УДК 519.46

И. В. Протасов

Топологические группы с σ-компактным пространством подгрупп

Пусть G — топологическая группа, $\mathfrak{L}(G)$ — пространство всех ее замкнутых подгрупп, снабженное E-топологией. Открытую предбазу этой топологии образуют множества $D_1(U) = \{X \in \mathfrak{L}(G) : X \subseteq U\}$, $D_2(V) = \{X \in \mathfrak{L}(G) : X \cap V \neq \varnothing\}$, где U, V пробегают все открытые подмножества из G. Строение локально компактных групп G с компактным пространством $\mathfrak{L}(G)$ описано в [1]. При изучении топологических групп с σ-компактным пространством замкнутых подгрупп возникла следующая гипотеза.

Гипотеза. *Пространство $\mathfrak{L}(G)$ локально компактной группы G σ-компактно тогда и только тогда, когда G σ-компактна и множество некомпактных подгрупп из $\mathfrak{L}(G)$ не более чем счетно.*

Основной результат статьи — доказательство этой гипотезы для метризуемых групп. Частично результаты данной работы анонсированы в [2].

Введем некоторые обозначения: $\mathfrak{M}(G)$, $\mathfrak{K}(G)$, $n\mathfrak{K}(G)$ — множества монотетичных, компактных и некомпактных подгрупп из $\mathfrak{L}(G)$, e — единица группы G, $\simeq$ — знак топологического изоморфизма, $\langle X\rangle$ — наименьшая замкнутая подгруппа, содержащая подмножество $X \subseteq G$. Если $g \in G$, а $\langle g\rangle$ компактна (бесконечна и дискретна), g называется компактным (чистым) элементом. Топологическая группа называется компактно покрываемой, если любой ее элемент компактен. Если $A, B \in \mathfrak{L}(G)$ и $A \subseteq B$, то $[A, B] = \{X \in \mathfrak{L}(G) : A \subseteq X \subseteq B\}$. Далее подгруппами топологической группы называются лишь замкнутые подгруппы.

Лемма 1. *Пусть G — топологическая группа, $N \subseteq F \subseteq A$ — подгруппы из G, причем N открыта и инвариантна в A, а F/N конечнопорождена. Тогда найдутся такие окрестность $\mathfrak{A}$ подгруппы A в $\mathfrak{L}(G)$ и окрестность U единицы из G, что для любой подгруппы $B \in \mathfrak{A}$ существует такая подгруппа $M \subseteq B$, что $F/N \simeq M/L$, где $L = M \cap NU$.*

Доказательство. Пусть $F = \langle f_1, \dots, f_n, N\rangle$, $A = \bigcup_{\alpha \in I} a_\alpha N$ — разложение A на смежные классы по N. Возьмем такую окрестность V единицы из G, что $VV^{-1} \cap A = N$. Тогда $a_\alpha NV \cap a_\beta NV = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$. Далее подберем открытую симметричную окрестность U единицы из G, удовлетворяющую следующим условиям: $f_i^{-1}Uf_iU \subseteq V$, $f_iU^2f_i \subseteq V$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Положим $\mathfrak{A} = D_1(AU) \cap D_2(f_1U) \cap \ldots \cap D_2(f_nU)$. Пусть $B \in \mathfrak{A}$, $x_1 \in f_1U \cap \cap B, \ldots, x_n \in f_nU \cap B$, $\omega(z_1, \ldots, z_n)$—групповое слово от n переменных. Индукцией по длине $l(\omega)$ слова ω покажем, что $\omega(x_1, \ldots, x_n) \in \omega(f_1, \ldots, f_n)NU$. Так как $\omega(x_1, \ldots, x_n) \in B \subseteq AU$ и $U \subseteq V$ в силу выбора окрестности V достаточно убедиться лишь в том, что $\omega(x_1, \ldots, x_n) \in \omega(f_1, \ldots, f_n)NV$.

1. $l(\omega) = 1$. Если $\omega(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, то $x_i \in f_iU \subseteq f_iNU$. Если $\omega(x_1, \ldots \ldots, x_n) = x_i^{-1}$, то $x_i^{-1} \in Uf_i^{-1} = f_i^{-1}(f_iUf_i^{-1}) \subseteq f_i^{-1}V \subseteq f_i^{-1}NV$.

2. Допустим, утверждение справедливо для всех слов ω', $l(\omega') \leqslant k$.

3. $l(\omega) = k + 1$. Тогда $\omega(x_1, \ldots, x_n) = \omega_1(x_1, \ldots, x_n)x_i^t$, где $l(\omega_1) = k$, $t = \pm 1$. По предположению индукции $\omega_1(x_1, \ldots, x_n) \in \omega_1(f_1, \ldots, f_n)NU$. Если $t = 1$, то $\omega(x_1, \ldots, x_n) \in \omega_1(f_1, \ldots, f_n)NUf_iU = \omega_1(f_1, \ldots, f_n)Nf_i \times \times (f_i^{-1}Uf_iU) \subseteq \omega(f_1, \ldots, f_n)NV$. Если $t = -1$, то $\omega(x_1, \ldots, x_n) \in \omega_1(f_1, \ldots \ldots, f_n)NU(Uf_i^{-1}) = \omega_1(f_1, \ldots, f_n)Nf_i^{-1}(f_iU^2f_i^{-1}) \subseteq \omega(f_1 \ldots, f_n)NV$.

Положим $M = \langle x_1 \ldots, x_n \rangle$, $L = M \cap NU$. Если $\omega(x_1, \ldots, x_n) \in L$, то $\omega(x_1, \ldots \ldots, x_n) \in NU$ и $\omega(x_1, \ldots, x_n) \in \omega(f_1, \ldots, f_n)NU$. Значит, $NU \cap \omega(f_1, \ldots, f_n) \times \times NU \neq \varnothing$ и в силу выбора U $\omega(f_1, \ldots, f_n) \in N$. Учитывая это, покажем, что L — подгруппа M.

Пусть $\omega_1(x_1, \ldots, x_n), \omega_2(x_1, \ldots, x_n) \in L$. Тогда $\omega_1(f_1, \ldots, f_n)$, $\omega_2(f_1, \ldots \ldots, f_n) \in N$ и $\omega_1(x_1, \ldots, x_n)\omega_2^{-1}(x_1, \ldots, x_n) \in \omega_1(f_1, \ldots, f_n)\omega_2^{-1}(f_1, \ldots, f_n)NU = NU$, $\omega_1(x_1, \ldots, x_n)\omega_2^{-1}(x_1, \ldots, x_n) \in L$. Пусть l_1, l_2 — произвольные элементы из L. Предположим, что $l = l_1l_2^{-1} \notin L$. Так как $l \in B$, найдется такое $\alpha \in I$, что $l \in a_\alpha NU$ и $a_\alpha NU \cap NU = \varnothing$. Поскольку подмножество L открыто в M, в окрестностях элементов l_1, l_2 найдутся такие элементы $\omega_1'(x_1, \ldots, x_n)$, $\omega_2'(x_1, \ldots, x_n) \in L$, что $s = \omega_1'(x_1, \ldots, x_n)(\omega_2'(x_1, \ldots, x_n))^{-1} \in \in a_\alpha NU$. Последнее невозможно, так как по доказанному выше $s \in NU$. Если $\omega(x_1, \ldots, x_n) \in L$, то $\omega(f_1, \ldots, f_n) \in N$ и $x_i^{-1}\omega(x_1, \ldots, x_n)x_i \in f_i^{-1}\omega(f_1, \ldots \ldots, f_n)f_iNU = NU$. Значит, подгруппа L инвариантна в M.

Отображение φ F/N на M/L зададим формулой $\varphi(\omega(f_1, \ldots, f_n)N) = = \omega(x_1, \ldots, x_n)L$. Проверим корректность определения φ. Пусть $\omega_1(f_1, \ldots \ldots, f_n)N = \omega_2(f_1, \ldots, f_n)N$. Тогда $\omega_1(x_1, \ldots, x_n)\omega_2^{-1}(x_1, \ldots, x_n) \in \omega_1(f_1, \ldots \ldots, f_n)\omega_2^{-1}(f_1, \ldots, f_n)NU = NU$, следовательно, $\omega_1(x_1, \ldots, x_n)\omega_2^{-1}(x_1, \ldots \ldots, x_n) \in L$. Непосредственно из определения вытекает, что φ — гомоморфизм. Если $\varphi(\omega(f_1, \ldots, f_n)N) = \omega(x_1, \ldots, x_n)L = L$, то $\omega(x_1, \ldots, x_n) \in L$; значит, $\omega(f_1, \ldots, f_n) \in N$. Таким образом, ядро φ тривиально и лемма доказана.

Следствие 1. *Если подгруппа A топологической группы G есть точка прикосновения множества монотетичных (нильпотентных, разрешимых) подгрупп из G, то для любой открытой и инвариантной в A подгруппы N A/N локально циклическая (локально нильпотентная, локально разрешима).*

Замечание 1. Назовем топологическую группу G промонотетичной, если в любой окрестности единицы из G найдется такая инвариантная подгруппа N, что G/N монотетична. Если любая конечнопорожденная в топологическом смысле подгруппа из G промонотетична, G называется локально промонотетичной. Из следствия 1 вытекает, что если G имеет полную систему окрестностей единицы, состоящую из подгрупп (инвариантных подгрупп), то множество локально промонотетичных (локально пронильпотентных, локально проразрешимых) подгрупп из G замкнуто в $\mathfrak{L}(G)$. Аддитивная группа R поля вещественных чисел — пример топологической группы G с незамкнутым в $\mathfrak{L}(G)$ множеством локально промонотетичных подгрупп. Возникает вопрос: замкнуто ли множество локально пронильпотентных (локально проразрешимых) подгрупп в пространстве $\mathfrak{L}(G)$ произвольной топологической группы G? Отметим также, что из результатов работы [3] следует замкнутость в S-топологии (а значит, и в E-топологии) множеств RN-, RI-, Z-подгрупп локально компактной группы G. Неизвестно, верно ли это утверждение для произвольной топологической группы.

С л е д с т в и е 2. *Если пространство* $\overline{\mathfrak{M}(G)}$ *финально компактно, то для любой открытой подгруппы* H *из* $G\ |G:H|\leqslant\aleph_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G=\bigcup_{\alpha\in I} g_\alpha H$ — разложение G на смежные классы по H, $\mathfrak{N}=\{\langle g_\alpha\rangle,\ \alpha\in I\}$. Предположим, что $|I|>\aleph_0$. Так как $\forall\alpha\in I\ \langle g_\alpha\rangle\subseteq\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} g_\alpha^n H$, $|\mathfrak{N}|>\aleph_0$. Противоречие с финальной компактностью $\overline{\mathfrak{M}(G)}$ получим, построив для каждой подгруппы $K\in\overline{\mathfrak{N}}$ такую окрестность $\mathfrak{A}_K$, что $|\mathfrak{A}_K\cap\mathfrak{N}|\leqslant\aleph_0$. По следствию 1 дискретная группа $K/K\cap H$ локально циклическая, а следовательно, не более чем счетна. Значит, $KH\subseteq\subseteq\bigcup_{\beta\in J} g_\beta H$, $J\subseteq I$, $|J|\leqslant\aleph_0$. Положим $\mathfrak{A}_K=D_1(KH)$, $I'=\{\alpha\in I:\langle g_\alpha\rangle\in\mathfrak{A}_K\}$. Поскольку $\forall\alpha\in I'\ g_\alpha\in\bigcup_{\beta\in J} g_\beta H$, то $|I'|\leqslant\aleph_0$. Значит, $|\mathfrak{N}\cap\mathfrak{A}_K|\leqslant|I'|\leqslant\aleph_0$.

Следующая лемма принадлежит Ю. А. Комарову.

Л е м м а 2. *Пусть* H — *σ-компактная подгруппа локально компактной метризуемой группы* G. *Тогда найдется такая окрестность* $\mathfrak{A}$ *подгруппы* H, *что любая некомпактная подгруппа из* $\mathfrak{A}$ *содержится в* H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H=\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, H_n — компактные подмножества, $\{V_n\}$ — счетная база компактных окрестностей единицы и $\forall n\ V_{n+1}\subseteq\subseteq V_n$. Положим $\mathfrak{A}=D_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_nV_n\right)$. Допустим, F — некомпактная подгруппа из G, $f\in F$. Фиксируем произвольное натуральное число m и положим $K_m=\bigcup_{n=1}^{m} H_nV_n$. Ясно, что $F\setminus(K_m\cup K_mf^{-1})\neq\varnothing$. Пусть $g\in F\setminus(K_m\cup K_mf^{-1})$. Тогда $g\notin K_m$ и $gf\notin K_m$. Значит $g,\ gf\in\bigcup_{n=m+1}^{\infty} H_nV_n\subseteq HV_{m+1}$. Далее, $f==g^{-1}(gf)\in V_{m+1}^{-1}HV_{m+1}$. В силу произвольности выбора m $f\in H$, т. е. $F\subseteq H$.

Л е м м а 3. *Пусть локально компактная группа* G *удовлетворяет второй аксиоме счетности. Если подмножество* $\mathfrak{F}\subseteq n\,\mathfrak{K}(G)$ *финально компактно и* $|\mathfrak{F}|>\aleph_0$, *то* $\mathfrak{F}$ *содержит бесконечную убывающую цепочку подгрупп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что ввиду финальной компактности $\mathfrak{F}$ для любого несчетного замкнутого в $\mathfrak{F}$ помножества $\mathfrak{F}'$ найдется такая подгруппа $F'\in\mathfrak{F}'$, любая окрестность которой в $\mathfrak{F}'$ несчетна.

Положим $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{F}$ и выберем подгруппу $F_1\in\mathfrak{F}_1$, любая окрестность которой в $\mathfrak{F}_1$ несчетна. Если $\mathfrak{A}_1=[\langle e\rangle, F_1]$, то по лемме 2 $\mathfrak{A}_1\cap\mathfrak{F}_1$ — окрестность подгруппы F_1 в $\mathfrak{F}_1$. Значит, $|\mathfrak{A}_1\cap\mathfrak{F}_1|>\aleph_0$. Пусть $\{U_n,\ n=1,2,\ldots\}$ — счетная база топологии F_1, $\mathfrak{N}_n=\{A\in\mathfrak{A}_1\cap\mathfrak{F}_1: A\cap U_n=\varnothing\}$. Так как $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{N}_n==(\mathfrak{A}_1\cap\mathfrak{F}_1)\setminus\{F_1\}$, найдется такое натуральное m, что $|\mathfrak{N}_m|>\aleph_0$. Поскольку U_m открыто, $\mathfrak{N}_m$ замкнуто в $\mathfrak{F}_1$. Положим $\mathfrak{F}_2=\mathfrak{N}_m$ и выберем под группу $F_2\in\mathfrak{F}_2$, любая окрестность которой несчетна. Продолжая этот процесс, построим убывающую последовательность $F_1\supset F_2\supset\ldots\supset F_n\supset\ldots$ подгрупп из $\mathfrak{F}$.

С л е д с т в и е *Если локально компактная группа* G *удовлетворяет второй аксиоме счетности, то любое компактное подмножество* $\mathfrak{F}\subseteq\subseteq n\,\mathfrak{K}(G)$ *не более чем счетно.*

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 3 и следствия 2 из леммы 2 работы [4].

З а м е ч а н и е 2. Пусть дискретная группа G равна прямому произведению групп $\{G_\alpha\}$, $\alpha\in J$, $|J|>\aleph_0$, $|G_\alpha|>1$. Обозначим через F_α подгруппу всех элементов из G, проекции которых на G_α равны единице. Положим $\mathfrak{F}=\{F_\alpha,\alpha\in J\}\cup\{G\}$. Так как любая окрестность G содержит почти все подгруппы F_α, $\mathfrak{F}$ компактно. Таким образом, ни лемма 3 ни следствие из нее для групп с первой аксиомой счетности, вообще говоря, не верны.

Лемма 4. *Если G локально компактна, а $\mathfrak{M}(G)$ либо $\overline{\mathfrak{M}(G)}$ финально компактно, то G содержит открытую компактную подгруппу.*

Доказательство. Ввиду лемм 2, 5 из [1], теоремы Картана — Мальцева — Ивасавы и соотношений $\overline{\mathfrak{M}(R)} = \mathfrak{L}(R)$, $\mathfrak{M}(R) = \mathfrak{L}(R) \setminus \{R\}$, достаточно убедиться, что пространства $\mathfrak{L}(R)$ и $\mathfrak{L}(R) \setminus \{R\}$ нефинально компактны. Применяя лемму 2, заключаем, что любая собственная подгруппа из R изолирована в $\mathfrak{L}(R)$. Следовательно, пространство $\mathfrak{L}(R) \setminus \{R\}$ нефинально компактно. Пусть U — связная компактная симметричная окрестность нейтрального элемента e из R, $\mathfrak{A} = D_2(U \setminus \{e\})$ — окрестность R в $\mathfrak{L}(R)$. Ясно, что для любого $r \notin U$ $\langle r \rangle \notin \mathfrak{A}$. Поэтому $|\mathfrak{L}(R) \setminus \mathfrak{A}| > \aleph_0$. Тем самым доказано, что и пространство $\mathfrak{L}(R)$ не финально компактно.

Лемма 5. *Если G локально компактна, а пространство $\mathfrak{L}(G)$ σ-компактно, то нормализатор любой некомпактной подгруппы из G открыт.*

Доказательство. Пусть H — некомпактная подгруппа из $\mathfrak{L}(G)$, U — компактная окрестность единицы из G, $\mathfrak{N} = \{x^{-1}Hx : x \in U\}$. Нетрудно убедиться, что подмножество $\mathfrak{N}$ замкнуто в $\mathfrak{L}(G)$. Так как $\mathfrak{L}(G)$ σ-компактно, $\mathfrak{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}_n$, $\mathfrak{N}_n$ — компактные подмножества. Положим $U_n = \{x \in U : x^{-1}Hx \in \mathfrak{N}_n\}$. Из компактности $\mathfrak{N}_n$ следует замкнутость U_n в G. Поскольку $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, по лемме о категории найдется такое m, что U_m имеет непустую внутренность. Значит, для некоторого элемента $y \in U_m$ и окрестности W единицы $Wy \subseteq U_m$.

Допустим, что нормализатор H не открыт. Тогда найдется такая направленность элементов $\{y_\alpha\}$, $\alpha \in J$, сходящаяся к единице, что $y_\alpha^{-1}Hy_\alpha \not\subseteq H$. Начиная с некоторого номера $\beta \in J$ $y_\alpha \in W$. Рассмотрим направленность подгрупп $\{y^{-1}y_\alpha^{-1}Hy_\alpha y,\ \alpha > \beta\}$. Так как при $\alpha > \beta$ $y_\alpha y \in U_m$, то $y^{-1}y_\alpha^{-1}Hy_\alpha y \in \mathfrak{N}_m$. В силу компактности $\mathfrak{N}_m$ направленность $\{y^{-1}y_\alpha^{-1}Hy_\alpha y,\ \alpha > \beta\}$ должна иметь предельную точку. Ясно, что этой предельной точкой может быть лишь подгруппа $y^{-1}Hy$. Так как $\mathfrak{N}_m$ не содержит бесконечных дискретных замкнутых подмножеств, по лемме 2 из [4] для некоторого $\gamma > \beta$ $y^{-1}y_\gamma^{-1}Hy_\gamma y \subseteq y^{-1}Hy$, что противоречит $y_\gamma^{-1}Hy_\gamma \not\subseteq H$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть φ — непрерывный гомоморфизм топологической группы G на нормальную топологическую группу H. Формула $\Phi(X) = \overline{\varphi(X)}$ задает непрерывное отображение $\Phi : \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(H)$.*

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой, как в лемме 5 из [1].

Теорема. *Пусть локально компактная группа G содержит некомпактную метризуемую подгруппу H. Пространство $\mathfrak{L}(G)$ σ-компактно тогда и только тогда, когда G σ-компактна и $|n\mathfrak{K}(G)| \leqslant \aleph_0$.*

Доказательство. Необходимость По лемме 4 и следствию 2 из леммы 1 G содержит открытую компактную подгруппу счетного индекса. Следовательно, G σ-компактна. Заметим, что σ-компактность и метризуемость влекут вторую аксиому счетности. Поэтому ввиду следствия из леммы 3 и замкнутости $n\mathfrak{K}(G)$ в $\mathfrak{L}(G)$ достаточно показать, что G метризуема. Допустим противное. По лемме 5 подгруппа H нормализуется некоторой открытой компактной подгруппой U из G. Положим $P = HU$, $K = HU/H$. Ясно, что K компактна и неметризуема. Рассмотрим семейство $\{N_\alpha\}$, $\alpha \in I$, всех инвариантных подгрупп из K таких, что K/N_α метризуема. Отметим, что это семейство замкнуто относительно счетных пересечений.

Пусть $\mathfrak{N} = [H, P] \subseteq \mathfrak{L}(G)$. Так как $\mathfrak{L}(G)$ σ-компактно, а отрезок $[H, P]$ замкнут в $\mathfrak{L}(G)$, то $\mathfrak{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}_n$, $\mathfrak{N}_n$ — компактные подмножества.

Если f — естественный гомоморфизм P на K, то обозначим $\mathfrak{A} = \{P_\alpha = f^{-1}(N_\alpha),\ \alpha \in I\}$. По следствию 2 из леммы 2 работы [4] $\mathfrak{N}_n$ не содержит бесконечных убывающих цепочек подгрупп. Значит, для любого натурального n найдется такое $\alpha_n \in I$, что $[H, P_{\alpha_n}] \cap (\mathfrak{N}_n \cap \mathfrak{A}) = \{P_{\alpha_n}\}$.

Положим $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\alpha_n}$. Ясно, что $f^{-1}(N) \in \mathfrak{A}$ и для любого натурального n $f^{-1}(N) \subseteq P_{\alpha_n}$. Далее, K неметризуема, но аппроксимируется метризуемыми группами. Поэтому найдется такая инвариантная подгруппа M из K, что K/M метризуема и $M \subset N$. Так как $f^{-1}(M) \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$, найдется такое натуральное m, что $f^{-1}(M) \in \mathfrak{N}_m \cap \mathfrak{A}$. Однако $f^{-1}(M) \subset P_{\alpha_m}$. Получено противоречие с тем, что $[H, P_{\alpha_m}] \cap (\mathfrak{N}_m \cap \mathfrak{A}) = \{P_{\alpha_m}\}$.

Достаточность. Поскольку $|n\mathfrak{K}(G)| \leqslant \aleph_0$, достаточно проверить, что $\mathfrak{K}(G)$ σ-компактно. Пусть $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n — компактные подмножества и для любого натурального n $G_n \subseteq G_{n+1}$. Положим $\mathfrak{N}_n = \{A \in \mathfrak{K}(G) : A \subseteq G_n\}$. Ясно, что $\mathfrak{K}(G) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}_n$. По лемме 1 из [4] все подмножества $\mathfrak{N}_n$ компактны в $\mathfrak{L}(G)$, и теорема доказана.

Замечание 3. Автор не располагает примерами некомпактных локально компактных групп без некомпактных метризуемых подгрупп.

Следствие 1. *Если локально компактная группа G метризуема либо содержит чистые элементы, то пространство $\mathfrak{L}(G)$ σ-компактно тогда и только тогда, когда G σ-компактна и $|n\mathfrak{K}(G)| \leqslant \aleph_0$.*

Следствие 2. *Пространство $\mathfrak{L}(G)$ дискретной группы G σ-компактно тогда и только тогда, когда $|\mathfrak{L}(G)| \leqslant \aleph_0$.*

Следствие 3. *Пространство $\mathfrak{L}(G)$ свободной по Маркову топологической группы G вполне регулярного пространства X σ-компактно тогда и только тогда, когда $|X| = 1$.*

Доказательство. Необходимость. Допустим вначале, что X несвязно. Тогда $X = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 — непустые непересекающиеся открыто-замкнутые подмножества из X. Рассмотрим свободную дискретную группу F ранга 2 с образующими a_1 и a_2. Положим $f(x) = a_i$, если $x \in X_i$, $i = 1, 2$. Отображение $f : X \to F$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $G \to F$. По лемме 6 $\mathfrak{L}(F)$ σ-компактно. Однако $|\mathfrak{L}(F)| > \aleph_0$, что противоречит следствию 2.

Пусть теперь X связно и $|X| > 1$. Рассмотрим такое непрерывное отображение $g : X \to R$, что $|g(R)| > 1$. Ввиду связности $g(R)$ алгебраически порождает R. Поэтому существует непрерывный гомоморфизм G на R. По лемме 6 $\mathfrak{L}(R)$ σ-компактно, что противоречит следствию 1.

Достаточность вытекает из следствия 2 и того, что в случае $X = 1$ G — дискретная свободная циклическая группа.

Замечание 4. Следствие 3 останется справедливым и для свободных по Граеву топологических групп при условии, что $|X| \leqslant 2$.

Замечание 5. Существенно продвинуться в изучении топологических групп с финально компактным пространством подгрупп не удалось. Гипотеза здесь следующая. Пространство $\mathfrak{L}(G)$ локально компактной группы G финально компактно тогда и только тогда, когда G σ-компактна, а $n\mathfrak{K}(G)$ представимо в виде объединения счетного числа линейно упорядоченных по включению подмножеств.

В заключение приведем без доказательств несколько результатов о строении топологических групп, если условия финальной и σ-компактности накладываются лишь на некоторые подмножества пространств их подгрупп.

Предложение 1. *Пространство $\mathfrak{M}(G)$ локально компактной группы G финально компактно тогда и только тогда, когда G дискретна и счетна либо компактно покрываема и σ-компактна.*

Предложение 2. *Для локально компактной группы G финальная компактность* $\mathfrak{M}(G)$ *эквивалентна σ-компактности* $\mathfrak{M}(G)$.

Предложение 3. *Если G локально компактна, а* $\overline{\mathfrak{M}(G)}$ *финально компактно, то G дискретна и счетна либо компактно покрываема и σ-компактна. Обратное, вообще говоря, не верно.*

Предложение 4. *Пространство* $\overline{\mathfrak{M}(G)}$ *локально компактной группы G σ-компактно тогда и только тогда, когда G σ-компактна и* $|\overline{\mathfrak{M}(G)} \cap n\mathfrak{R}(G)| \leqslant \aleph_0$.

1. *Протасов И. В.* Топологические группы с компактной решеткой замкнутых подгрупп.— Сиб. мат. журн., 1979, 20, № 2, с. 378—385.
2. *Протасов И. В.* О группах с компактным пространством подгрупп.—В кн.: VIII Всесоюз. симпоз. по теории групп : Тез. докл. Киев : Ин-т математики, 1982, с. 103—104.
3. *Протасов И. В.* Локальные теоремы для топологических групп.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1979, 43, № 6, с. 1430—1440.
4. *Комаров Ю. А., Протасов И. В.* Компактность в решетке продгрупп топологической группы.— Укр. мат. журн., 1981, 33, № 2, с. 184—189.

Киев. гос. ун-т

Поступила 05.07.83