УДК 517.43

М. Н. Феллер (УкрНИИМОД, Киев)

ЗАМЕТКИ О БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

We present a method of the solution of the Cauchy problem for three wide classes of nonlinear parabolic equations

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f\left(\Delta_L U(t,x)\right), \quad \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f\left(t, \Delta_L U(t,x)\right),$$

and

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f\left(U(t,x), \Delta_L U(t,x)\right)$$

with infinite-dimensional Laplacian Δ_L.

Наведено метод розв'язання задачі Коші для трьох широких класів нелінійних параболічних рівнянь

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f\left(\Delta_L U(t,x)\right), \quad \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f\left(t, \Delta_L U(t,x)\right)$$

та

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f\left(U(t,x), \Delta_L U(t,x)\right)$$

із нескінченновимірним лапласіаном Δ_L.

В течение всего XX столетия теория линейных уравнений с бесконечномерными лапласианами (лапласианами Леви [1]) привлекает внимание многих математиков. Она стимулирована как интереснейшими свойствами лапласиана Леви (часто не имеющими конечномерных аналогов), так и важнейшими приложениями (например, уравнения Янга – Миллса и Лапласа – Леви равноценны [2]).

В то же время формирование теории квазилинейных и нелинейных уравнений с лапласианами Леви только начинается: они встречаются лишь у П. Леви (задача Дирихле) [1], Г. Е. Шилова (задача Дирихле, смешанная задача) [3], автора (задачи Дирихле и Рикьера) [4 – 6]; квазилинейные уравнения встречаются у В. Б. Соколовского [7].

Настоящая статья посвящена решению задачи Коши для нелинейных параболических уравнений с лапласианами Леви. Рассматриваются три класса нелинейных уравнений

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f\left(\Delta_L U(t,x)\right) \qquad \left(f(\zeta) \text{ — функция на } R^1\right),$$

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f\left(t, \Delta_L U(t,x)\right) \qquad \left(f(t,\zeta) \text{ — функция на } [0,T]\times R^1\right),$$

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f\left(U(t,x), \Delta_L U(t,x)\right) \qquad \left(f(\xi,\zeta) \text{ — функция на } R^2\right).$$

Решения задачи Коши для нелинейных уравнений приведены в функциональных классах, для которых существует решение задачи Коши для „уравнения теплопроводности"

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \Delta_L V(t,x).$$

Это обусловлено тем, что во многих работах для линейных уравнений с лапласианами Леви получены решения задачи Коши в разных функциональных классах (см. библиографию в [8]).

1. Предварительные сведения. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H, $x \in \in H$.

Лапласиан для функций на гильбертовом пространстве определил П. Леви [1]. Если функция $F(x)$ дважды сильно дифференцируема в точке x_0, то лапласиан Леви определяется (если он существует) формулой

$$\Delta_L F(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(F''(x_0) f_k, f_k\right)_H, \tag{1}$$

где $F''(x)$ — гессиан функции $F(x)$, $\{f_k\}_1^\infty$ — выбранный ортонормированный базис в H (см., например, [8]).

Приведем свойство лапласиана Леви, полученное в [1], которое понадобится в дальнейшем. Пусть функция

$$F(x) = f(U_1(x), \ldots, U_m(x)),$$

где $f(u_1, \ldots, u_m)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция m переменных в области значений $\{U_1(x), \ldots, U_m(x)\}$ в R^m, $U_j(x)$ — дважды сильно дифференцируемые функции и $\Delta_L U_j(x)$ — существуют, $j = 1, \ldots, m$. Тогда $\Delta_L F(x)$ существует и

$$\Delta_L F(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j}\Big|_{u_j = U_j(x)} \Delta_L U_j(x). \tag{2}$$

Действительно, второй дифференциал функции $F(x)$ в точке x при приращении $h \in H$

$$d^2 F(x,h) = (F''(x)h, h)_H =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\Big|_{u_l = U_l(x)} (U_i'(x), h)_H \, (U_j'(x), h)_H + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j}\Big|_{u_j = U_j(x)} (U_j''(x)h, h)_H .$$

Согласно формуле (1)

$$\Delta_L F(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\Big|_{u_l = U_l(x)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (U_i'(x), f_k)_H (U_j'(x), f_k)_H +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j}\Big|_{u_j = U_j(x)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(U_j''(x) f_k, f_k\right)_H .$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (U_i'(x), f_k)_H (U_j'(x), f_k)_H = 0$$

(так как $(U_l'(x), f_k)_H \to 0$ при $k \to \infty$), а

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(U_j''(x) f_k, f_k\right)_H = \Delta_L U_j(x),$$

то

$$\Delta_L F(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j}\Big|_{u_j = U_j(x)} \Delta_L U_j(x).$$

2. Задача Коши для уравнений $\partial U(t,x)/dt = f(\Delta_L U(t,x))$ и $\partial U(t,x)/dt = f(t, \Delta_L U(t,x))$. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f(\Delta_L U(t,x)), \tag{3}$$

где $U(t,x)$ — искомая функция на $[0,T]\times H$, $f(\zeta)$ — заданная функция одной переменной.

Теорема 1. *Пусть $f(\zeta)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция одной переменной в области значений $\{\Delta_L U(t,x)\}$ в R^1.*

1°. *Тогда решение уравнения* (3) *имеет вид*

$$U(t,x) = f(\Psi(x))t + \Psi(x)\frac{\|x\|_H^2}{2} + \Phi(x), \tag{4}$$

где $\Psi(x)$, $\Phi(x)$ — произвольные гармонические функции на H.

2°. *Если уравнение*

$$f'_\zeta\left(\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial \tau}\bigg|_{\tau = X - \frac{\|x\|_H^2}{2}}\right)t + \frac{\|x\|_H^2}{2} - X = 0, \tag{5}$$

где $V(\tau,x)$ — решение задачи Коши для „уравнения теплопроводности"

$$\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial \tau} = \Delta_L V(\tau,x), \quad V(0,x) = U_0(x), \tag{6}$$

для заданной функции $U_0(x)$ (причем $\partial^2 V(\tau,x)/\partial\tau^2 \neq 0$), разрешимо относительно $X = \chi(t,x)$ (причем $\chi(0,x) = \|x\|_H^2/2$), то решение задачи Коши для нелинейного уравнения (3)

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f(\Delta_L U(t,x)), \qquad U(0,x) = U_0(x),$$

находится по формуле

$$U(t,x) = f(\Psi(t,x))t + \Psi(t,x)\frac{\|x\|_H^2}{2} + \Phi(t,x), \tag{7}$$

где

$$\Psi(t,x) = \frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=\chi(t,x)-\frac{\|x\|_H^2}{2}}, \qquad \Phi(t,x) = W(t,x) - \Psi(t,x)\chi(t,x),$$

$V(\tau,x)$ — решение задачи Коши (6), *$W(t,x) = V(\chi(t,x) - \|x\|_H^2/2, x)$.*

Доказательство. 1°. Из (4), воспользовавшись формулой (2), имеем

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f(\Psi(x)),$$

$$\Delta_L U(t,x) = f'_\zeta(\Psi(x))t\Delta_L\Psi(x) + \frac{\|x\|_H^2}{2}\Delta_L\Psi(x) + $$

$$+ \frac{1}{2}\Psi(x)\Delta_L\|x\|_H^2 + \Delta_L\Phi(x) = \Psi(x)$$

(поскольку в силу гармоничности $\Delta_L \Psi(x) = \Delta_L \Phi(x) = 0$, а согласно (1) $\Delta_L \|x\|_H^2 = 2$). Подставляя эти значения в (3), получаем тождество.

2°. Из (7), воспользовавшись формулой (2), получим

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f(\Psi(t,x)) + f'_\zeta(\Psi(t,x))\, t\,\frac{\partial \Psi(t,x)}{\partial t} + \frac{\|x\|_H^2}{2}\frac{\partial \Psi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\Delta_L U(t,x) = f'_\zeta(\Psi(t,x))\, t\, \Delta_L \Psi(t,x) + \frac{\|x\|_H^2}{2}\Delta_L \Psi(t,x) + \Psi(t,x) + \Delta_L \Phi(t,x). \quad (9)$$

Подсчитав $\partial\Phi(t,x)/\partial t$ и $\Delta_L \Phi(t,x)$, найдем

$$\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial W(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi(t,x)}{\partial t}\chi(t,x) - \Psi(t,x)\frac{\partial \chi(t,x)}{\partial t},$$

$$\Delta_L \Phi(t,x) = \Delta_L W(t,x) - \Delta_L \Psi(t,x)\chi(t,x) - \Psi(t,x)\Delta_L \chi(t,x).$$

Поскольку

$$\frac{\partial W(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial V\left(\chi(t,x) - \|x\|_H^2/2,\ x\right)}{\partial t} =$$

$$= \left.\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial \tau}\right|_{\tau=\chi(t,x)-\frac{\|x\|_H^2}{2}} \frac{\partial \chi(t,x)}{\partial t} = \Psi(t,x)\frac{\partial \chi(t,x)}{\partial t},$$

то

$$\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} = -\chi(t,x)\frac{\partial \Psi(t,x)}{\partial t}. \quad (10)$$

Поскольку

$$\Delta_L W(t,x) = \Delta_L V\left(\chi(t,x) - \frac{\|x\|_H^2}{2},\ x\right) =$$

$$= \left.\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial \tau}\right|_{\tau=\chi(t,x)-\frac{\|x\|_H^2}{2}} [\Delta_L \chi(t,x) - 1] + \left.\Delta_L V(\tau,x)\right|_{\tau=\chi(t,x)-\frac{\|x\|_H^2}{2}} =$$

$$= \Psi(t,x)\Delta_L \chi(t,x) - \left.\left[\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial \tau} - \Delta_L V(\tau,x)\right]\right|_{\tau=\chi(t,x)-\frac{\|x\|_H^2}{2}} = \Psi(t,x)\Delta_L \chi(t,x)$$

(так как $\partial V(\tau,x)/\partial\tau = \Delta_L V(\tau,x)$ по условию (6) теоремы), то

$$\Delta_L \Phi(t,x) = -\chi(t,x)\Delta_L \Psi(t,x). \quad (11)$$

Подставляя (10) в (8), а (11) в (9) и учитывая условие (5) теоремы, получаем

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f(\Psi(t,x)) + \left[f'_\zeta(\Psi(t,x))t + \frac{\|x\|_H^2}{2} - \chi(t,x)\right]\frac{\partial \Psi(t,x)}{\partial t} = f(\Psi(t,x)),$$

$$\Delta_L U(t,x) = \Psi(t,x) + \left[f'_\zeta(\Psi(t,x))t + \frac{\|x\|_H^2}{2} - \chi(t,x)\right]\Delta_L \Psi(t,x) = \Psi(t,x).$$

Подставив эти значения в уравнение (3), получим тождество.

Полагая в (7) $t = 0$, учитывая, что $\chi(0,x) = \|x\|_H^2/2$ и, следовательно, $\Phi(0,x) = W(0,x) - \Psi(0,x)\|x\|_H^2/2$, находим

$$U(0,x) = W(0,x) = V\left(\chi(0,x) - \frac{\|x\|_H^2}{2},\, x\right) = V(0,x) = U_0(x).$$

***Пример* 1.** Решим задачу Коши

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \ln \Delta_L U(t,x) \qquad (\Delta_L U(t,x) > 0),$$

$$U(0,x) = (Ax,x)_H^2,$$

где $A = E + S$, E — единичный, S — самосопряженный вполне непрерывный оператор в H.

Для этого уравнения $f(\zeta) = \ln\zeta$, а решение задачи Коши

$$\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial \tau} = \Delta_L V(\tau,x), \qquad V(0,x) = (Ax,x)_H^2$$

имеет вид

$$V(\tau,x) = \left[2\tau + (Ax,x)_H\right]^2.$$

Поэтому уравнение (5) принимает вид

$$X^2 - \frac{1}{2}\left[\|x\|_H^2 - (Sx,x)_H\right]X - \frac{1}{4}\|x\|_H^2 (Sx,x)_H - \frac{t}{8} = 0$$

и его решение

$$\chi(\tau,x) = \frac{1}{4}\left[\|x\|_H^2 - (Sx,x)_H + \sqrt{(Ax,x)_H^2 + 2t}\right].$$

Согласно формуле (7) получаем решение задачи

$$U(t,x) = t\ln 2\left[(Ax,x)_H + \sqrt{(Ax,x)_H^2 + 2t}\right] -$$

$$- \frac{1}{4}\left[(Ax,x)_H - \sqrt{(Ax,x)_H^2 + 2t}\right]^2 + (Ax,x)_H^2.$$

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f\big(t, \Delta_L U(t,x)\big), \tag{12}$$

где $U(t,x)$ — искомая функция на $[0,T]\times H$, $f(t,\zeta)$ — заданная функция двух переменных.

Теорема 2. *Пусть $f(t,\zeta)$ — функция двух переменных, непрерывная в области $[0,T]\times\{\Delta_L U(t,x)\}$ в R^2 ($\{\Delta_L U(t,x)\}$ — область значений в R^1), дважды непрерывно дифференцируемая по ζ.*

1°. *Тогда решение уравнения* (12) *имеет вид*

$$U(t,x) = \int_0^t f(s,\Psi(x))\,ds + \Psi(x)\frac{\|x\|_H^2}{2} + \Phi(x), \tag{13}$$

где $\Psi(x)$, $\Phi(x)$ — произвольные гармонические функции на H.

2°. *Если уравнение*

$$\int_0^t f'_\zeta\left(s, \left.\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\right|_{\tau = X - \frac{1}{2}\|x\|_H^2}\right) ds + \frac{1}{2}\|x\|_H^2 - X = 0, \tag{14}$$

где $V(\tau, x)$ — *решение задачи Коши для „уравнения теплопроводности"*

$$\frac{\partial V(\tau, x)}{\partial \tau} = \Delta_L V(\tau, x), \qquad V(0, x) = U_0(x) \tag{15}$$

для заданной функции $U_0(x)$ *(причем* $\partial^2 V(\tau, x)/\partial\tau^2 \neq 0$*), разрешимо относительно* $X = \chi(t, x)$ $(\chi(0, x) = \|x\|_H^2/2)$, *то решение задачи Коши для нелинейного уравнения* (12)

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = f\big(t, \Delta_L U(t, x)\big), \qquad U(0, x) = U_0(x)$$

запишется в виде

$$U(t, x) = \int_0^t f(s, \Psi(t, x))\, ds + \Psi(t, x)\frac{\|x\|_H^2}{2} + \Phi(t, x), \tag{16}$$

где

$$\Psi(t, x) = \left.\frac{\partial V(\tau, x)}{\partial \tau}\right|_{\tau = \chi(t, x) - \frac{1}{2}\|x\|_H^2}, \qquad \Phi(t, x) = W(t, x) - \chi(t, x)\Psi(t, x),$$

$V(\tau, x)$ — *решение задачи Коши* (15), $W(t, x) = V\big(\chi(t, x) - \|x\|_H^2/2, x\big)$.

Доказательство. 1°. Из (13), используя формулу (2) и учитывая гармоничность функций $\Psi(x)$ и $\Phi(x)$, имеем

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = f(t, \Psi(x)),$$

$$\Delta_L U(t, x) = \int_0^t f'_\zeta(s, \Psi(x))\, ds\, \Delta_L \Psi(x) +$$

$$+ \frac{1}{2}\|x\|_H^2 \Delta_L \Psi(x) + \Psi(x) + \Delta_L \Phi(x) = \Psi(x).$$

Подставляя эти значения в уравнение (12), получаем тождество.

2°. Из (16), воспользовавшись формулой (2), получаем

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = f(t, \Psi(t, x)) + \int_0^t f'_\zeta(s, \Psi(t,x))\, ds \frac{\partial \Psi(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\|x\|_H^2 \frac{\partial \Psi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t}, \tag{17}$$

$$\Delta_L U(t, x) = \int_0^t f'_\zeta(s, \Psi(t,x))\, ds\, \Delta_L \Psi(t, x) + \frac{1}{2}\|x\|_H^2 \Delta_L \Psi(t, x) +$$

$$+ \Psi(t, x) + \Delta_L \Phi(t, x). \tag{18}$$

Подставляя в (17), (18) значения $\partial\Phi(t, x)/\partial t$ и $\Delta_L \Phi(t, x)$ (формулы (10), (11)) и учитывая условие (14) теоремы, имеем

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = f(t, \Psi(t, x)) +$$

$$+ \left[\int_0^t f'_\zeta(s, \Psi(t,x))\, ds + \frac{1}{2}\|x\|_H^2 - \chi(t,x)\right] \frac{\partial \Psi(t,x)}{\partial t} = f(t, \Psi(t, x)),$$

$$\Delta_L U(t,x) = \Psi(t,x) +$$

$$+ \left[\int_0^t f'_\zeta(s,\Psi(t,x))\,ds + \frac{1}{2}\|x\|_H^2 - \chi(t,x)\right]\Delta_L\Psi(t,x) = \Psi(t,x).$$

Подставив эти значения в уравнение (12), получим тождество.

Полагая в (16) $t=0$ и учитывая, что $\chi(0,x)=\frac{1}{2}\|x\|_H^2$, получаем

$$U(0,x) = W(0,x) = V\left(\chi(0,x) - \frac{1}{2}\|x\|_H^2,\, x\right) = V(0,x) = U_0(x).$$

***Пример* 2.** Решим задачу Коши

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = 4(t+1)e^{-\frac{1}{2}\Delta_L U(t,x)},$$

$$U(0,x) = \|x\|_H^2\left(1 - \ln\frac{1}{2}\|x\|_H^2\right).$$

Для этого уравнения $f(t,\zeta) = 4(t+1)e^{-\zeta/2}$, а решение задачи Коши

$$\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial \tau} = \Delta_L V(\tau,x), \quad V(0,x) = \|x\|_H^2\left(1 - \ln\frac{1}{2}\|x\|_H^2\right)$$

имеет вид

$$V(\tau,x) = \left(2\tau + \|x\|_H^2\right)\left(1 - \ln\left(\tau + \frac{1}{2}\|x\|_H^2\right)\right).$$

Поэтому уравнение (14) принимает вид

$$(1+t)^2 X - \frac{1}{2}\|x\|_H^2 = 0$$

и его решение

$$\chi(t,x) = \frac{\|x\|_H^2}{2(1+t)^2}.$$

Согласно (16) получаем решение задачи

$$U(t,x) = \|x\|_H^2\left[1 - \ln\frac{\|x\|_H^2}{2(1+t)^2}\right].$$

3. Задача Коши для уравнения $\partial U(t,x)/\partial t = f(U(t,x), \Delta_L U(t,x))$. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f(U(t,x), \Delta_L U(t,x)), \tag{19}$$

где $U(t,x)$ — искомая функция на $[0,T]\times H$, $f(\xi,\zeta)$ — заданная функция двух переменных.

Теорема 3. *Пусть* $f(\xi,\zeta)$ — *дважды непрерывно дифференцируемая функция двух переменных в области значений* $\{U(t,x), \Delta_L U(t,x)\}$ *в* R^2. *Пусть уравнение* $\eta = f(\xi, c\eta)$ *разрешимо относительно* η, $\eta = \phi(\xi,c)$, *причем переменные* ξ *и* c *разделяются,* $\phi(\xi,c) = \alpha(c)\beta(\xi)$, *где* $\alpha(c), \beta(\xi)$ — *функции на* R^1, $\beta(\xi)\neq 0$.

1°. *Тогда решение уравнения* (19) (*в неявном виде*) *дается формулой*

$$\varphi(U(t,x)) = \alpha(\Psi(x))\left[t + \Psi(x)\frac{\|x\|_H^2}{2}\right] + \Phi(x), \tag{20}$$

где $\varphi(\xi) = \int d\xi/\beta(\xi)$, $\Psi(x)$, $\Phi(x)$ — *произвольные гармонические функции на* H.

2°. *Если уравнение*

$$\alpha_c'\left(\frac{\dfrac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}}{f\left(V(\tau,x), \dfrac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\right)}\Bigg|_{\tau = X - \frac{1}{2}\|x\|_H^2}\right)t \; +$$

$$+ \; \gamma_c'\left(\frac{\dfrac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}}{f\left(V(\tau,x), \dfrac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\right)}\Bigg|_{\tau = X - \frac{1}{2}\|x\|_H^2}\right)\left[\frac{\|x\|_H^2}{2} - X\right] = 0, \tag{21}$$

где $\gamma(c) = c\alpha(c)$, $V(\tau, x)$ — *решение задачи Коши для „уравнения теплопроводности"*

$$\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau} = \Delta_L V(\tau,x), \qquad V(0,x) = U_0(x) \tag{22}$$

для заданной функции $U_0(x)$ (*причем* $\partial^2 V(\tau,x)/\partial\tau^2 \neq 0$), *разрешимо относительно* $X = \chi(t,x)$ ($\chi(0,x) = \|x\|_H^2/2$), *то решение задачи Коши для нелинейного уравнения* (19)

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f(U(t,x), \Delta_L U(t,x)), \qquad U(0,x) = U_0(x)$$

находится согласно формуле

$$\varphi(\dot U(t,x)) = \alpha(\Psi(t,x))\left[t + \Psi(t,x)\frac{\|x\|_H^2}{2}\right] + \Phi(t,x), \tag{23}$$

где

$$\Psi(t,x) = \frac{W^*(t,x)}{f(W(t,x), W^*(t,x))},$$

$\Phi(t,x) = \varphi(\dot W(t,x)) - \gamma(\Psi(t,x))\chi(t,x)$, $V(t,x)$ — *решение задачи Коши* (22),

$$W(t,x) = V\left(\chi(t,x) - \frac{\|x\|_H^2}{2}, x\right),$$

$$W^*(t,x) = \frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau = \chi(t,x) - \frac{1}{2}\|x\|_H^2}.$$

Доказательство. 1°. Из (20), воспользовавшись формулой (2), имеем

$$\varphi_\xi'(U(t,x))\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \alpha(\Psi(x)),$$

$$\varphi_\xi'(U(t,x))\,\Delta_L U(t,x) = \alpha_c'(\Psi(x))\,\Delta_L\Psi(x)\left[t + \Psi(x)\frac{\|x\|_H^2}{2}\right] +$$

$$+ \alpha(\Psi(x))\left[\frac{\|x\|_H^2}{2}\Delta_L\Psi(x) + \frac{1}{2}\Psi(x)\Delta_L\|x\|_H^2\right] +$$
$$+ \Delta_L\Phi(x) = \Psi(x)\alpha(\Psi(x))$$

(поскольку $\Delta_L\Psi(x) = \Delta_L\Phi(x) = 0$, $\Delta_L\|x\|_H^2 = 2$). Отсюда следует

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \alpha(\Psi(x))\,\beta(U(t,x)),$$

$\Delta_L U(t,x) = \Psi(x)\alpha(\Psi(x))\,\beta(U(t,x))$ (поскольку $\varphi'_\xi(\xi) = 1/\beta(\xi)$)

Подставляя эти значения в уравнение (19), получаем тождество

$$\alpha(\Psi(x))\,\beta(U(t,x)) = f(U(t,x), \Psi(x)\alpha(\Psi(x))\,\beta(U(t,x))),$$

ибо согласно условию теоремы из $\eta = f(\xi, c\eta)$ следует $\eta = \alpha(c)\beta(\xi)$.

2°. Из (23), воспользовавшись формулой (2), имеем

$$\varphi'_\xi(U(t,x))\,\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \alpha(\Psi(t,x)) + \alpha(\Psi(t,x))\frac{\|x\|_H^2}{2}\frac{\partial\Psi(t,x)}{\partial t} +$$
$$+ \alpha'_c(\Psi(t,x))\,\frac{\partial\Psi(t,x)}{\partial t}\left[t + \Psi(t,x)\frac{\|x\|_H^2}{2}\right] + \frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}, \tag{24}$$

$$\varphi'_\xi(U(t,x))\,\Delta_L U(t,x) = \alpha'_c(\Psi(t,x))\,\Delta_L\Psi(t,x)\left[t + \Psi(t,x)\frac{\|x\|_H^2}{2}\right] +$$
$$+ \alpha(\Psi(t,x))\frac{\|x\|_H^2}{2}\,\Delta_L\Psi(t,x) + \Psi(t,x)\alpha(\Psi(t,x)) + \Delta_L\Phi(t,x). \tag{25}$$

Подсчитаем $\partial\Phi(t,x)/\partial t$ и $\Delta_L\Phi(t,x)$:

$$\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{\beta(W(t,x))}\frac{\partial W(t,x)}{\partial t} -$$
$$- \gamma'_c(\Psi(t,x))\frac{\partial\Psi(t,x)}{\partial t}\,\chi(t,x) - \gamma(\Psi(t,x))\frac{\partial\chi(t,x)}{\partial t},$$

$$\Delta_L\Phi(t,x) = \frac{1}{\beta(W(t,x))}\,\Delta_L W(t,x) - \gamma'_c(\Psi(t,x))\,\Delta_L\Psi(t,x)\,\chi(t,x) -$$
$$- \gamma(\Psi(t,x))\,\Delta_L\chi(t,x).$$

Поскольку

$$\frac{\partial W(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial V\left(\chi(t,x) - \frac{1}{2}\|x\|_H^2, x\right)}{\partial t} = \left.\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\right|_{\tau=\chi(t,x)-\frac{1}{2}\|x\|_H^2}\frac{\partial\chi(t,x)}{\partial t} =$$
$$= W^*(t,x)\frac{\partial\chi(t,x)}{\partial t},$$

а согласно условию теоремы $\Psi(t,x) = W^*(t,x)/f(W(t,x), W^*(t,x))$ и отсюда (так как из $\eta = f(\xi, c\eta)$ следует $\eta = \alpha(c)\beta(\xi)$) вытекает $W^*(t,x) = \beta(W(t,x))\Psi(t,x)\alpha(\Psi(t,x))$, то

$$\frac{\partial W(t,x)}{\partial t} = \gamma(\Psi(t,x))\,\beta(W(t,x))\,\frac{\partial\chi(t,x)}{\partial t}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t} = -\gamma_c'(\Psi(t,x))\,\chi(t,x)\,\frac{\partial\Psi(t,x)}{\partial t}. \tag{26}$$

Поскольку

$$\Delta_L W(t,x) = \Delta_L V\Big(\chi(t,x)-\frac{1}{2}\|x\|_H^2,\, x\Big) =$$

$$= \frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=\chi(t,x)-\frac{1}{2}\|x\|_H^2}[\Delta_L\chi(t,x)-1] + \Delta_L V(\tau,x)\bigg|_{\tau=\chi(t,x)-\frac{1}{2}\|x\|_H^2} =$$

$$= W^*(t,x)\Delta_L\chi(t,x) - \left[\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau} - \Delta_L V(\tau,x)\right]\bigg|_{\tau=\chi(t,x)-\frac{1}{2}\|x\|_H^2} =$$

$$= W^*(t,x)\Delta_L\chi(t,x) = \beta(W(t,x))\Psi(t,x)\alpha(\Psi(t,x))\,\Delta_L\chi(t,x),$$

то

$$\Delta_L\Phi(t,x) = -\gamma_c'(\Psi(t,x))\,\chi(t,x)\,\Delta_L\Psi(t,x). \tag{27}$$

Подставляя (26) в (24), а (27) в (25) и учитывая условие (21) теоремы, получаем

$$\frac{1}{\beta(U(t,x))}\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \alpha(\Psi(t,x)) + \Big\{\alpha_c'(\Psi(t,x))\,t +$$

$$+ \gamma_c'(\Psi(t,x))\left[\frac{\|x\|_H^2}{2} - \chi(t,x)\right]\Big\}\frac{\partial\Psi(t,x)}{\partial t} = \alpha(\Psi(t,x)),$$

$$\frac{1}{\beta(U(t,x))}\Delta_L U(t,x) = \gamma(\Psi(t,x)) + \Big\{\alpha_c'(\Psi(t,x))\,t +$$

$$+ \gamma_c'(\Psi(t,x))\left[\frac{\|x\|_H^2}{2} - \chi(t,x)\right]\Big\}\Delta_L\Psi(t,x) = \gamma(\Psi(t,x)).$$

Отсюда

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \alpha(\Psi(t,x))\,\beta(U(t,x)), \qquad \Delta_L U(t,x) = \gamma(\Psi(t,x))\,\beta(U(t,x)).$$

Подставляя эти значения в уравнение (19), получаем тождество.

Полагая в (23) $t=0$ и учитывая, что $\chi(0,x) = \|x\|_H^2/2$, а значит, $\Phi(0,x) = \varphi(W(0,x)) - \gamma(\Psi(0,x))\,\|x\|_H^2/2$, получаем

$$\varphi(U(0,x)) = \varphi(W(0,x)) = \varphi\Big(V\Big(\chi(0,x)-\frac{1}{2}\|x\|_H^2,\, x\Big)\Big) = \varphi(V(0,x)) = \varphi(U_0(x)),$$

$$U(0,x) = U_0(x).$$

***Пример* 3.** Решим задачу Коши

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \frac{[\Delta_L U(t,x)]^2}{U(t,x)} \qquad (U(t,x)\neq 0),$$

$$U(0,x) = \|x\|_H^4.$$

Для этого уравнения $f(\xi,\zeta) = \zeta^2/\xi$, $\alpha(c) = 1/c^2$, $\beta(\xi) = \xi$, $\varphi(\xi) = \ln|\xi|$, а решение задачи Коши

$$\frac{\partial V(\tau, x)}{\partial \tau} = \Delta_L V(\tau, x), \qquad V(0, x) = \|x\|_H^4$$

имеет вид $V(\tau, x) = 4\left[\tau + \|x\|_H^2/2\right]^2$. Поэтому уравнение (21) принимает вид

$$X^2 - \frac{1}{2}\|x\|_H^2 X - 4t = 0$$

и его решение

$$\chi(t, x) = \frac{1}{4}\|x\|_H^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\|x\|_H^4 + 16t}.$$

Согласно формуле (23) получаем решение задачи

$$U(t, x) = \left[\frac{\|x\|_H^2}{2} + \sqrt{\frac{\|x\|_H^4}{4} + 16t}\right]^2 \exp\left(-\frac{16t}{\left[\|x\|_H^2/2 + \sqrt{\|x\|_H^4/4 + 16t}\right]^2}\right).$$

Особенно просто выглядит решение задачи Коши для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = \Delta_L U(t, x) + f_0(U(t, x)), \tag{28}$$

$f_0(\xi)$ — заданная функция одной переменной.

Из теоремы 3 вытекает следствие.

Следствие. *Решение задачи Коши для квазилинейного уравнения* (28)

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = \Delta_L U(t, x) + f_0(U(t, x)), \qquad U(0, x) = U_0(x)$$

имеет вид

$$\varphi(U(t, x)) = t - \varphi(V(t, x)), \tag{29}$$

где $\varphi(\xi) = \int d\xi / f_0(\xi)$, $V(t, x)$ — *решение задачи Коши для уравнения теплопроводности* $\partial V(t, x)/dt = \Delta_L V(t, x)$, $V(0, x) = U_0(x)$.

Действительно, для уравнения (28) $f(\xi, \zeta) = \zeta + f_0(\xi)$ и поэтому $\alpha(c) = 1/(1-c)$, $\beta(\xi) = f_0(\xi)$.

Поскольку $\alpha_c'(c) = \gamma_c' = 1/(1-c)^2$, то условие (21) принимает вид $t + \|x\|_H^2/2 - X = 0$, откуда $\chi(t, x) = t + \|x\|_H^2/2$.

Согласно формуле (23)

$$\varphi(U) = \alpha(\Psi(t, x))\, t + \gamma(\Psi(t, x))\left[\frac{1}{2}\|x\|_H^2 - \chi(t, x)\right] + \varphi(W(t, x)).$$

Поскольку

$$\alpha(\Psi(t, x)) = \frac{1}{1 - \Psi(t, x)}, \quad \gamma(\Psi(t, x)) = \frac{\Psi(t, x)}{1 - \Psi(t, x)}, \quad \chi(t, x) = t + \frac{1}{2}\|x\|_H^2,$$

$$W(t, x) = V\left(\chi(t, x) - \|x\|_H^2/2,\ x\right) = V(t, x),$$

то $\varphi(U) = t + \varphi(V(t, x))$.

***Пример* 4.** Решим задачу Коши

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \Delta_L U(t,x) - U^m(x), \qquad m > 1,$$

$$U(0,x) = (Ax,x)_H^2,$$

где $A = E + S$, E — единичный, S — самосопряженный вполне непрерывный оператор в H.

Для этого уравнения $f_0(\xi) = -\xi^m$, поэтому $\varphi(\xi) = 1/[(m-1)\xi^{m-1}]$, а решение задачи Коши

$$\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial \tau} = \Delta_L V(\tau,x), \qquad V(0,x) = (Ax,x)_H^2$$

имеет вид

$$V(\tau,x) = [2\tau + (Ax,x)_H]^2.$$

Согласно формуле (29) получаем решение задачи

$$U(t,x) = \frac{[2t+(Ax,x)_H]^2}{\left\{(m-1)t\,[2t+(Ax,x)_H]^{2m-2}+1\right\}^{\frac{1}{m-1}}}.$$

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 512 с.
2. *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V.* The Levy Laplacian and the Yang–Mills equations. – Rome, 1992. – P. 1 – 7. – (Preprint / Vito Volterra Centre; № 129).
3. *Шилов Г. Е.* О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. III // Мат. сб. – 1967. – **74** (116), № 1. – С. 161 – 168.
4. *Феллер М. Н.* Об одном нелинейном уравнении, не разрешенном относительно лапласиана Леви // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 719 – 721.
5. *Феллер М. Н.* Задача Рикьера для нелинейного уравнения, разрешенного относительно итерированного лапласиана Леви // Там же. – 1998. – **50**, № 11. – С. 1574 – 1577.
6. *Феллер М. Н.* Задача Рикьера для одного нелинейного уравнения, не разрешенного относительно итерированного лапласиана Леви // Там же. – 1999. – **51**, № 3. – С. 423 – 427.
7. *Соколовский В. Б.* Бесконечномерные параболические уравнения с лапласианом Леви и некоторые вариационные задачи // Сиб. мат. журн. – 1994. – **35**, № 1. – С. 177 – 180.
8. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные эллиптические уравнения и операторы типа П. Леви // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 4. – С. 97 – 140.

Получено 14.09.98