УДК 517.948

Р. Я. Якимів (Нац. аграр. ун-т, Київ)

ПРО ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ РІТЦА ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We obtain direct and inverse theorems on the approximation of solutions of self-adjoint boundary-value problems for the Sturm – Liouville equation on a finite interval by the Ritz method.

Отримано прямі та обернені теореми апроксимації методом Рітца розв'язків самоспряжених крайових задач для рівняння Штурма – Ліувілля на скінченному інтервалі.

1. Постановка задачі. Формулювання основних результатів. Розглянемо граничну задачу

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) = f(x), \tag{1}$$

$$u'(0) = u'(\pi) = 0, \tag{2}$$

де $f \in L_2(0, \pi)$, функція $q(x) > 0$ неперервна на $[0, \pi]$, а функція $p(x) > 0$ неперервно диференційовна на цьому ж інтервалі.

Основною метою роботи є отримання похибки наближеного розв'язку задачі (1), (2), побудованого за методом Рітца.

Згідно з принципом Діріхле задача знаходження розв'язку рівняння (1) зводиться до знаходження мінімуму функціонала

$$F(u) = \int_0^\pi \left(p(x)\left|\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right| + q(x)\left|u^2(x)\right|\right)dx - 2\,\mathrm{Re}\int_0^\pi f(x)\overline{u(x)}\,dx \tag{3}$$

на класі функцій $u(x) \in W_2^1(0, \pi)$, для яких перші похідні на кінцях інтервалу перетворюються в нуль. Його наближення u_n, згідно з методом Рітца, будемо шукати у вигляді

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

де $\varphi_k(x) = \sqrt{2/\pi}\cos kx$, $k \in N$, а коефіцієнти a_i визначаються з умови, що $F(u_n) = \min F(\nu)$, $\nu \in H_n$, де H_n — лінійна оболонка елементів $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

В подальшому будемо позначати через $C^n([0, \pi])$ множину n разів неперервно диференційовних на $[0, \pi]$ функцій, а $W_2^n([0, \pi])$ — соболевські простори, які визначаються [1], як поповнення $C^n([0, \pi])$ за нормою

$$\|u\|_{W_2^n([0,\pi])} = \|u^{(n)}\|_{L_2((0,\pi))}\,.$$

Основні результати роботи сформульовані в наступних твердженнях.

Теорема 1. *Нехай* $q(x) \in C^{2m-2}[0, \pi]$ *і* $q^{(2k-3)}(0) = q^{(2k-3)}(\pi) = 0$, $k = \overline{2, m}$, $p(x) \in C^{2m-1}[0, \pi]$ *і* $p^{(2k-3)}(0) = p^{(2k-3)}(\pi) = 0$, $k = \overline{2, m}$, $f(x) \in W_2^{2m-2}[0, \pi]$ *і* $f^{(2k-3)}(0) = f^{(2k-3)}(\pi) = 0$, $k = \overline{2, m}$, *тоді*

$$\|u_n - u\|_{L_2(0,\pi)} = o\left(\frac{1}{(n+1)^{2m}}\right) \qquad \forall m \geq 2, \tag{4}$$

$$\| u_n - u \|_{W_2^1[0,\pi]} = o\left(\frac{1}{(n+1)^{2m-1}}\right) \quad \forall m \geq 2, \tag{5}$$

де u_n *— наближений розв'язок задачі* (1), (2), *побудований методом Рітца за системою функцій* $\varphi_k(x) = \sqrt{2/\pi}\cos kx$, $k \in N$.

У випадку нескінченної диференційовності коефіцієнтів рівняння (1) справедливе таке твердження.

Наслідок. *Нехай* $p(x), q(x) \in C^\infty[0,\pi]$ *і* $q^{(2k-1)}(x) = p^{(2k-1)}(x) = 0$ *для кожного* $x \in T = \{0, \pi\}$, $k = 1, 2, \ldots$. *Тоді умови*

$$f(x) \in C^\infty[0,\pi], \quad f^{(2k-1)}(0) = f^{(2k-1)}(\pi) = 0, \ k = 0, 1, \ldots,$$

еквівалентні співвідношенню

$$\| u_n - u \|_{W_2^1[0,\pi]} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \forall \alpha > 0,$$

де u_n *задовольняє умови теореми* 1.

У разі аналітичності коефіцієнтів справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови наслідку і додатково* $q(x), p(x)$ *аналітичні на* $[0,\pi]$. *Тоді умови:* $f(x)$ *— аналітична на* $[0,\pi]$, $f^{(2k-1)}(0) = f^{(2k-1)}(\pi) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, *еквівалентні співвідношенню*

$$\exists \alpha > 0 : e^{\alpha n} \| u - u_n \|_{W_2^1[0,\pi]} \to 0, \quad n \to \infty,$$

при цьому $u(x)$ *аналітична на* $[0,\pi]$.

Якщо ж $q(x)$, $p(x)$ *— цілі функції, то для виконання оцінки*

$$\forall \alpha > 0 : e^{\alpha n} \| u - u_n \|_{W_2^1[0,\pi]} \to 0, \quad n \to \infty,$$

необхідно і достатньо, щоб $f(x)$ *була цілою і задовольняла ті ж граничні умови, при цьому* $u(x)$ *— ціла на* $[0,\pi]$, u_n *задовольняє умови теореми* 1.

Зауважимо, що з оцінки (5) випливає

$$\| u_n - u \|_{C(0,\pi)} = o\left(\frac{1}{(n+1)^{2m-1}}\right) \quad \forall m \geq 2. \tag{6}$$

Відмітимо, що оцінку (6) при $m = 1$ було отримано раніше в [2, 3] (детальніше див. огляд [4]). При $m \geq 2$ оцінку (6) отримано вперше. При цьому самої гладкості функцій $q(x)$, $p(x)$, $f(x)$ для отримання оцінки замало, потрібно щоб $q(x)$, $p(x)$, $f(x)$ задовольняли крайові умови, вказані в формулюванні теореми 1.

2. Доведення основних результатів. Нехай тепер

$$D(A) = \left\{ u(x) : u(x) \in W_2^2[0,\pi] : u'(0) = u'(\pi) = 0 \right\},$$

а оператор

$$Au = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u, \quad u \in D(A). \tag{7}$$

Далі на $D(B) = D(A)$ введемо оператор

$$Bu = -\frac{d^2u}{dx^2} + u. \tag{8}$$

Відомо, що A і B — додатно визначені самоспряжені оператори в $L_2(0,\pi)$ з дискретним спектром [5]. Власні значення оператора B — $\lambda_n(B) = n^2 + 1$, $\sqrt{2/\pi}\cos nx$ — відповідний ортонормований базис власних функцій оператора B.

Тоді задачу (1), (2) можна записати у вигляді

$$Au = f. \tag{9}$$

Для доведення результатів потрібна буде наступна лема.

Лема. *Нехай* $q(x) \in C^{2n-2}[0,\pi]$ *і* $p(x) \in C^{2n-1}[0,\pi]$. *Для того щоб* $D(A^n) = D(B^n)$ *при кожному* $n \geq 2$, *необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:*

1) $q^{(2k-3)}(0) = q^{(2k-3)}(\pi) = 0 \quad \forall k = \overline{2,n};$

2) $p^{(2k-3)}(0) = p^{(2k-3)}(\pi) = 0 \quad \forall k = \overline{2,n}.$

Доведення. *Достатність.* 1. Покажемо справедливість твердження у випадку $n = 2$, тобто якщо $q'(0) = q'(\pi) = 0$ і $p'(0) = p'(\pi) = 0$, то $D(A^2) = D(B^2)$. Розглянемо

$$D(B^2) = \left\{u(x) \colon u(x) \in W_2^4[0,\pi] \colon u'(0) = u'(\pi) = 0,\ u'''(0) = u'''(\pi) = 0\right\},$$

$$D(A^2) = \{u(x) \colon u(x) \in D(A) \colon Au \in D(A)\} = \Big\{u(x) \colon u(x) \in W_2^4[0,\pi] \colon u'(0) = u'(\pi) = 0,$$

$$\left(-p(x)u''(x) - p'(x)u'(x) + q(x)u(x)\right)' = 0\ \ \forall x \in T = \{0,\pi\}\Big\}. \tag{10}$$

Розписавши рівність (10) і врахувавши, що $u'(x) = 0$ та $p'(x) = q'(x) = 0$ $\forall x \in T$, будемо мати, що $p(x)u'''(x) = 0$. Оскільки $p(x) \geq p_0 > 0$, то $u'''(0) = u'''(\pi) = 0$. Отже, $D(A^2) = D(B^2)$.

2. Припустимо, що якщо $q^{(2k-3)}(0) = q^{(2k-3)}(\pi) = 0 \quad \forall k = \overline{2,n}$ і $p^{(2k-3)}(0) = p^{(2k-3)}(\pi) = 0 \quad \forall k = \overline{2,n}$, то $D(A^n) = D(B^n)$. Покажемо, що при виконанні умов

$$q^{(2n-1)}(0) = q^{(2n-1)}(\pi) = 0, \quad p^{(2n-1)}(0) = p^{(2n-1)}(\pi) = 0 \tag{11}$$

будемо мати $D(A^{n+1}) = D(B^{n+1})$, де

$$D(B^{n+1}) = \left\{u(x) \colon u(x) \in W_2^{2n+2}[0,\pi] \colon u^{(2k-1)}(0) = u^{(2k-1)}(\pi) = 0,\ k = \overline{1,n+1}\right\},$$

$$D(A^{n+1}) = \Big\{u(x) \colon u(x) \in W_2^{2n+2}[0,\pi] \colon u^{(2k-1)}(0) = u^{(2k-1)}(\pi) = 0,\ k = \overline{1,n},$$

$$\left(-p(x)u''(x) - p'(x)u'(x) + q(x)u(x)\right)^{(2n-1)} = 0\ \ \forall x \in T\Big\}. \tag{12}$$

Оскільки $D(A^n) = D(B^n)$, то з (12) можна отримати

$$-p(x)u^{(2n+1)}(x) - (2n-3)p^{(2n-1)}(x)u''(x) + q^{(2n-1)}(x)u(x) = 0, \tag{13}$$

звідки, враховуючи (11), отримуємо

$$u^{(2n+1)}(0) = u^{(2n+1)}(\pi) = 0.$$

Отже, $D(A^{n+1}) = D(B^{n+1})$.

Необхідність. 1. Нехай $D(A^2) = D(B^2)$. Тоді, порівнюючи рівності (10), маємо $-2p'(x)u''(x) + q'(x)u(x) = 0 \quad \forall x \in T$. Підставимо у цю рівність функцію $\varphi_k(x) = \cos kx \in D(B)$, яка задовольняє граничні умови. Будемо мати

$$2k^2 p'(x)\cos kx + q'(x)\cos kx = 0.$$

Якщо $x \in T$, тоді при $k = 1: 2p'(x) + q'(x) = 0$, а при $k = 2: 8p'(x) + q'(x) = 0$. Звідси випливає, що $p'(x) = q'(x) = 0 \quad \forall x \in T$.

2. Нехай тепер з того, що $D(A^n) = D(B^n)$ для деякого n, випливає

$$p^{(2k-3)}(x) = q^{(2k-3)}(x) = 0 \qquad \forall x \in T, \quad k = \overline{1, n}. \tag{14}$$

Покажемо тепер, що якщо виконується рівність $D(A^{n+1}) = D(B^{n+1})$, то

$$p^{(2n-1)}(x) = q^{(2n-1)}(x) = 0 \qquad \forall x \in T.$$

Дійсно, враховуючи (14), з рівності (12) отримуємо

$$-(2n-3)p^{(2n-1)}(x)u''(x) + q^{(2n-1)}(x)u(x) = 0 \qquad \forall x \in T. \tag{15}$$

Підставивши у цю рівність замість $u(x)$ функцію $\varphi_k(x) = \cos kx$, будемо мати

$$(2n-3)k^2 p^{(2n-1)}(x)\cos kx + q^{(2n-1)}(x)\cos kx = 0.$$

Якщо $x \in T$, то при $k = 1: (2n-3)p^{(2n-1)}(x) + q^{(2n-1)}(x) = 0$, а при $k = 2:$ $4(2n-3)p^{(2n-1)}(x) + q^{(2n-1)}(x) = 0$.

Визначник системи цих рівнянь відмінний від нуля, отже, система має тільки тривіальний розв'язок, тобто $p^{(2n-1)}(x) = q^{(2n-1)}(x) = 0 \quad \forall x \in T$.

Отже, необхідність доведено.

Далі, для довільного замкненого лінійного оператора A в сепарабельному гільбертовому просторі H з щільною областю визначення $D(A)$ введемо простори

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n \in N_0} D(A^n), \qquad N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

При $\beta > 1$ позначимо

$$C_{\{n^{n\beta}\}}(A) = \left\{ f \in C^\infty(A) \,\middle|\, \exists \alpha > 0, \exists c > 0 : \left\| A^k f \right\| \le c\alpha^k n^{n\beta}, k \in N_0 \right\},$$

$$C_{(n^{n\beta})}(A) = \left\{ f \in C^\infty(A) \,\middle|\, \forall \alpha > 0, \exists c = c(\alpha) > 0 : \left\| A^k f \right\| \le c\alpha^k n^{n\beta}, k \in N_0 \right\}.$$

У нашому випадку, якщо $H = L_2(0, \pi)$, B — введений за формулою (8) оператор диференціювання, то $C^\infty(B)$ — множина $C^\infty[0, \pi]$ звичайних нескінченно диференційовних на $[0, \pi]$ функцій, для яких усі непарні похідні на кінцях відрізка перетворюються на нуль; $C_{\{n^{n\beta}\}}(B)$, $C_{(n^{n\beta})}(B)$ збігаються з просторами всіх аналітичних на $[0, \pi]$ і відповідно цілих функцій, для яких всі непарні похідні на кінцях відрізка перетворюються в нуль.

Тоді, як показано в [6], має місце таке твердження.

Твердження. *Нехай A і B — додатно визначені самоспряжені оператори в H, оператор B споріднений з A $(D(B) = D(A))$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормований базис власних векторів оператора B. Тоді:*

1) *для кожного* $u \in D(B^k) \Rightarrow \|Au_n - f\| \le c\lambda_{n+1}^{-(n-1)}(B)\left\|Q_n^{\perp}B^k u\right\|$;

2) $u \in C^{\infty}(B) \Leftrightarrow \|Au_n - f\| = o\left(\lambda_n^{-k}(B)\right) \quad \forall k \in N$;

3) $u \in C_{\{n^{n\beta}\}}(B) \Leftrightarrow \exists\alpha > 0, \exists c > 0 : \|Au_n - f\| \le c\exp\left(-\alpha\lambda_n^{1/\beta}\right) \quad \forall k \in N$;

4) $C_{(n^{n\beta})}(B) \Leftrightarrow \forall\alpha > 0, \exists c = c(\alpha) > 0 : \|Au_n - f\| \le c\exp\left(-\alpha\lambda_n^{1/\beta}\right) \quad \forall k \in N$,

де $\lambda_n(B)$ — *власні числа оператора* B, u_n — *наближений розв'язок рівняння* $Au = f$, *побудований методом Рітца за системою функцій* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Із реалізації твердження для операторів A і B, визначених за формулами (7) і (8), застосування леми та справедливості оцінок

$$\|u_n - u\|_{L_2(0,\pi)}^2 \le \frac{c}{\lambda_n}\|u_n - u\|_{W_2^1[0,\pi]}^2 \le \frac{c}{\lambda_n^2}\|Au_n - f\|_{L_2(0,\pi)}^2,$$

де c — константа, випливає доведення результатів теорем 1 та 2 і наслідку.

Аналогічні результати можна сформулювати у випадку, коли на рівняння (1) накладаються інші самоспряжені граничні умови, наприклад $u(0) = u(\pi) = 0$.

1. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
2. *Крилов М. М.* Основні проблеми математичної фізики і техніки. Наукові досліди з прикладної математики. – Київ: Держтехвидав УРСР, 1932. – 251 с.
3. *Джишкариани А. В.* О быстроте сходимости метода Бубнова–Галеркина // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1964. – **4**, № 2. – С. 343–348.
4. *Лучка А. Ю., Лучка Т. Ф.* Возникновение и развитие прямых методов математической физики. – Киев: Наук. думка, 1985. – 239 с.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Физматгиз, 1969. – 526 с.
6. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Операторный подход к задачам аппроксимации // Алгебра и анализ. – 1997. – **9**, вып. 6. – С. 90–108.

Одержано 15.02.2000