УДК 518.:517.944/947

В. Л. Макаров, Д. Т. Кулыев

Метод прямых для квазилинейного уравнения параболического типа с неклассическим краевым условием

При изучении диффузии частиц в турбулентной плазме и в задачах распространения тепла в тонком нагретом стержне, когда потоки тепла на концах стержня равны по величине, возникают краевые задачи с неклассическим краевым условием вида (см., напр., [1, 2]):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t,u),\ \ (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(1,t)}{\partial x},\quad 0<t<T, \tag{2}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(x,0)=0,\quad 0\leqslant t<T,\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{3}$$

где $Q\ =\{(x,\ t);\ 0<x<1,\ 0<t<T\}$. Существование и единственность классического решения линейной задачи (1)—(3) $(f(x,\ t,\ u)=f(x,\ t)-q(x)\,u(x,\ t))$ рассмотрено в [1], в [2] изучены вопросы построения и исследования разностных схем. При этом скорость сходимости разностных схем в [2] была установлена при завышенных требованиях на гладкость решения исходной задачи. В [3] результаты работы [1] были обобщены на квазилинейный случай и на обобщенные решения из пространства $W_2^{2,1}(Q_T,\ 1-x)$. В настоящей работе, используя технику операторов точных разностных схем [4], для задачи (1) — (3) с решением из $W_2^{2,1}(Q_T,\ 1-x)$ построена схема метода прямых, обладающая первым порядком скорости сходимости в норме весового пространства $L_2(\Omega_T,\ 1-x)$.

1. Построение схемы метода прямых. Рассмотрим следующие пространства: $L_2(\Omega_T,\ 1-x)$ — банахово пространство, состоящее из всех определенных и измеримых (по Лебегу) на Ω_T функций, которые имеют конечную норму $\|v\|_{2,\Omega_T}=\Big(\int\limits_0^T\sum\limits_{i=1}^N h(1-x_i)\,v^2(x_i,\ t)\,dt\Big)^{1/2}$; $W_4^{2,1}(\Omega_T,\ 1-x)$ — гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $L_2(\Omega_T,$

$1-x$), имеющих обобщенные производные v_t из пространства L_2 (Ω_T, $1-x$). Скалярное произведение в нем определяем следующим образом:

$$(u, v)_{2,\Omega_T}^{(2,1)} = \int\limits_0^T \Bigg[\sum_{i=1}^N h(1-x_i)\, u(x_i, t)\, v(x_i, t) + \sum_{i=1}^N h(1-x_{i-1})\, u_{\bar{x}}(x_i, t)\, v_{\bar{x}}(x_i, t) +$$

$$+ \int\limits_0^t \sum_{i=1}^N h(1-x_i) \left[\frac{du(x_i, \eta)}{d\eta} \frac{dv(x_i, \eta)}{d\eta} + u_{\bar{x}x}(x_i, \eta)\, v_{\bar{x}x}(x_i, \eta) \right] d\eta \Bigg] dt, \quad (4)$$

а норму — через $\|\cdot\|_{2,\Omega_T}^{(2,1)}$, где $\Omega_T = \omega_h \times]0, T[$, ω_h — равномерная сетка по переменной x, т. е. $\omega_h = \{x_i = ih;\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ h = 1/N\}$. Для решения краевой задачи (1) — (3) справедливы следующие соотношения:

$$\frac{d}{dt} T^{x_i}[u(\xi, t)] = u_{\bar{x}x}(x_i, t) + T^{x_i}[f(,\ t, u(\xi, t))], \qquad i = \overline{1, N-1}, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} T^{x_N}[u(\xi, t)] = u_{\bar{x}x}(1, t) + T^{x_N}[f(\xi, t, u(\xi, t))], \qquad i = N, \quad (6)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \quad x \in \omega_h, \quad (7)$$

где

$$T^{x_i}[v(\xi)] = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\xi - x_{i-1}}{h^2} v(\xi)\, d\xi + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - \xi}{h^2} v(\xi)\, d\xi, \qquad i = \overline{1, N-1},$$

$$T^{x_N}[v(\xi)] = \int\limits_0^{x_1} \frac{x_1 - \xi}{h^2} v(\xi)\, d\xi + \int\limits_{x_{N-1}}^1 \frac{\xi - x_{N-1}}{h^2} v(\xi)\, d\xi, \qquad i = N.$$

По аналогии с (5) — (7) схему метода прямых строим следующим образом:

$$\frac{dv(x, t)}{dt} = v_{\bar{x}x}(x, t) + T^x[f(\xi, t, \hat{v}(\xi, t))], \qquad (x, t) \in \Omega_T, \quad (8)$$

$$v_x(0, t) = v_x(1, t), \qquad 0 < t < T, \quad (9)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (10)$$

где $\hat{v}(\xi, t) = v(x, t) + (\xi - x)\, v_{\bar{x}}(x, t)$. Для изучения вопроса существования и единственности обобщенных решений схемы (8) — (10) необходимо предварительно исследовать линейную схему вида

$$\frac{dv(x, t)}{dt} = v_{\bar{x}x}(x, t) + f(x, t), \qquad (x, t) \in \Omega_T, \quad (11)$$

$$v_x(0, t) = v_x(1, t), \qquad 0 < t < T, \quad (12)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \quad x \in \bar{\omega}_h. \quad (13)$$

2. Исследование линейной задачи. Следуя [1], классическим решением задачи (11)—(13) назовем такую функцию $v(x, t)$, которая по переменной t: непрерывна; обладает непрерывными производными первого порядка; удовлетворяет уравнению (11) и условиям (12), (13) в обычном смысле.

Под обобщенным решением задачи (11) — (13) в пространстве $W_2^{2,1}(\Omega_T$, $1-x)$ будем понимать функцию $v(x, t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$, удовлетворяющую уравнению (11) и условиям (12) почти всюду в Ω_T и такую, что $v(0, t) = 0$, $v(x, 0) = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $f(x, t) \in L_2(\Omega_T, (1-x)^{-1})$. *Тогда существует единственная функция* $v(x, t)$, *представляющая собой обобщенное решение задачи* (11) — (13) *из пространства* $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$.

Доказательство. Для доказательства существования решения аппроксимируем функцию $f(x, t)/\sqrt{1-x}$ в $L_2(\Omega_T)$ функциями $f_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, по переменной t, из Π_k (Π_k — пространство многочленов степени k), т. е. $\| f(x, t)/\sqrt{1-x} - f_k(x, t) \|_{2,\Omega_T} \to 0$ при $k \to \infty$, что всегда возможно в силу плотности множества многочленов в $L_2(\Omega_T)$. Используя подход, развитый в работах [1, 2], легко установить существование и единственность классического решения задачи (11) — (13). Пусть $v_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, — классическое решение задачи (11) — (13), соответствующее свободному члену $\sqrt{1-x} f_k(x, t)$, $f_k(x, t) \in \Pi_k$. В силу ее линейности разность $z_{km}(x, t) = v_k(x, t) - v_m(x, t)$, $k, m = 1, 2, \ldots$, есть классическое решение задачи

$$\frac{dz_{km}(x, t)}{dt} - z_{km,\bar{x}x}(x, t) = F_{km}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \tag{14}$$

$$z_{km,x}(0, t) = z_{km,x}(1, t), \qquad 0 < t < T, \tag{15}$$

$$z_{km}(0, t) = 0, \; z_{km}(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{16}$$

где $F_{km}(x, t) = \sqrt{1-x}\,[f_k(x, t) - f_m(x, t)]$. После несложных преобразований будем иметь

$$\sum_{i=1}^{N} h \sum_{j=1}^{i-1} h \left[\left(\frac{dz_{km}(x_j, t)}{dt}\right)^2 + z^2_{km,\bar{x}x}(x_j, t)\right] + 2 \sum_{i=1}^{N} h \sum_{j=1}^{i} h \frac{dz_{km}(x_j, t)}{dt} \times$$
$$\times z_{km,\bar{x}}(x_j, t) \leqslant 2 \sum_{i=1}^{N} hF_{km}(x_i, t)\, z_{km,\bar{x}}(x_i, t) + \sum_{i=1}^{N} h \sum_{j=1}^{i-1} hF^2_{km}(x_j, t). \tag{17}$$

Неравенство (17) проинтегрируем по t от 0 до текущей точки, и используя «ε-неравенство», получим

$$\sum_{i=1}^{N} h(1-x_{i-1})\, z^2_{km,\bar{x}}(x_i, t) + \int_0^t \sum_{i=1}^{N} h(1-x_i)\left[\left(\frac{dz_{km}(x_i, \eta)}{d\eta}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + z^2_{km,\bar{x}x}(x_i, \eta)\right] d\eta \leqslant 2\varepsilon \int_0^t \sum_{i=1}^{N} h(1-x_{i-1})\, z^2_{km,\bar{x}}(x_i, \eta) d\eta +$$
$$+ \frac{2\varepsilon + 1}{2\varepsilon} \int_0^T \sum_{i=1}^{N} h\,[f_k(x_i, t) - f_m(x_i, t)]^2\, dt. \tag{18}$$

Применяя лемму Гронуолла (см. [5]) к (18), приходим к оценке

$$\sum_{i=1}^{N} h(1-x_{i-1})\, z^2_{km,\bar{x}}(x_i, t) + \int_0^t \sum_{i=1}^{N} h(1-x_i)\left[\left(\frac{dz_{km}(x_i, \eta)}{d\eta}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + z^2_{km,\bar{x}x}(x_i, \eta)\right] d\eta \leqslant \frac{(2\varepsilon + 1)\exp 2\varepsilon t}{2\varepsilon} \int_0^T \sum_{i=1}^{N} h\,[f_k(x_i, t) - f_m(x_i, t)]^2\, dt.$$

Полученное неравенство проинтегрируем по t от 0 до T. Тогда, используя очевидное неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} h(1-x_i)\, z^2_{km}(x_i, t) \leqslant T \int_0^t \sum_{i=1}^{N} h(1-x_i)\left(\frac{dz_{km}(x_i, \eta)}{d\eta}\right)^2 d\eta, \tag{19}$$

будем иметь

$$\| v_k(x,t) - v_m(x,t) \|^{(2,1)}_{2,\Omega_T} \leqslant C \| (1-x)^{-1/2} [f_k(x,t) - f_m(x,t)] \|_{2,\Omega_T}, \qquad (20)$$

где $C^2 = (2\varepsilon + 1)(\exp 2\varepsilon T - 1)/4\varepsilon^2 M_0$, $M_0 = \min\{1, 1/T\}$. Из оценки (20) следует, что последовательность $\{v_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальная в пространстве $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$. В силу полноты последнего существует элемент $\tilde{v}(x,t) \in W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$, к которому сходятся $v_k(x,t)$ в норме $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$. Нетрудно убедиться в том, что предельная функция $\tilde{v}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (11) почти всюду в Ω_T. Действительно, из тождества

$$\int_0^T \sum_{i=1}^N h \sum_{j=1}^{i-1} h \left[\frac{d(v_k(x_j,t) - \tilde{v}(x_j,t))}{dt} - (v_{k,\bar{x}x}(x_j,t) - \tilde{v}_{\bar{x}x}(x_j,t)) \right] \eta(x_j,t)\,dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{i=1}^N h \sum_{j=1}^{i-1} h \left[\frac{d\tilde{v}(x_j,t)}{dt} - \tilde{v}_{\bar{x}x}(x_j,t) \right] \eta(x_j,t)\,dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{i=1}^N h \sum_{j=1}^{i-1} h [\sqrt{1-x_j} f_k(x_j,t) - f(x_j,t)] \eta(x_j,t)\,dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{i=1}^N h \sum_{j=1}^{i-1} h f(x_j,t) \eta(x_j,t)\,dt \quad \forall \eta(x,t) \in L_2(\Omega_T, 1-x),$$

переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\int_0^T \sum_{i=1}^N h \sum_{j=1}^{i-1} h \left[\frac{d\tilde{v}(x_j,t)}{dt} - \tilde{v}_{\bar{x}x}(x_j,t) - f(x_j,t) \right] \eta(x_j,t)\,dt = 0$$

$$\forall \eta(x,t) \in L_2(\Omega_T, 1-x). \qquad (21)$$

Интегральное тождество (21) показывает, что предельная функция $\tilde{v}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (11) почти всюду в Ω_T. Аналогично устанавливается, что предельная функция $\tilde{v}(x,t)$ удовлетворяет нелокальному условию (12) почти всюду. Поскольку $\tilde{v}(x,t) \in W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$, то она абсолютно непрерывна (см., напр., [6]). Из этого факта следует, что $\tilde{v}(x,0) = 0$, $\tilde{v}(0,t) = 0$, $(x,t) \in \Omega_T$. Таким образом, доказано существование обобщенного решения задачи (11) — (13) из пространства $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$. Теперь докажем единственность этого решения. Пусть $v(x,t)$ и $u(x,t)$ — обобщенные решения задачи (11) — (13) из пространства $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$. Введя обозначение $z(x,t) = v(x,t) - u(x,t)$, для $z(x,t)$ будем иметь задачу

$$\frac{dz(x,t)}{dt} = z_{\bar{x}x}(x,t) \text{ почти всюду в } \Omega_T, \qquad (22)$$

$$z_x(0,t) = z_x(1,t) \text{ почти всюду в } (0,T), \qquad (23)$$

$$z(0,t) = 0, \quad z(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \quad x \in \bar{\omega}_h. \qquad (24)$$

Умножим уравнения (22) на $h \dfrac{dz(x,t)}{dt}$ и просуммируем по i от 1 до N с весом $1-x$. Тогда, после интегрирования по t, будем иметь

$$\sum_{i=1}^N h(1-x_i) z_x^2(x_i,t) + \int_0^t \sum_{i=1}^N h(1-x_i)(dz(x_i,\eta)/d\eta)^2\,d\eta = 0,$$

откуда следует, что $z(x,t) \equiv 0$ в Ω_T. Теорема доказана полностью.

3. Исследование квазилинейной задачи. Под обобщенным решением задачи (8) — (10) в пространстве $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$ естественно понимать элемент $v(x,t)$ пространства $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$, удовлетворяющий уравнению (8) и условиям (9) почти всюду в Ω_T и такой, что $v(0,t)=0$, $v(x,0)=0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2 из* [3]. *Тогда* 1) $\forall L>0$ *задача* (8) — (10) *не может иметь более одного обобщенного решения из пространства* $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$; 2) *если* $L<P$, $P = \max\limits_{\varepsilon>0}(3\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{M_0}/[(\varepsilon+1)(9+h)(\exp 2\varepsilon T-1)]^{1/2})$, $M_0=\min\{1, 1/T\}$, *то обобщенное решение задачи* (8) — (10) *из пространства* $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$ *существует.*

Доказательство. Построим итерационный процесс

$$\frac{dv^n(x,t)}{dt} = v^n_{\bar{x}x}(x,t) + T^x[f(\xi, t, \hat{v}^n(\xi,t))], \quad n=1,2,\ldots,$$

$$v^n_x(0,t)=v^n_x(1,t), \quad 0<t<T, \quad v^n(0,t)=0, \quad v^n(x,0)=0,$$

$$0\leqslant t<T, \quad x\in\bar{\omega}_h, \tag{25}$$

где $v^0(x,t)$ — начальное приближение, которое можно взять равным нулю. Каждая из задач (25) при фиксированном n на основании теоремы 1 имеет единственное решение из пространства $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$. Пусть $z^n(x,t) = v^n(x,t) - v^{n-1}(x,t)$. Тогда из (25) имеем

$$\frac{dz^n(x,t)}{dt} - z^n_{\bar{x}x}(x,t) = \psi^n(x,t), \ (x,t)\in\Omega_T, \qquad n=2,3,\ldots, \tag{26}$$

$$z^n_x(0,t)=z^n_x(1,t), \qquad 0<t<T, \tag{27}$$

$$z^n(0,t)=0, \quad z^n(x,0)=0, \qquad 0\leqslant t<T, \quad x\in\bar{\omega}_h, \tag{28}$$

где $\psi^n(x,t) = T^x[f(\xi,t,\hat{v}^{n-1}(\xi,t))] - T^x[f(\xi,t,\hat{v}^{n-2}(\xi,t))]$. Возведем обе части уравнения (26) в квадрат, умножим на h^2, просуммируем сначала по j от 1 до $i-1$, а затем по i от 1 до N. Тогда после несложных преобразований получим

$$\sum_{i=1}^N h\sum_{j=1}^{i} h(z^n_{\bar{x}}(x_j,t))^2 + \int_0^t\sum_{i=1}^N h(1-x_i)\left[\left(\frac{dz^n(x_i,\eta)}{d\eta}\right)^2 + (z^n_{\bar{x}x}(x_i,\eta))^2\right]d\eta \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^t\sum_{i=1}^N h\psi^n(x_i,\eta)\,z^n_{\bar{x}}(x_i,\eta)\,d\eta + \int_0^t\sum_{i=1}^N h\sum_{j=1}^{i-1} h(\psi^n(x_j,\eta))^2\,d\eta.$$

Используя условие Липшица и «ε-неравенство», из последнего соотношения приходим к оценке

$$\sum_{i=1}^N h\sum_{j=1}^{i} h(z^n_{\bar{x}}(x_j,t))^2 + \int_0^t\sum_{i=1}^N h(1-x_i)[(dz^n(x_i,\eta)/d\eta)^2 + (z^n_{\bar{x}x}(x_i,\eta))^2]\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L^2(\varepsilon+1)(h+9)}{9\varepsilon}\int_0^T\sum_{i=1}^N h(1-x_{i-1})(z^{n-1}_{\bar{x}}(x_i,t))^2\,dt +$$

$$+ 2\varepsilon\int_0^t\sum_{i=1}^N h(1-x_{i-1})(z^n_{\bar{x}}(x_i,\eta))^2\,d\eta. \tag{29}$$

Используя лемму Гронуолла, из (29) получаем

$$\sum_{i=1}^N h(1-x_{i-1})(z^n_{\bar{x}}(x_i,t))^2 + \int_0^t\sum_{i=1}^N h(1-x_i)\left[\left(\frac{dz^n(x_i,\eta)}{d\eta}\right)^2 + \right.$$

$$+ (z^n_{\bar{x}x}(x_i, \eta))^2\Big] d\eta \leqslant \frac{L^2(\varepsilon+1)(h+9)}{9\varepsilon} \exp 2\varepsilon t \int\limits_0^T \Big\{ \sum_{i=1}^N h(1-x_{i-1})(z^{n-1}_{\bar{x}}(x_i, t))^2 +$$

$$+ \int\limits_0^t \sum_{i=1}^N h(1-x_i)\left[\left(\frac{dz^{n-1}(x_i,\eta)}{\eta}\right)^2 + (z^{n-1}_{\bar{x}x}(x_i,\eta))^2\right] d\eta \Big\} dt.$$

Последнее неравенство проинтегрируем по t от 0 до T. Тогда, используя соотношения (19), получим

$$\| z^n(x, t) \|^{(2,1)}_{2,\Omega_T} \leqslant d \, \| z^{n-1}(x, t) \|^{(2,1)}_{2,\Omega_T}, \tag{30}$$

где $d^2 = L^2(\varepsilon+1)(9+h)(\exp 2\varepsilon T - 1)/18\varepsilon^2 M_0$, $M_0 = \min\{1, 1/T\}$.

Если $d < 1$, т. е. $L < P$, $P = \max\limits_{\varepsilon > 0} (3\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{M_0}/[(\varepsilon+1)(9+h)(\exp 2\varepsilon T - 1)]^{1/2})$, то из неравенства (30) следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n(x, t)$, а вместе с ним и последовательность $v^n(x, t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} [v^{k+1}(x, t) - v^k(x, t)] + v^0(x, t)$, $n = 1, 2, \dots$, сходятся к функции $\tilde{v}(x, t)$ в норме $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$. Нетрудно показать по аналогии с [2], что предельная функция $\tilde{v}(x, t)$ удовлетворяет уравнению (8), условиям (9) почти всюду в Ω_T и $\tilde{v}(0, t) = 0$, $\tilde{v}(x, 0) = 0$ $\forall (x, t) \in \Omega_T$. Таким образом, доказано существование обобщенного решения задачи (8) — (10) из пространства $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$. Докажем его единственность. Пусть задача (8) — (10) имеет два обобщенных решения из $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$. Тогда их разность $z(x, t) = v(x, t) - u(x, t)$ принадлежит пространству $W_2^{2,1}(\Omega_T, 1-x)$ и является решением задачи

$$\begin{gathered} \frac{dz(x, t)}{dt} = z_{\bar{x}x}(x, t) + \psi(x, t) \text{ почти всюду в } \Omega_T, \\ z_x(0, t) = z_x(1, t) \text{ почти всюду в } (0, T), \\ z(0, t) = 0, \; z(x, 0) = 0, \; 0 \leqslant t < T, \; x \in \bar{\omega}_h, \end{gathered} \tag{31}$$

где $\psi(x, t) = T^x[f(\xi, t, \hat{v}(\xi, t))] - T^x[f(\xi, t, \hat{u}(\xi, t))]$. Повторяя предыдущее рассуждение, приходим к оценке

$$G(x, t) \leqslant C \int\limits_0^t G(x, \eta)\, d\eta, \tag{32}$$

где

$$G(x, t) = \sum_{i=1}^N h(1-x_i) z^2(x_i, t) + \sum_{i=1}^N h(1-x_{i-1}) z^2_{\bar{x}}(x_i, t) +$$

$$+ \int\limits_0^t \sum_{i=1}^N h(1-x_i)\left[\left(\frac{dz(x_i,\eta)}{d\eta}\right)^2 + z^2_{\bar{x}x}(x_i, \eta)\right] d\eta,$$

$$C = L[2L(9+h) + 2h + 27]/9M_0, \quad M_0 = \min\{1, 1/T\}.$$

Используя лемму Гронуолла, из (32) получаем $z(x, t) \equiv 0$ в Ω_T. Единственность доказана, а вместе с ней и вся теорема.

4. Априорная оценка. Сходимость. Оценим погрешность схемы метода прямых (8)—(10). Пусть $v(x, t)$ — решение задачи (8)—(10), $u(x, t)$ — решение задачи (1)—(3). Для погрешности $z(x, t) = v(x, t) - u(x, t)$ получаем задачу

$$\frac{dz(x, t)}{dt} = z_{\bar{x}x}(x, t) + \psi(x, t), \; (x, t) \in \Omega_T, \tag{33}$$

$$z_x(0,t) = z_x(1,t), \qquad 0<t<T, \tag{34}$$

$$z(0,t) = 0, \quad z(x,0) = T^x[u(\xi,0)] - u(x,0), \tag{35}$$

где

$$\psi(x,t) = T^x[f(\xi,t,\hat{v}(\xi,t))] + \frac{d}{dt}[T^x[u(\xi,t) - u(x,t)] - T^x[f(\xi,t,u(\xi,t))].$$

Пусть $W(x,t) = \int\limits_0^t z(x,\eta)\,d\eta$. Тогда из (33) — (35) для $W(x,t)$ имеем задачу

$$\frac{dW(x,t)}{dt} - W_{\bar{x}x}(x,t) = \psi_1(x,t), \ (x,t) \in \Omega_T, \tag{36}$$

$$W(0,t) = 0, \quad W(x,0) = 0, \quad W_x(0,t) = W_x(1,t), \tag{37}$$

где

$$\psi_1(x,t) = T^x[u(\xi,t) - u(x,t)] + \int\limits_0^t [T^x[f(\xi,\eta,\hat{v}(\xi,\eta))] - T^x[f(\xi,\eta,u(\xi,\eta))]]d\eta.$$

Лемма 1. *Для решения задачи* (36), (37) *имеет место следующая оценка:*

$$\|W(x,t)\|^{(2,1)}_{2,\Omega_T} \leqslant M_1\{\|T^x(u) - u\|^2_{2,\Omega_T} + 2L^2\|T^x[|u(\xi,t) - u(x,t) -$$
$$- (\xi - x)u_{\bar{x}}(x,t)|]\|^2_{2,\Omega_T} + \left\|\frac{T^x(u) - u}{1 - x + h}\right\|^2_{2,\Omega_T} +$$
$$+ L^2\left\|\frac{T^x[|u(\xi,t) - u(x,t) - (\xi - x)u_{\bar{x}}(x,t)|]}{1 - x + h}\right\|^2_{2,\Omega_T}\Bigg\}^{1/2}, \tag{38}$$

где $M_1^2 = 2T\exp 4L^2[2 + 2h(h+1)]\,T/M_0, \quad M_0 = \min\{1, 1/T\}$.

Используя лемму Брэмбла — Гильберта (см., напр., [7]), из (38) получаем оценку

$$\|W(x,t)\|^{(2,1)}_{2,\Omega_T} \leqslant Mh\left\{\int\limits_0^T (T - t)\int\limits_0^1 (1 - x)\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 dxdt\right\}^{1/2};$$

тем самым доказана такая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда* $\exists h_0 > 0$ *такое, что* $\forall h \in (0, h_0]$ *решение задачи* (8)—(10) *сходится к решению дифференциальной задачи* (1)—(3) *со скоростью* $O(h)$, *или*

$$\|u(x,t) - v(x,t)\|_{2,\Omega_T} \leqslant Mh\left\{\int\limits_0^T (T - t)\int\limits_0^1 (1 - x)\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 dxdt\right\}^{1/2}.$$

1. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием.— Дифференц. уравнения, 1977, **13**, № 2, с. 294—304.
2. *Ионкин Н. И.* Разностные схемы для одной неклассической задачи.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Выч. мат. и киберн., 1977, № 2, с. 20—32.
3. *Макаров В. Л., Кулыев Д. Т.* Решение одной краевой задачи для квазилинейного уравнения параболического типа с неклассическим краевым условием.— Дифференц. уравнения, 1985, **21**, № 2.
4. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* Применение точных разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых.— М., 1979.— 20 с.— (Препринт / АН СССР, Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша; № 13).
5. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М. : Мир, 1971.— 372 с.
6. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных.— М. : Изд-во Высш. шк., 1977.— 430 с.
7. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач.— М. : Мир, 1980.— 512 с.
8. *Фадеев Д. К., Вулих Б. З., Уральцева Н. Н.* и др. Избранные главы анализа и высшей алгебры.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.— 200 с.

Киев. гос. ун-т

Поступила 23.12.83