УДК 517.986.2

О. В. Лопушанский

О преобразовании Гельфанда локально выпуклых алгебр

В настоящей работе рассмотрены некоторые вопросы представлений коммутативных локально выпуклых алгебр и их проективных тензорных произведений в виде непрерывных функций над пространствами непрерывных линейных мультипликативных функционалов. Полные локально мультипликативно выпуклые алгебры, как известно [1], изоморфны проективным пределам банаховых алгебр, и это позволяет развить теорию преобразования Гельфанда для таких алгебр, во многом аналогичную случаю банаховых алгебр. Однако ряд локально выпуклых алгебр, часто встречающихся в приложениях (сверточные алгебры обобщенных функций [2], алгебры неограниченных линейных операторов [3]) не обладают локально мультипликативно выпуклой топологией. Поэтому возникает необходимость в изучении более общих классов локально выпуклых алгебр.

1. Локально выпуклые алгебры (ЛВА) — это алгебры, представляющие собой локально выпуклые пространства (ЛВП) с раздельно непрерывной операцией умножения элементов. Различные типы ЛВА определяются в зависимости от типов ассоциированных с ними ЛВП, например алгеброй Макки называется такая ЛВА A, соответствующее ЛВП которой является пространством Макки. Топология ЛВП всегда отделимая. Алгебры рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$; предполагается наличие единицы в алгебрах, которая обозначается через e.

Остановимся на свойствах множества непрерывных линейных мультипликативных функционалов коммутативных ЛВА. Если A — некоторая ЛВА, то ее множество ненулевых непрерывных линейных мультипликативных функционалов наделяется слабой топологией $\sigma(A', A)$ топологически сопряженного векторного пространства A'. Полученное хаусдорфово топологическое пространство называется спектром ЛВА A и обозначается через $\mathrm{Sp}(A)$. Спектр всякой ЛВА есть слабо замкнутое множество ее сопряженного пространства [4, с. 274].

Сопоставим коммутативной ЛВА A алгебру $\mathbb{C}_{\mathrm{Sp}(A)}$ всех непрерывных комплексных функций на спектре $\mathrm{Sp}(A)$, наделенную топологией равномерной сходимости на равностепенно непрерывных подмножествах функционалов из $\mathrm{Sp}(A)$. Тогда отображение $g: A \to \mathbb{C}_{\mathrm{Sp}(A)}$ вида $x \to h(x)$, где $x \in A$, $h \in \mathrm{Sp}(A)$, является непрерывным гомоморфизмом алгебр. Действительно, для любого равностепенно непрерывного подмножества S, $S \subset \mathrm{Sp}(A)$, существует непрерывная на A полунорма p_s такая, что $|h(x)| \leqslant P_s(x)$ для любых $h \in S$ и $x \in A$. Гомоморфизм g представляет собой преобразование Гельфанда ЛВА A.

Алгебру непрерывных функций $\mathbb{C}_{\mathrm{Sp}(A)}$ более естественно наделять топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathrm{Sp}(A)$. Вопрос о существовании непрерывного преобразования Гельфанда ЛВА A в такую алгебру $\mathbb{C}_{\mathrm{Sp}(A)}$ решает следующее предложение.

Предложение 1. *Если A — алгебра Макки, то преобразование $g: A \to \mathbb{C}_{\mathrm{Sp}(A)}$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть K — некоторый компакт из $\mathrm{Sp}(A)$; тогда, ввиду непрерывности вложения $\mathrm{Sp}(A) \to A'$, множество K слабо компактно в пространстве A'. Поскольку A — алгебра Макки, т. е. A наделена сильнейшей локально выпуклой топологией относительно двойственности $\langle A, A' \rangle$, то, в силу теоремы Макки — Аренса [5, с. 166], K — равностепенно непрерывное множество функционалов над A. Следовательно, существует непрерывная полунорма p_K на A такая, что $|h(x)| \leqslant p_K(x)$ для всех $h \in K$ и $x \in A$, т. е. отображение g непрерывно.

2. Пусть G — группа обратимых элементов ЛВА A, тогда операция обращения элементов алгебры представляет собой отображение $x \to x^{-1}$ из G на G. Пусть $x \in A$ и множество $\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \in G\}$ непусто;

тогда на $\rho(x)$ определена функция $x_\lambda = (x - \lambda e)^{-1}$, называемая резольвентой элемента x. Множество $\sigma(x) = C \setminus \rho(x)$ называется спектром элемента $x \in A$. Говорят, что A — поле, если $A \setminus \{0\} = G$; в этом случае множество $\rho(x)$ непусто.

Рассмотрим вопрос описания замкнутых максимальных идеалов коммутативной ЛВА A при помощи функционалов ее спектра.

Предложение 2. *Пусть A — коммутативная ЛВА, в которой операция обращения элементов непрерывна относительно слабой топологии $\sigma(A, A')$; тогда всякому замкнутому максимальному идеалу M из A соответствует единственный функционал $h \in \mathrm{Sp}(A)$ такой, что $M = \mathrm{Ker}\, h$.*

Доказательство. Наделим алгебру A топологией $\sigma(A, A')$; тогда A — ЛВА и ее спектр совпадает со спектром $\mathrm{Sp}(A)$ исходной ЛВА, а идеал M слабо замкнут. Это непосредственно следует из согласованности топологии $\sigma(A, A')$ с двойственностью $\langle A, A' \rangle$ [5, с. 166].

Образуем фактор-алгебру A/M и класс вычетов произвольного элемента $x \in A$ обозначим через $\dot{x}$, т. е. $\dot{x} = x + M$. Элемент $\dot{x}$ обратим в A/M тогда и только тогда, когда обратим в A по крайней мере один его представитель и $\rho(\dot{x}) = \bigcup\limits_{y \in \dot{x}} \rho(y)$. Поскольку идеал M максимален, то A/M — поле [6, с. 297]. Поэтому сужение на группу G фактор-гомоморфизма $\pi: A \to A/M$ осуществляет сюръективное отображение вида $\pi: G \to A/M \setminus \{0\} = \dot{G}$. Образуем на $\dot{G}$ сильнейшую топологию τ, относительно которой отображение $\pi: G \to \dot{G}$ непрерывно; тогда τ сильнее фактор-топологии на A/M. Фактор-топология на A/M эквивалентна слабой топологии $\sigma(A/M, M^o)$ относительно двойственности $\langle A/M, M^o \rangle$, где M^o — поляра в A' идеала M [5, с. 171]. Поэтому τ сильнее $\sigma(A/M, M^o)$ на $\dot{G}$. Из непрерывности обращения в A следует, что отображение $\dot{x} \to \dot{x}^{-1}$ непрерывно на $\dot{G}$ из τ в $\sigma(A/M, M^o)$. Если $x \in A$ и y — представитель класса $\dot{x} \in A/M$, то функции $\lambda \to y - \lambda e$ непрерывны на $\rho(y)$ в G. Так как $\rho(\dot{x}) = \bigcup\limits_{y \in \dot{x}} \rho(y)$, то функция $\lambda \to \dot{x} - \lambda \dot{e}$ непрерывна на $\rho(\dot{x})$ в топологии τ и, следовательно, резольвента $\dot{x}_\lambda$ непрерывна на $\rho(\dot{x})$ в топологии $\sigma(A/M, M^o)$. Из тождества $\dot{x}_\lambda - \dot{x}_\mu = (\mu - \lambda)\dot{x}_\lambda \dot{x}_\mu$, где $\lambda, \mu \in \rho(\dot{x})$, следует существование слабой производной $\lim\limits_{\mu \to \lambda} (\lambda - \mu)^{-1} (\dot{x}_\lambda - \dot{x}_\mu) = -\dot{x}_\lambda^2$. Поэтому в каждой внутренней точке из $\rho(\dot{x})$ резольвента $\dot{x}_\lambda$ слабо голоморфна [5, с. 254].

Допустим, что множество $\rho(\dot{x})$ совпадает с $\mathbb{C}$, и убедимся в равномерной ограниченности резольвенты $\dot{x}_\lambda$ на $\mathbb{C}$ в топологии $\sigma(A/M, M^o)$. Функция $(\mu\dot{x} - \dot{e})^{-1} = \lambda \dot{x}_\mu$ от $\mu = \lambda^{-1}$ определена на $\mathbb{C}$. Повторяя в применении к $(\mu\dot{x} - \dot{e})^{-1}$ рассуждения о непрерывности резольвенты $\dot{x}_\lambda$, приходим к пределу $\lim\limits_{\mu \to 0} (\mu\dot{x} - \dot{e})^{-1} = -\dot{e}$ в топологии $\sigma(A/M, M^o)$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $f \in M^o$ существует число $\alpha > 0$ такое, что $|f[(\mu\dot{x} - \dot{e})^{-1}]| - |f(\dot{e})| \leqslant \leqslant |f[(\mu\dot{x} - \dot{e})^{-1} - (-\dot{e})]| \leqslant \varepsilon$ для всякого μ, $|\mu| < \alpha$. Отсюда $|f(\dot{x}_\lambda)| \leqslant \leqslant \alpha(|f(\dot{e})| + \varepsilon)$ при $|\mu| < \alpha$. С другой стороны, функция $\lambda \to f(\dot{x}_\lambda)$ непрерывна на $\mathbb{C}$, поэтому образ $\{f(\dot{x}_\lambda) : |\mu| \geqslant \alpha\}$ компактного множества $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mu| \geqslant \alpha\}$ компактен. Итак, для всякого $f \in M^o$ функция $f(\dot{x}_\lambda)$ равномерно ограничена на $\mathbb{C}$, т. е. резольвента $\dot{x}_\lambda$ равномерно слабо ограничена на $\mathbb{C}$. Применим к функции $\dot{x}_\lambda$ соответствующий аналог теоремы Лиувилля [6, с. 98]. Получаем, что значения резольвенты $\dot{x}_\lambda$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ равны одному и тому же элементу из A/M; обозначим его через $\dot{u}$. Тогда $(\dot{x} - \lambda\dot{e})\dot{u} = 0$, в частности $\dot{x}\dot{u} = 0$ при $\lambda = 0$. Отсюда $\lambda\dot{u} = 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$; следовательно, $\dot{u} = 0$. Последнее невозможно ввиду равенства $\dot{x}\dot{u} = \dot{e}$. Итак, множество $\rho(\dot{x})$ не совпадает с $\mathbb{C}$. Известными рассуждениями [7, с. 208] приходим к заключению, что всякий элемент $\dot{x} \in A/M$ имеет вид $\dot{x} = \lambda\dot{e}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда соответствие $\varphi : \lambda\dot{e} \to \lambda$ осуществляет изоморфизм поля A/M на $\mathbb{C}$. Искомый гомоморфизм из $\mathrm{Sp}(A)$ имеет вид $h = \varphi\pi$ и определяется идеалом $M = \mathrm{Ker}\, h$ однозначно. Доказательство окончено.

Одновременно доказан следующий аналог теоремы Гельфанда — Мазура.

Предложение 3. *Если ЛВА A — поле и операция обращения в A слабо секвенциально непрерывна, то A изоморфно полю $\mathbb{C}$.*

Следствие. *Пусть A — ЛВА со слабо непрерывным обращением элементов; тогда спектр $\sigma(x)$ произвольного элемента $x \in A$ не пуст.*

3. Остановимся на преобразовании Гельфанда проективных тензорных произведений ЛВА, являющихся полными ЛВП. Проективным тензорным произведением ЛВА A и B называется, как обычно, тензорное произведение алгебр $A \otimes B$ с умножением вида $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy'$ ($x, x' \in A$ и $y, y' \in B$), наделенное сильнейшей локально выпуклой топологией, относительно которой каноническое отображение $A \times B \to A \otimes B$ непрерывно. Пополнение ЛВП $A \otimes B$ обозначается через $A \hat{\otimes} B$. Достаточным условием того, что пополнение $A \hat{\otimes} B$ — алгебра, является совместная непрерывность операции умножения ЛВА A и B. Действительно, если $\{p\}$ — семейство полунорм, определяющее топологию A, $\{q\}$ — такое же семейство на B, то проективная топология на $A \otimes B$ определяется полунормами вида $\{p \otimes q\}$, где $p \otimes q(u) = \inf \Sigma p(x_n)\, q(y_n)$ (inf по всем представлениям $\Sigma x_n \otimes y_n$ элемента $u \in A \otimes B$). Свойство совместной непрерывности умножения на A эквивалентно существованию для каждой непрерывной полунормы p такой непрерывной полунормы p', чтобы выполнялось неравенство $p(xy) \leqslant p'(x)\, p'(y)$ $\forall x, y \in A$. Аналогично на B: для всякой полунормы q существует полунорма q' такая, что $q(x'y') \leqslant q'(x')\, q'(y')$, где $x', y' \in B$. Отсюда следует неравенство $p \otimes q(uv) \leqslant p' \otimes q'(u)\, p' \otimes q'(v)$ $\forall\, u, v \in A \otimes B$, т. е. умножение в $A \otimes B$ совместно непрерывно. Тогда умножение в $A \hat{\otimes} B$ может быть определено путем предельного перехода, и $A \hat{\otimes} B$ — ЛВА. Следует заметить, что для метризуемых ЛВА A и B со свойством Бэра, в частности для алгебр Фреше, свойство совместной непрерывности операции умножения выполняется автоматически [5, с. 113]. В общем случае будем предполагать в ЛВА совместную непрерывность умножения.

Спектр пополнения $A \hat{\otimes} B$ проективного тензорного произведения полных коммутативных ЛВА A и B может быть выражен через спектры алгебр сомножителей аналогично случаю банаховых алгебр.

Предложение 4. *Пусть A и B — полные коммутативные ЛВА; тогда имеет место гомеоморфизм вида* $\mathrm{Sp}(A \hat{\otimes} B) = \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)$.

Доказательство. Алгебры A и B изоморфны подалгебрам $A \otimes e_B$ и $e_A \otimes B$ соответственно (e_A — единица A, e_B — единица B), поэтому спектры алгебр A и $A \otimes e_B$, а также B и $e_A \otimes B$, можно не различать. Пусть $r \in \mathrm{Sp}(A \hat{\otimes} B)$ и через h и g обозначены сужения функционала r соответственно на $A \otimes e_B$ и $e_A \otimes B$; тогда $h \in \mathrm{Sp}(A)$, $g \in \mathrm{Sp}(B)$. Пусть $\Sigma x_n \otimes y_n = u \in A \otimes B$, тогда $r(u) = \Sigma h(x_n \otimes e_B)\, g(e_A \otimes y_n) = h \otimes g(u)$ и функционалы r и $h \otimes g$ совпадают на $A \otimes B$. Переходя к пополнению, приходим к равенству $r = h \otimes g$ на $A \hat{\otimes} B$ и $h \otimes g \in \mathrm{Sp}(A \hat{\otimes} B)$. С другой стороны, для любых $h \in \mathrm{Sp}(A)$ и $g \in \mathrm{Sp}(B)$ очевидно $h \otimes g \in \mathrm{Sp}(A \hat{\otimes} B)$, и, значит, $\mathrm{Sp}(A \hat{\otimes} B) = \{h \otimes g : h \in \mathrm{Sp}(A),\ g \in \mathrm{Sp}(B)\}$.

Наделим сопряженные пространства A' и B' их слабыми топологиями и образуем тензорное произведение $A' \otimes B'$. Тогда произведение $\mathrm{Sp}(A) \times \times \mathrm{Sp}(B) = \{(h, g) : h \in \mathrm{Sp}(A),\ g \in \mathrm{Sp}(B)\}$ биективно соответствует спектру $\mathrm{Sp}(A \hat{\otimes} B)$ и топология произведения на $\mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)$ эквивалентна слабой топологии на $A' \otimes B'$ относительно двойственности $\langle A \otimes B,\ A' \otimes B' \rangle$. Так как $A \otimes B \subset A \hat{\otimes} B$, то слабая топология сопряженного пространства $(A \hat{\otimes} B)'$ индуцирует на $\mathrm{Sp}(A) \otimes \mathrm{Sp}(B)$ более сильную топологию, чем топология произведения, т. е. отображение $\mathrm{Sp}(A \hat{\otimes} B) \to \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)$ непрерывно.

Пусть $\{V\}$ и $\{W\}$ — базы окрестностей нуля ЛВА A и B соответственно, $\{V^\circ\}$ и $\{W^\circ\}$ — их поляры в A' и B'. Обозначим через $\mathscr{L}(B', A)$ векторное пространство всех линейных непрерывных отображений из B' в A и определим на $\mathscr{L}(B', A)$ топологию равномерной сходимости на множествах $\{W^0\}$; базис этой топологии состоит из окрестностей вида $V_W = \{\varphi \in \mathscr{L}(B', A) : \varphi(W^0) \subset V\}$. Каждый элемент $u = \Sigma x_n \otimes y_n \in A \otimes B$ определяет оператор из $\mathscr{L}(B', A)$ вида $u : g \to \Sigma g(y_n) x_n$, где $g \in B'$. Выпуклые уравновешенные оболочки множеств $V \otimes W$ образуют базис окрестностей на $A \hat{\otimes} B$ и $V \otimes W \subset V_W$, поэтому вложение $A \otimes B \subset \mathscr{L}(B', A)$ непрерывно. Следовательно, $A \hat{\otimes} B \subset \mathscr{L}(B', A)$ и любой элемент $u \in A \hat{\otimes} B$ порождает оператор из $\mathscr{L}(B', A)$ вида $u : g \to g(u)$. Итак, отображение $h \to h \otimes g(u) = h[g(u)]$, где $h \in A'$, непрерывно на компактах V^0 из A', причем $g(u) \in A$. Из теоремы Гротендика [5, с. 189] следует, что полнота ЛВА A влечет непрерывность отображения $h \to h \otimes g(u)$ на всем пространстве A' при любом $u \in A \hat{\otimes} B$. Аналогично устанавливается непрерывность отображения $g \to h \otimes g(u)$ на пространстве B' при любом $u \in A \hat{\otimes} B$. Таким образом, доказано, что топология на $\mathrm{Sp}(A \hat{\otimes} B)$ слабее сильнейшей топологии, относительно которой непрерывны отображения $h \to h \otimes g$ и $g \to h \otimes g$. Последняя же эквивалентна топологии произведения [5, с. 32], и отображение $\mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B) \to \mathrm{Sp}(A \hat{\otimes} B)$ непрерывно. Сопоставляя полученные утверждения, приходим к искомому гомеоморфизму.

Следствие. *Пусть A и B — коммутативные алгебры Макки; тогда преобразование Гельфанда ЛВА $A \hat{\otimes} B$ осуществляет непрерывный гомоморфизм $A \hat{\otimes} B$ в алгебру $\mathbb{C}_{\mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)}$- непрерывных комплексных функций двух переменных, наделенную топологией равномерной сходимости на компактах топологического произведения* $\mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)$.

1. *Michael E. A.* Locally multiplicatively-convex topological algebras.— Mem. Amer. Math. Soc., 1952, **11**, p. 1—79.
2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.— М. : Наука, 1979.— 318 с.
3. *Inoue A.* Topologies on unbounded operator algebras.— Mem. Fac. Sci. Kyusku. Univ. Ser. A., 1979, 33, N 2, p. 355—375.
4. *Page W.* Topological uniform structures.— N. Y. : Wiley-Sons, 1978.— 398 p.
5. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971.— 359 с.
6. *Рудин Ф.* Функциональный анализ.— М. : Мир, 1975.— 443 с.
7. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.— М. : Наука, 1968.— 664 с.

Ин-т прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР, г. Львов
Поступила 01.08.83