УДК 519.21

И. С. Молчанов

Структура строго марковских маркированных случайных замкнутых множеств

В работах [1—3] изучались строго марковские или регенеративные случайные множества в R_+ и R^1. Понятие марковского случайного множества является обобщением понятия регенеративного явления, введенного в [4].

В настоящей работе вводится понятие маркированных строго марковских случайных замкнутых множеств (СЗМ), представляющих собой специальный класс маркированных СЗМ, рассмотренных в работе [5]. В теории стандартных регенеративных явлений объектом, соответствующим маркированному строго марковскому СЗМ, являются связанные системы регенеративных явлений, изучавшиеся в работе [6].

Пусть R_+ — множество неотрицательных вещественных чисел; $\mathscr{M}_m^0$ — семейство упорядоченных наборов замкнутых в R_+ попарно непересекающихся множеств $(M_{(1)}, \ldots, M_{(m)})$ таких, что $0 \in M_*$, где $M_* = \bigcup_{i=1}^{m} M_{(i)}$; L_m — множество $\{1, \ldots, m\}$, снабженное дискретной топологией; $\mathscr{K}(R_+ \times L_m)$ — семейство компактных подмножеств $R_+ \times L_m$; σ_m^0 — σ-алгебра, индуцированная σ-алгеброй Матерона σ_f на классе множеств $\mathscr{M}_m^0$, т. е. σ-алгебра, порожденная классами $\{M \in \mathscr{M}_m^0 : M \cap K \neq \varnothing\}$, $K \in \mathscr{K}(R_+ \times L_m)$ (подробное определение и свойства этой σ-алгебры см. в работах [5, 7]); P — некоторая вероятность на σ_m^0; $\widehat{\sigma}_m^0$ — пополнение σ_m^0 по мере P; $\mathscr{B}(R_+)$ — борелевская σ-алгебра в R_+.

Будсм говорить, что вероятность P на пространстве $(\mathscr{M}_m^0, \widehat{\sigma}_m^0)$ задает маркированное СЗМ (см. [5]).

Для любых $M \in \mathscr{M}_m^0$, $t \geqslant 0$ обозначим $z_t = \sup\{s \leqslant t : s \in M_*\}$, $x_t = t - z_t$, $z_t^+ = \inf\{s \geqslant t : s \in M_*\}$; если $z_t \in M_{(i)}$, $z_t^+ \in M_{(j)}$, полагаем $\beta_t = i$, $\beta_t^+ = j$; $M_t = M \cap ([0, t] \times L_m)$, $M^t = M \cap ([t, \infty) \times L_m)$; $M + t$ — множество, получаемое сдвигом всех компонент множества M вправо на t.

Для любого $A \in R_+$ пусть $\tilde{A}$ — множество точек x, принадлежащих A, таких, что x — изолированная точка, либо существует последовательность $\{x_n, n \geqslant 1\}$ точек из A такая, что $x_n \downarrow x$, $n \to \infty$.

Обозначим для любого $t \geqslant 0$ через $\mathfrak{F}_t$ P-пополнение минимальной σ-алгебры, относительно которой измеримо отображение $M_t : \mathscr{M}_m^0 \to \mathscr{M}_m^0$. Поток $(\mathfrak{F}_t)$ будем называть натуральным потоком, порожденным случайным множеством M. Легко видеть, что поток $(\mathfrak{F}_t)$ непрерывен справа.

Определение. *Маркированное СЗМ* $M = (M_{(1)}, \ldots, M_{(m)})$, *для которого* $0 \in M_*$ *п. н., назовем строго марковским, если для любого* $(\mathfrak{F}_t)$*-момента остановки* τ *такого, что* $\tau \in \tilde{M}_* \cup \{\infty\}$ *п. н., и для любых компактов* $K_1, K_2 \in \mathscr{K}(R_+ \times L_m)$ *выполняются условия:* (A1) *события* $\{M^\tau - \tau \cap K_1 \neq \varnothing\}$, $\{M_\tau \cap K_2 \neq \varnothing\}$ *условно независимы при данном* β_τ и событии $\{\tau < \infty\}$; (A2) $P\{M^\tau - \tau \cap K_1 \neq \varnothing / \beta_\tau = i, \ \tau < \infty\} = P\{M \cap K_1 \neq \varnothing / \beta_0 = i\}$, $i = \overline{1, m}$.

Замечание 1. Исходя из структуры маркированных СЗМ и учитывая результаты работы [5], класс тех компактов, для которых проверяются условия (A1), (A2), можно значительно сузить.

Замечание 2. Строго марковское маркированное СЗМ в случае $m = 1$ будем называть строго марковским СЗМ.

Напомним, что строго марковский однородный процесс (ν_t, ζ_t) в фазовом пространстве $L_m \times R_+$ называется процессом с независимыми приращениями в случайной среде, если распределение (ν_t, ζ_t) при условии $\zeta_0 = x$, $\nu_0 = i$ совпадает с распределением процесса $(\nu_t, \zeta_t + x)$ при условии $\zeta_0 = 0$, $\nu_0 = i$ [8, с. 63].

Если процесс (ν_t, ζ_t) является строго марковским относительно полного потока σ-алгебр, непрерывен справа, имеет пределы слева, $\zeta_0 = 0$ п. н. и компонента ξ_t возрастает и имеет п. н. ненулевые скачки во все моменты скачков первой компоненты, будем называть процесс (ν_t, ξ_t) субординатором в случайной среде.

Из общей формулы [8, с. 64] в этом случае следует, что

$$\| E_i (\exp\{-s\zeta_t\}, \ \nu_t = j) \|_{i,j=1}^m = \exp\{-tA(s)\}, \tag{1}$$

где $\operatorname{Re} s \geqslant 0$, E_i — условное математическое ожидание при условии $\nu_0 = i$, $\zeta_0 = 0$,

$$A(s) = A_0 - \int^{\infty} L_0(dy) \exp\{-sy\} + A_1 s + \int_0^{\infty} L_1(dy)(1 - \exp\{-sy\}). \tag{2}$$

Здесь $A_0, A_1, L_1(dy)$ — диагональные матрицы с элементами соответственно $a_i^0, a_i^1, l_i(dy)$, причем $l_i(dy) \geqslant 0$, $l_i\{0\} = 0$, $a_i^0, a_i^1 \geqslant 0$, $\int_0^{\infty} (y \wedge 1) l_i(dy) <$

$<\infty$. Матрица $L_0(dy)$ имеет нули на диагонали, а ее недиагональные элементы $l_{ij}(dy)$ неотрицательны, $l_{ij}\{0\}=0$ и $a_i^0-\sum_{i\neq j} l_{ij}[0, \infty)=0$, $i=\overline{1, m}$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы маркированное СЗМ M было строго марковским, необходимо и достаточно, чтобы существовал субординатор в случайной среде (ν_t, ζ_t), заданный на том же вероятностном пространстве, что и множество M, для которого M — замкнутый образ, т. е. для любого $i=\overline{1, m}$ $M_{(i)}$ совпадает с замыканием множества $\{\zeta_t : t\geqslant 0, \nu_i = i\}$.*

Следующие теоремы дают некоторые важные примеры строго марковских маркированных СЗМ.

Теорема 2. *Пусть (y_t, η_t) — строго марковский относительно полного потока σ-алгебр, однородный, непрерывный справа и имеющий пределы слева процесс в фазовом пространстве $E\times L_m$, где E — локально-компактное пространство, а точка x_0 из E такова, что $y_0=x_0$ п. н. и скачки η_t могут происходить лишь в моменты пребывания y_{t-}, y_t вне x_0, т. е. $P\left\{\bigcup_{t\in R_+}\{\eta_{t-}\neq\eta_t, \{y_t, y_{t-}\}\ni x_0\}\right\}=0$. Пусть для $i=\overline{1, m}$ A_i есть замыкание множества $\{t\geqslant 0: y_t=x_0, \eta_t=i\}$. Тогда СЗМ $A=(A_1, \ldots, A_m)$ — маркированное строго марковское.*

Теорема 3. *Пусть y_t — строго марковский относительно полного потока σ-алгебр, однородный, непрерывный справа и имеющий пределы слева процесс в локально-компактном фазовом пространстве E, а $\{x_1, \ldots, x_m\}$ — набор различных точек из E такой, что $y_0\in\{x_1, \ldots, x_m\}$ п. н. и $P\left\{\bigcup_{t\in R_+}\bigcup_{i,j\in L_m, i\neq i}\{y_t=x_j, y_{t-}=x_i\}\right\}=0$. Пусть A_i есть замыкание множества $\{t\geqslant 0: y_t=x_i\}$, $i=\overline{1, m}$. Тогда $A=(A_1, \ldots, A_m)$ — строго марковское маркированное СЗМ.*

Замечание 3. Условие теоремы 3 выполняется, в частности, если y_t — процесс с непрерывными траекториями.

На основании теоремы 1 можно находить сопровождающий функционал (см. [7, с. 53]) маркированных СЗМ подобно тому, как это сделано для немаркированных множеств в работе [9]. Положим $\Phi(t,z)=\| P\{M_*\cap[t, t+z)=\varnothing, \beta^+_{t+z}=j\}\|_{i,j=1}^m$.

Теорема 4. *Двойное преобразование Лапласа матрицы $\Phi(t, z)$ определяется формулой*

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\{-\gamma t-\lambda z\}\Phi(t, z)\,dt\,dz=[A(\gamma)]^{-1}\frac{\lambda A_1(\gamma)-\gamma A_1(\lambda)}{(\lambda-\gamma)\lambda\gamma},$$

где $\gamma>0$, $\lambda>0$, $A(\lambda)$ — матрица, определяемая формулой (2), $A_1(\lambda)=A(\lambda)-A(0)+L_1(\infty)$.

Пример. Пусть w_t — винеровский процесс. Положим для некоторого $a>0$ $M_1=\{t\geqslant 0: w_t=0\}$, $M_2=\{t\geqslant 0: w_t=a\}$. По замечанию 3, множество (M_1, M_2) есть строго марковское маркированное СЗМ. Используя вероятностный смысл элементов матрицы A (см. [8, п. 46]) и свойства винеровского процесса [10, с. 47, 97], можно найти, что $A_0=a^{-1}I$, $L_1(dy)=(2\pi)^{-1/2}y^{-3/2}dy\,I$, где I — единичная матрица, а недиагональные элементы матрицы $L_0(dy)$ одинаковы и имеют преобразование Лапласа $\int_0^\infty \exp(-bt\}\, l_{12}(db)=\sqrt{2t}\,(\operatorname{sh} a\sqrt{2t})^{-1}$. Приступим к доказательству теорем.

Лемма 1. *Поток $(\mathfrak{F}_t)$, порожденный множеством M, есть минимальный полный по мере P поток σ-алгебр, с которым согласован процесс (x_t, β_t).*

Доказательство. Измеримость (x_t, β_t) относительно $\mathfrak{F}_t$ следует из конструкции σ-алгебры $\mathfrak{F}_t$. В самом деле, для любого $t\geqslant 0$ $\{M: x_t(M)>$

$> a\} = \{M : [t - a, t] \cap M_{*t} = \varnothing\} \in \mathfrak{F}_t$. Аналогично проверяется измеримость β_t. Если процесс (x_t, β_t) согласован с полным потоком, то он прогрессивно измерим; следовательно, измеримость отображения M_t вытекает из известной теоремы о проекциях на пространство с полной σ-алгеброй [11, с. 25, Т32].

Для доказательства теоремы 1 необходимо одно утверждение об измеримости случайных процессов.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — полное вероятностное пространство. В дальнейшем под пополнением некоторой σ-алгебры будем подразумевать ее пополнение по мере P.

Теорема 5. *Пусть $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ — непрерывный справа случайный процесс в локально-компактном фазовом пространстве E, натуральный полный поток которого $(\mathfrak{F}_t)$, τ — $(\mathfrak{F}_t)$-момент остановки, δ — точка, не принадлежащая пространству E. Тогда σ-алгебра $\mathfrak{F}_\tau$ совпадает с минимальной полной σ-алгеброй, порожденной процессом* $\tilde{\xi}(\omega) = \begin{cases} \xi_t(\omega), & \omega \in \{t \leqslant \tau\}, \\ \delta & \omega \in \{t > \tau\}. \end{cases}$

Доказательство проводится последовательной проверкой следующих утверждений.

1. σ-алгебра $\mathfrak{F}_{\tau-}$ включается в пополнение σ-алгебры, порожденной процессом $\xi_t^\tau = \begin{cases} \xi_t, & \omega \in \{t < \tau\} \\ \delta, & \omega \in \{t \geqslant \tau\} \end{cases}$.

2. σ-алгебра, порождаемая процессом $\tilde{\xi}_t$, совпадает с пересечением σ-алгебр, порожденных процессами $\xi_t^{\tau+1/n}$, $n \geqslant 1$.

3. $\mathfrak{F}_\tau = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} \mathfrak{F}_{\tau+1/n-}$ (см. [11, с. 71, Т35]).

4. Процесс $\tilde{\xi}_t$ измерим относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}_\tau$, σ-алгебра $\mathfrak{F}_\tau$ является полной.

Применяя теорему 5 к процессу (x_t, β_t) и учитывая результат леммы 1, легко доказать следствие.

Следствие. *Пусть M — маркированное СЗМ, $(\mathfrak{F}_t)$ — его натуральный поток, τ — $(\mathfrak{F}_t)$-момент остановки, $\tau \in M_* \cup \{\infty\}$ п. н. Тогда минимальная полная σ-алгебра, относительно которой измеримо множество M_τ, совпадает с $\mathfrak{F}_\tau$.*

Нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть M* — строго *марковское маркированное СЗМ, $(\mathfrak{F}_t)$ — его натуральный поток, τ — $(\mathfrak{F}_t)$-момент остановки, $\tau \in \tilde{M}_* \cup \{\infty\}$ п. н., φ, ψ — $(\hat{\sigma}_m^0, \mathcal{B}(R_+))$-измеримые функции. Тогда для любых множеств $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(R_+))$ выполняются утверждения:*

(В1) *события $\{\varphi(M^\tau - \tau) \in A_1\}$, $\{\psi(M_\tau) \in A_2\}$ условно независимы при данном β_τ* и *событии $\{\tau < \infty\}$;*

(В2) $P\{\varphi(M^\tau - \tau) \in A_1/\beta_\tau = i, \tau < \infty\} = P\{\varphi(M) \in A_1/\beta_0 = i\}$, $i = \overline{1, m}$.

Замечание 4. Используя структуру σ-алгебры $\mathfrak{F}_\tau$, выясненную в следствии, и лемму 2, можно показать, что для строго марковского СЗМ A множество $\tilde{A}$ является регенеративным случайным множеством, определение которого дано в работе [2, гл. 3].

Лемма 3. *Пусть M — строго марковское маркированное СЗМ. Тогда существует возрастающий процесс $\zeta_t(M)$, $t \geqslant 0$, заданный на вероятностном пространстве $(\mathcal{M}_m^0, \hat{\sigma}_m^0, P)$, такой, что выполняются условия:*

(С1) *образ процесса ζ_t совпадает с $\tilde{M}_*$, т. е. $\{\zeta_s : s \geqslant 0\} = \tilde{M}_*$;*

(С2) *для любого $s \geqslant 0$ случайная величина ζ_s является $(\mathfrak{F}_t)$-моментом остановки;*

(С3) *для любых $t \geqslant s \geqslant 0$ $\zeta_t(M) - \zeta_s(M) = \zeta_{t-s}(M^{\zeta_s}\zeta_s)$ п. н. по мере P.*

Доказательство. Используя замечание 4 и результаты работ [2, гл. 3; 13, с. 93, (6.13)] легко доказать, что для любого $i = \overline{1,m}$ существует возрастающий $(\mathfrak{F}_t)$-согласованный процесс L_t^i, множество точек роста которого (см. [11, с. 173]) совпадает с $M_{(i)}$, причем для любых $(\mathfrak{F}_t)$-моментов остановки τ, σ таких, что $\tau \leqslant \sigma$, $\tau \in \tilde{M}_{(i)}$ п. н., имеет место равенство

$$L_\sigma^i(A) - L_\tau^i(A) = L_{\sigma-\tau}^i(A^\tau - \tau) \text{ п. н.,} \tag{3}$$

где A — произвольное замкнутое подмножество R_+.

Положим для любого $M = (M_{(1)}, \ldots, M_{(m)}) \in \mathscr{M}_m^0$ $L_t(M) = \sum_{i=1}^m L_t^i(M_{(i)})$, $t \geqslant 0$. Процесс L_t является возрастающим, $(\mathfrak{F}_t)$-согласованным, и его множество точек роста совпадает с множеством M_* п. н. Легко показать, что процесс $\zeta_t = \inf\{a \geqslant 0 : L_a > t\}$, $t \geqslant 0$, удовлетворяет условиям (C1), (C2). Полагая в равенствах (3) $\tau = \zeta_s$, $\sigma = \zeta_t$, $s \leqslant t$, $A = M_{(i)}$ и просуммировав их для всех $i = \overline{1, m}$, легко получить утверждение (C3).

Лемма 4. *Пусть непрерывный справа и имеющий пределы слева процесс (ν_t, ζ_t) в фазовом пространстве $L_m \times R_+$ с возрастающими траекториями ζ_t имеет своим замкнутым образом множество M. Пусть $(\mathfrak{G}_t)$ — натуральный полный поток процесса (ν_t, ζ_t), $(\mathfrak{F}_t)$ — натуральный поток, порожденный множеством M, L_t — процесс, обратный к ζ_t, т. е. $L_t = \inf\{s \geqslant 0 : \zeta_s(M) > t\}$, $t \geqslant 0$. Предположим, что для любого $s \geqslant 0$ ζ_s есть $(\mathfrak{F}_t)$-момент остановки. Тогда выполнены утверждения:*

(D1) *для любого $t \geqslant 0$ $\mathfrak{F}_{\zeta_t} = \mathfrak{G}_t$;*

(D2) *для любого $(\mathfrak{F}_t)$-момента остановки τ случайная величина L_τ есть $(\mathfrak{G}_t)$-момент остановки;*

(D3) *для любого $(\mathfrak{G}_t)$-момента остановки σ случайная величина ζ_σ есть $(\mathfrak{F}_t)$-момент остановки.*

Доказательство. Очевидно, что процесс (ν_t, ζ_t) — $(\mathfrak{F}_{\zeta_t})$-согласован, следовательно, $\mathfrak{G}_t \subset \mathfrak{F}_{\zeta_t}$. Так как процесс (ν_t, ζ_t) $(\mathfrak{G}_t)$-согласован, то для любого $t \geqslant 0$ множество M_{ζ_t} является $\mathfrak{G}_t$-измеримым. Как показано в следствии, $\mathfrak{F}_{\zeta_t}$ есть минимальная полная σ-алгебра, относительно которой измеримо множество M_{ζ_t}. Значит, $\mathfrak{G}_t \supset \mathfrak{F}_{\zeta_t}$. Таким образом, $\mathfrak{F}_{\zeta_t} = \mathfrak{G}_t$, $t \geqslant 0$.

Утверждение (D2) следует из того, что для любого $s \geqslant 0$ $\{L_\tau < s\} = \bigcup_{n \geqslant 1} \{\zeta_{s-1/n} \geqslant \tau\} \in \mathfrak{F}_{\zeta_s} = \mathfrak{G}_s$ по свойствам моментов остановки.

Для любого $t \geqslant 0$ $\{\zeta_\sigma < t\} = \bigcup_{n \geqslant 1} \{L_{t-1/n} < \sigma\} \in \mathfrak{G}_{L_t}$, так как для любого $s \geqslant 0$ L_s является $(\mathfrak{G}_t)$-моментом остановки. Из конструкции потока $(\mathfrak{F}_t)$ следует, что случайная величина z_s^+ для любого $s \geqslant 0$ является $(\mathfrak{F}_t)$-моментом остановки. Пусть $\delta \bar{\in} R_+ \cup \{\infty\}$. Рассмотрим процесс

$$(\tilde{\nu}_s, \tilde{\zeta}_s) = \begin{cases} (\nu_s, \zeta_s), & M \in \{s \leqslant L_t\} \\ (0, \delta), & M \in \{s > L_t\} \end{cases}$$

Процесс $(\tilde{\nu}_s, \tilde{\zeta}_s)$ измерим относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}_{z_t^+}$. Например, $\{M : \tilde{\zeta}_s < u\} = [[\{M ; \tilde{\zeta}_s < u\} \cap \{M : u < z_t^+\}] \cup \{M : u > z_t^+\}] \cap \{M : L_t \geqslant s\} \in \mathfrak{F}_{z_t^+}$.

По теореме 5 минимальная полная σ-алгебра, порождаемая процессом $(\tilde{\nu}_s, \tilde{\zeta}_s)$, совпадает с $\mathfrak{G}_{L_t}$. Следовательно, $\mathfrak{G}_{L_t} \subset \mathfrak{F}_{z_t^+}$. Учитывая, что поток $(\mathfrak{F}_{z_t^+})$ непрерывен справа, получим, что случайная величина ζ_σ является $(\mathfrak{F}_{z_t^+})$-моментом остановки. Из леммы 1.1 работы [2] следует, что если $(\mathfrak{F}_{z_t^+})$-момент остановки T удовлетворяет условию $T \in \tilde{M}_*$ п. н., то T является $(\mathfrak{F}_t)$-моментом остановки. Учитывая, что $\zeta_\sigma \in \tilde{M}_*$ п. н., получаем свойство (D3).

Рассмотрим процесс ζ_t, построенный в лемме 3. Положим $\nu_t = \beta_{\zeta_t}$, $\mathfrak{G}_t = \mathfrak{F}_{\zeta_t}$, $t \geqslant 0$. Применяя лемму 4, получаем, что $(\mathfrak{G}_t)$ — натуральный полный поток процесса (ν_t, ζ_t).

Лемма 5. *Для любых* $s \geqslant t \geqslant 0$ $\nu_s(M) = \nu_{s-t}(M^{\zeta_t} - \zeta_t)$.

Доказательство следует из определения процесса β_t и утверждения (С3) леммы 3.

Замечание 5. Утверждение (С3) леммы 3 и лемма 5 остаются в силе, если t, s — $(\mathfrak{G}_t)$-моменты остановки. Этот факт следует из того, что модификации процесса, непрерывного справа, неотличимы от исходного процесса [11, с. 60].

Так как процесс $L_t(\mathfrak{F}_t)$-согласован и $\mathfrak{F}_\infty = \hat{\sigma}^0_m$, то для любого $t \geqslant 0$ функция $L_t(\cdot)$ является $(\hat{\sigma}^0_m, \mathcal{B}(R_+))$-измеримой. Аналогично, функция $\nu_t(\cdot)$ является $(\hat{\sigma}^0_m, 2^{L_m})$-измеримой, где 2^{L_m} — дискретная σ-алгебра в L_m.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть $(\mathfrak{F}_t)$ — натуральный поток случайного множества M. Рассмотрим процесс (ν_t, ζ_t), определенный выше. Множество M является его замкнутым образом. Пусть τ — $(\mathfrak{G}_t)$-момент остановки. По лемме 4, ζ_τ является $(\mathfrak{F}_t)$-моментом остановки, $\zeta_\tau \in \tilde{M}_*$ п. н. Согласно замечанию 5, для любых $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ $(\nu_{\tau+s}, \zeta_{\tau+s} - \zeta_\tau)(M) = (\nu_s, \zeta_s)(M^{\zeta_\tau} - \zeta_\tau)$, $(\nu_{\tau-t}, \zeta_{\tau-t})(M) = (\nu_{\tau-t}, \zeta_{\tau-t})(M_{\zeta_\tau})$. Строгая марковость процесса (ν_t, ζ_t) следует из измеримости функций ν_s, ζ_s относительно $\hat{\sigma}^0_m$ и леммы 2. Полагая $\tau = t$ п. н., получаем, что приращения процесса (ν_t, ζ_t) условно однородны, т. е. распределение $(\nu_{t+s}, \zeta_{t+s} - \zeta_t)$ при условии ν_t не зависит от t. Из строго марковского свойства, условной однородности приращений и строения траекторий процесса (ν_t, ζ_t) следует, что этот процесс — субординатор в случайной среде.

Достаточность. Пусть (ν_t, ζ_t) — субординатор в случайной среде, M — его замкнутый образ. Так как $L_0\{0\} = 0$, то M представляет собой маркированное СЗМ. По лемме 4, натуральный поток $(\mathfrak{F}_t)$ множества M и полный натуральный поток $(\mathfrak{G}_t)$ процесса (ν_t, ζ_t) связаны соотношением $\mathfrak{F}_{\zeta_t} \subset \mathfrak{G}_t$, $t \geqslant 0$. Пусть τ — $(\mathfrak{F}_t)$-момент остановки такой, что $\tau \in \tilde{M}_* \cup \{\infty\}$ п. н., и $\sigma = L_\tau$. По лемме 4 σ является $(\mathfrak{G}_t)$-моментом остановки, причем $\tau = \zeta_\sigma$. Положим для любого $s \geqslant 0$ $(\check{\nu}_s, \check{\zeta}_s) = (\nu_{\sigma+s}, \zeta_{\sigma+s} - \zeta_\sigma)$, $(\hat{\nu}_s, \hat{\zeta}_s) = \begin{cases} (\nu_s, \zeta_s), & M \in \{s \leqslant \delta\}, \\ (0, \delta), & M \in \{s > \sigma\}. \end{cases}$ Не ограничивая общности, предположим, что $\tau < \infty$ п. н. Легко видеть, что событие $\{M^{\zeta_\sigma} - \zeta_\sigma \cap K \neq \varnothing\}$, где $K \in \mathcal{K}(R_+ \times L_m)$, зависит лишь от траектории процесса $(\check{\nu}_s, \check{\zeta}_s)$, а событие $\{M_{\zeta_\sigma} \cap K \neq \varnothing\}$ зависит лишь от траектории процесса $(\hat{\nu}_s, \hat{\zeta}_s)$.

Используя строгую марковость процесса (ν_t, ζ_t), получим, что для любых $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(R_+ \times L_m)$

$$P\{M^{\zeta_\sigma} - \zeta_\sigma \cap K_1 \neq \varnothing,\ M_{\zeta_\sigma} \cap K_2 \neq \varnothing / \nu_\sigma,\ \zeta_\sigma\} = P\{M^{\zeta_\sigma} - \zeta_\sigma \cap K_1 \neq \varnothing / \nu_\sigma, \zeta_\sigma\} P\{M_{\zeta_\sigma} \cap K_2 \neq \varnothing / \nu_\sigma, \zeta_\sigma\} \text{ п. н.} \tag{4}$$

Так как процесс (ν_t, ζ_t) однороден по второй компоненте, то приращения ζ_t условно однородны. Следовательно, для любого $K \in \mathcal{K}(R_+ \times L_m)$

$$P\{M^{\zeta_\sigma} - \zeta_\sigma \cap K \neq \varnothing / \nu_\sigma, \zeta_\sigma\} = P\{M^{\zeta_\sigma} - \zeta_\sigma \cap K \neq \varnothing / \nu_\sigma\} \text{ п. н.} \tag{5}$$

Из формул (4), (5) очевидным образом следуют условия (А1), (А2) определения. Например,

$$P\{M^\tau - \tau \cap K_1 \neq \varnothing,\ M_\tau \cap K_2 \neq \varnothing / \beta_\tau\} = P\{P\{M^{\zeta_\sigma} - \zeta_\sigma \cap K_1 \neq \varnothing,\ M_{\zeta_\sigma} \cap K_2 \neq \varnothing / \nu_\sigma,\ \zeta_\sigma\} / \beta_\tau\} = P\{M^\tau - \tau \cap K_1 \neq \varnothing / \beta_\tau\} P\{M_\tau \cap K_2 \neq \varnothing / \beta_\tau\} \text{ п. н.}$$

Доказательство теоремы 2. Из условия теоремы следует, что A представляет собой маркированное СЗМ, т. е. $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ п. н., $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$. Пусть $(\mathfrak{F}_t)$ — натуральный полный поток σ-алгебр, порожденный процессом (y_t, η_t). Тогда для любого $t \geqslant 0$ множество A_t $\mathfrak{F}_t$-измеримо. Построим по множеству A процесс (x_t, β_t). Пусть τ — $(\mathfrak{F}_t)$-момент остановки, $\tau \in \tilde{A}_* \cup \{\infty\}$ п. н. Из непрерывности процесса (y_t, η_t) справа следует, что $y_\tau = x_0$, $\beta_\tau = \eta_\tau$ п. н. на $\{\tau < \infty\}$. Теперь условия (A1), (A2) проверяются с использованием строгой марковости процесса (y_t, η_t).

Теорема 3 доказывается аналогично теореме 2.

Доказательство теоремы 4. Пусть M — строго марковское маркированное СЗМ, (ν_t, ζ_t) — субординатор в случайной среде, образом которого является M, $\eta(u)$ — момент первого перескока процессом ζ_t уровня $u > 0$, $\varkappa(u) = \zeta_{\eta(u)} - u$ — величина перескока. Используя свойство локального времени [13, с. 93] и формулу (1), можно показать, что для любого $\gamma > 0$ матрица $A(\gamma)$ обратима и обратная матрица равна $\int\limits_0^\infty \exp\{-tA(\gamma)\}\,dt$. Учитывая этот факт и применяя теорему работы [14], получаем

$$\left\| \int\limits_0^\infty \exp\{-\gamma u\} E_i [\exp\{-\lambda\varkappa(u)\},\ \nu_{\eta(u)} = j]\, du \right\|_{i,j=1}^m = [A(\gamma)]^{-1} (\gamma - \lambda)^{-1} \times$$
$$\times [A(\gamma) - A(\lambda)].$$

Учитывая, что $\Phi(u, z) = \| P_i \{\varkappa(u) \geqslant z,\ \nu_{\eta(u)} = j\} \|_{i,j=1}^m$, легко получить утверждение теоремы.

1. *Hoffman-Jorgensen J.* Markov Sets.— Math. Scand., 1969, 24, № 2, p. 145—166.
2. *Maisonneuve B.* Systemes Regeneratifs.— Berlin etc. : Springer-Verlag, 1974.— 115 p.— (Asterisque; V. 15).
3. *Taksar M. J.* Regenerative Sets on Real Line.— Lect. Notes Math., 1980, 784, p. 437—474.
4. *Kingman J. F. C.* The Stohastic Theory of Regenerative Events.— Z. Warsheinlichkeitstheorie verv. Gebiete, 1963, 2, № 3, p. 180—224.
5. *Молчанов И. Э.* Маркированные случайные множества.— Теор. вероятн. и мат. статистика, 1983, вып. 29, с. 93—98.
6. *Kingman J. F. C.* Linked Systems of Regenerative Events.— Proc. London Math. Soc., 1965, 15, № 1, p. 125—150.
7. *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия.— М. : Мир, 1978.— 318 с.
8. *Шуренков В. М.* Эргодические теоремы и смежные вопросы теории случайных процессов.— Киев. : Наук. думка, 1981.— 118 с.
9. *Kingman J. F. C.* Homecomings of Markov Processes.— Adv. Appl. Prob., 1973, 5, N 1, p. 66—102.
10. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории.—М. : Мир, 1968.— 394 с.
11. *Деллашери К.* Емкости и случайные процессы.— М. : Мир, 1975.— 192 с.
12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов.— М. : Наука, 1965.— 656 с.
13. *Maisonneuve B.* Entrance-Exit Results for Semi-Regenerative Processes.— Z. Warsheinlichkeitstheorie verv. Gebiete, 1975, 32, № 1—2, p. 81—94.
14. *Могульский А. А.* Факторизационные тождества для процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова.— Теор. вероятн. и мат. статистика, 1974, вып. 11, с. 86—96.

Киев. гос. ун-т

Поступила 23.06.83