенные по РА-методу для приближения функции $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, заданной на сегменте $[-h, h] \subset (-1, 1)$, обладают тем свойством, что

$$\| (1+x)^\alpha - R_{n,1}(x) \|_{C[-h,h]} \leqslant \left(\frac{1+h}{1-h}\right)^3 (1+\varepsilon_n) E_{n,1}[(1+x)^\alpha]_{C[-h,h]},$$

где $\varepsilon_n = \varepsilon_n(h, \alpha) \to 0$ при $n \to \infty$.

1. *Дзядык В. К.* А-метод и рациональная аппроксимация.— Укр. мат. журн., 1985, 37, № 2, с.
2. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.— М.: Наука, 1983.— 384 с.
3. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М.: Наука, 1965.— 407 с.
4. *Дзядык В. К.* Аппроксимационный метод приближения дифференциальных уравнений.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, 38, № 4, с. 937—967.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 10.08.84