УДК 517.9

Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко,
Н. А. Перестюк

Метод усреднения в системах с импульсным воздействием

В известной монографии «Введение в нелинейную механику» [1] Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов на изящном примере показали эффективность применения метода усреднения для исследования колебаний маятника, подверженного импульсному воздействию. В дальнейшем Ю. А. Митропольским [2] и А. М. Самойленко [3—6] их идеи были развиты в применении к более широкому классу систем, подверженных действию импульсных возмущений. Указанные работы положили начало математическому исследованию колебательных процессов в системах с импульсами и стимулировали исследования во всей теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, которые в настоящее время интенсивно проводятся уже не только в киевской научной школе нелинейной механики, но и во многих других научных коллективах как в нашей стране, так и за рубежом.

Настоящий обзор содержит результаты, связанные с развитием метода усреднения применительно к системам дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и полученные в основном в киевской научной школе нелинейной механики.

1. Колебательная система с одной степенью свободы. Пусть некоторая колебательная система описывается уравнением $\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(t, x, \dot{x})$ и подвергается импульсному воздействию. Импульсные силы могут воздействовать на систему в фиксированные моменты времени или при попадании изображающей точки в некоторые множества фазового (расширенного фазового) пространства. Относительно импульсных сил обычно предполагается, что в результате их действия в системе изменяется скорость движения фазовой точки на некоторую величину, вообще говоря, зависящую от скорости и положения фазовой точки в момент действия импульса.

Рассмотрим автономную колебательную систему, подверженную действию периодической импульсной силы:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad t \neq t_i, \quad \Delta \dot{x}|_{t=t_i} = \varepsilon I_i(x, \dot{x}). \tag{1}$$

Предполагается, что моменты импульсного воздействия t_i и функции $I_i \times \times (x, \dot{x})$ таковы, что

$$t_{i+p} - t_i = 2\pi, \quad I_{i+p}(x, \dot{x}) = I_i(x, \dot{x}) \tag{2}$$

для всех целых чисел $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и некоторого натурального числа p.

При исследовании уравнений (1) следует различать нерезонансный и резонансный случаи. В нерезонансном случае, т. е. когда ω — иррациональное число, плохо аппроксимирующееся рациональными числами, система (1) исследована в [7]. Здесь показано, что в первом приближении решения уравнений (1) описываются выражением $x = a \sin \varphi$, где a и φ — решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{a} = \varepsilon F(a)/\omega$, $\dot{\varphi} = \omega - \varepsilon \Phi(a)/\omega a$, в которой

$$F(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \theta, a\omega \cos \theta) \cos \theta d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_i(a \sin \theta, a\omega \cos \theta) \cos \theta d\theta,$$

$$\Phi(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \theta, a\omega \cos \theta) \sin \theta d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_i(a \sin \theta, a\omega \cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

В плане обоснования законности применения метода усреднения к исследованию уравнений (1) в [7] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для системы уравнений с импульсным воздействием* (1) *выполняются следующие условия*:

а) *функция* $f(x, \dot{x})$ *непрерывно дифференцируема в области* $x^2 + \omega^{-2}\dot{x}^2 \leqslant \leqslant r^2$ *по обеим переменным и ее производные в этой области удовлетворяют условию Липшица*;

б) *функции* $I_i(x, \dot{x})$ *представляют собой конечные многочлены своих переменных, и моменты времени* t_i *удовлетворяют равенствам* (2);

в) *уравнение* $F(a) = 0$ *имеет изолированный положительный корень* $a = a_0$ *такой, что* $F'(a_0) < 0$.

Тогда можно указать такое положительное число ε_0, *что для всех* ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$:

1) *уравнение с импульсным воздействием* (1) *имеет интегральное множество* $\sqrt{x^2 + \omega^{-2}\dot{x}^2} = u(t, \varphi, \varepsilon)$, *где функция* $u(t, \varphi, \varepsilon)$ *кусочно непрерывна по* t *с разрывами первого рода при* $t = t_i$, *удовлетворяет условию Липшица по* φ, *периодическая по* φ *и* t *с периодом* 2π *и такая, что* $u(\varphi, t, \varepsilon) \to a_0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *равномерно по* φ *и* t;

2) *существует* $\delta_0(\varepsilon)$*-окрестность* ($\delta_0(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$) *цилиндра* $x^2 + \omega^{-2}\dot{x}^2 = a_0^2$ *такая, что любое решение уравнений* (1), *начавшееся при* $t = t_0$ *в этой окрестности, остается ограниченным вместе со своей производной для всех* $t \geqslant t_0$.

В случае резонанса, т. е. когда ω находится в соседстве с одним из чисел вида r/s, где r и s — натуральные числа, система (1) исследована в [8]. В этом случае первые приближения к решениям уравнений (1) следует брать в виде $x = a\sin(rt/s + \theta)$, где a и θ — решения уравнений $\dot{a} = \varepsilon s(A(a) + I^{(1)}(a, \theta))/r$, $\dot{\theta} = -\varepsilon s(\bar{\Delta}a/2 + B(a) + I^{(2)}(a, \theta))/ra$. Здесь

$$A(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a\sin\varphi,\ a\frac{r}{s}\cos\varphi\right)\cos\varphi d\varphi,$$

$$B(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a\sin\varphi,\ a\frac{r}{s}\cos\varphi\right)\sin\varphi d\varphi,$$

$$I^{(1)}(a, \theta) = \frac{1}{2\pi s}\sum_{i=1}^{ps} I_i\left(a\sin\left(\frac{r}{s}t_i + \theta\right),\ a\frac{r}{s}\cos\left(\frac{r}{s}t_i + \theta\right)\right) \times$$

$$\times\cos\left(\frac{r}{s}t_i + \theta\right),\quad I^{(2)}(a, \theta) = \frac{1}{2\pi s}\sum_{i=1}^{ps} I_i\left(a\sin\left(\frac{r}{s}t_i + \theta\right),\right.$$

$$\left. a\frac{r}{s}\cos\left(\frac{r}{s}t_i + \theta\right)\right)\sin\left(\frac{r}{s}t_i + \theta\right),\quad \varepsilon\bar{\Delta} = r^2/s^2 - \omega^2.$$

В качестве примера исследуем влияние импульсного воздействия на линейный осциллятор в предположении, что в результате такого воздействия увеличивается кинетическая энергия осциллятора на постоянную величину εI, т. е. исследуем систему уравнений

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\varepsilon\lambda/\dot{x},\quad t \neq t_i,\quad \Delta\dot{x}^2|_{t=t_i} = 2\varepsilon I,\quad \lambda > 0,\quad I > 0,$$
$$\omega t_i = 2\pi i,\quad i = 0, \pm 1, \ldots. \tag{3}$$

Осуществив в этих уравнениях замену переменных $x = a\sin(\omega t + \theta)$, $\dot{x} = a\omega\cos(\omega t + \theta)$ и усреднив полученные уравнения по явно входящему времени, получим уравнения первых приближений

$$\dot{a} = -\varepsilon(\lambda a - I/\pi a\omega)/2,\quad \dot{\theta} = -\varepsilon I\operatorname{tg}\theta/2\pi a^2\omega. \tag{4}$$

Первое из этих уравнений имеет стационарное решение $a = a_0\,(I/\pi\omega\lambda^{1/2})$, а второе — два стационарных решения: $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ (modd 2π). Воспользовавшись формулами улучшенных первых приближений, получим

$$x(t) = a\sin(\omega t + \theta) - \varepsilon\lambda a\cos(\omega t + \theta)/4 +$$

$$+ (\varepsilon I\sin\omega t/\pi a\omega^2\cos\theta)\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\omega t/k,$$

где a и θ — решения усредненных уравнений (4).

Исследуя систему (3) в первом приближении, видим, что все ее решения со временем стремятся к одному из двух асимптотически устойчивых периодических решений

$$x(t) = \pm a_0 \sin \omega t \pm \varepsilon\lambda a_0 \cos \omega t/4 \pm (\varepsilon I \sin \omega t/\pi a_0 \omega^2) \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\omega t/k, \qquad (5)$$

где $a_0 = (I/\pi\omega\lambda)^{1/2}$. Кроме того, решения, соответствующие стационарному решению первого из уравнений (4), покрывают интегральное множество, которое в расширенном фазовом пространстве $(x, \dot{x}, t)$ определяется равенством

$$(\omega^2 x^2 + \dot{x}^2)^{1/2} = (\pi\omega/\pi\lambda)^{1/2} (1 - \varepsilon\lambda \sin 2 (\omega t + \theta)/4) + \\ + \varepsilon (I\lambda/\pi\omega)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\omega t/k.$$

Это множество асимптотически устойчиво, а решения, лежащие на нем, со временем притягиваются одним из двух периодических решений (5).

Законность применения метода усреднения к исследованию уравнения (1) в резонансном случае обосновывает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть в системе уравнений* (1) *функции* $f(x, \dot{x})$, $I_i(x, \dot{x})$, $i = 1, 2, \ldots, p$, *определены и удовлетворяют условию Липшица по своим переменным в некоторой области* $0 < \alpha^2 \leqslant x^2 + \omega^{-2}\dot{x}^2 \leqslant \beta^2$. *Предположим, что система уравнений*

$$A(a) + I^{(1)}(a, \theta) = 0, \quad B(a) + \overline{\Delta} a/2 + I^{(2)}(a, \theta) = 0 \qquad (6)$$

имеет изолированное решение $a = a^0$, $\theta = \theta^0$, *принадлежащее полосе* $\alpha < a^0 < \beta$ *вместе с некоторой своей* ρ-*окрестностью, и такое, что индекс точки* (a^0, θ^0) *при отображении, определяемом левыми частями уравнений* (6), *отличен от нуля. Тогда можно указать такое положительное число* ε_0, *что для всех положительных* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *система* (1) *в резонансном случае имеет* 2π-*периодическое по* rt/s *решение.*

В работах [3, 4, 6, 9] методом усреднения проведен анализ автономной колебательной системы, подвергающейся импульсному воздействию при прохождении фазовой точкой $(x, \dot{x})$ положения $x = x_0$:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad x \neq x_0, \quad \Delta \dot{x}|_{x=x_0} = \varepsilon I(\dot{x}). \qquad (7)$$

В этом случае уравнения первых приближений суть уравнения

$$\dot{a} = \varepsilon \sqrt{a^2 - x_0^2}\, [I(\omega \sqrt{a^2 - x_0^2}) - I(-\omega \sqrt{a^2 - x_0^2})]/2\pi a + \varepsilon A(a)/\omega,$$

$$\dot{\varphi} = \omega - \varepsilon x_0 [I(\omega \sqrt{a^2 - x_0^2}) + I(-\omega \sqrt{a^2 - x_0^2})]/2\pi a^2 - \varepsilon B(a)/\omega a,$$

где

$$A(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi,\ a\omega \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi,$$

$$B(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi,\ a\omega \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi,$$

а улучшенными приближениями для $a(t)$ и $\theta(t)$ служат выражения

$$a(t) = a + \varepsilon \sqrt{\bar{a}^2 - x_0^2} \Bigg[I(\omega \sqrt{\bar{a}^2 - x_0^2}) \sum_{k=1}^{\infty} \sin k (\varphi - \varphi_{\bar{a}}^{(1)})/k - \\ - I(-\omega \sqrt{\bar{a}^2 - x_0^2}) \sum_{k=1}^{\infty} \sin k (\varphi - \varphi_{\bar{a}}^{(2)})/k \Bigg] /\pi\omega\bar{a} +$$

$$+\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^{(1)}\sin k\varphi-b_k^{(1)}\cos k\varphi)/k\omega^2,$$

$$\theta(t)=\overline{\theta}-\varepsilon x_0\left[I\left(\omega\sqrt{\overline{a}^2-x_0^2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\sin k(\varphi-\varphi_{\overline{a}}^{(1)})/k+I\left(-\omega\sqrt{\overline{a}^2-x_0^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{\infty}\sin k(\varphi-\varphi_{\overline{a}}^{(2)})/k\right]/\pi\omega\overline{a}^2-\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^{(2)}\sin k\varphi-b_k^{(2)}\cos k\varphi)/k\omega^2\overline{a},$$

в которых $\overline{a}$, $\overline{\theta}$ — решения уравнений первых приближений, $a_k^{(1)}$, $b_k^{(1)}$ и $a_k^{(2)}$, $b_k^{(2)}$ — коэффициенты Фурье соответственно функций $f(a\sin\varphi,\ a\omega\cos\varphi)\times\times\cos\varphi$ и $f(a\sin\varphi,\ a\omega\cos\varphi)\sin\varphi$, $\varphi_a^{(1)}=\arcsin(x_0/a)$ и $\varphi_a^{(2)}=\pi-\arcsin\times\times(x_0/a)$. В работе [6] доказано также, что при достаточно общих предположениях относительно функций $f(x,\dot{x})$ и $I(\dot{x})$ положительные корни уравнения $A(a)-\omega\sqrt{a^2-x_0^2}[I(\omega\sqrt{a^2-x_0^2})-I(-\omega\sqrt{a^2-x_0^2})]/2\pi a=0$ при малых значениях параметра ε порождают однопараметрические семейства периодических решений исходных уравнений (7), т. е. этим корням соответствуют разрывные предельные циклы уравнений (7).

Случай, когда в системе (7) правая часть первого уравнения зависит от t, т. е. имеет вид $f(\nu t, x, \dot{x})$, исследован в работе [9]. В ней установлено, что в случае резонанса, т. е. когда $\omega^2=(r\nu/s)^2+\varepsilon\overline{\Delta}$, изолированное решение системы уравнений

$$A(a,\theta)+r\nu\sqrt{a^2-x_0^2}\,[I(r\nu\sqrt{a^2-x_0^2}/s)-I(-r\nu\sqrt{a^2-x_0^2}/s)]/2\pi sa=0,$$

$$B(a,\theta)-\overline{\Delta}a/2+r\nu x_0\,[I(r\nu\sqrt{a^2-x_0^2}/s)+I(-r\nu\sqrt{a^2-x_0^2}/s)]/2\pi sa=0,$$

где

$$A(a,\theta)=\frac{1}{2\pi s}\int_0^{2\pi s}f\left(\varphi,\ a\sin\left(\frac{r}{s}\varphi+\theta\right),\ \frac{ar\nu}{s}\cos\left(\frac{r}{s}\varphi+\theta\right)\right)\times$$

$$\times\cos\left(\frac{r}{s}\varphi+\theta\right)d\varphi,\quad B(a,\theta)=\frac{1}{2\pi s}\int_0^{2\pi s}f\left(\varphi,\ a\sin\left(\frac{r}{s}\varphi+\theta\right),\right.$$

$$\left.\frac{ar\nu}{s}\cos\left(\frac{r}{s}\varphi+\theta\right)\right)\sin\left(\frac{r}{s}\varphi+\theta\right)d\varphi,$$

при малых значениях параметра ε порождает периодическое периода 2π относительно $r\nu t/s$ решение исходной системы (7).

Аналогичный результат получен в работе [10] для интегродифференциального уравнения, подверженного импульсному воздействию

$$\ddot{x}+\omega^2x=\varepsilon f\left(\nu t,\ x,\ \dot{x},\ \int_t^{t+\tau}h(\nu t,\ \nu s,\ x(s),\ \dot{x}(s))\,ds\right),\quad x\neq x_0,\quad \Delta\dot{x}=\varepsilon I(\dot{x}),$$

в котором функции $f(\nu t, x, y, \nu)$ и $h(\nu t, \nu s, x, y)$ — периодические по νt, νs с периодом 2π, $\omega\simeq\nu$; τ и x_0 — некоторые постоянные.

В нерезонансном случае в работе [11] удалось обосновать метод усреднения при дополнительном предположении относительно прямой, на которой система подвергается импульсному воздействию. Доказано, что при достаточно общих предположениях относительно функций $f(t, x, \dot{x})$ и $I(\dot{x})$ изолированный положительный корень $a=a_0$ уравнения

$$F(a)\equiv\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t,\ a\sin\theta,\ a\omega\cos\theta)\cos\theta\,dt\,d\theta+\omega\,[I(a\omega)-I(-a\omega)]/2\pi$$

при малых значениях параметра ε порождает интегральное множество системы уравнений

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(t, x, \dot{x}), \quad x \neq \varepsilon x_0, \quad \Delta \dot{x}|_{x=\varepsilon x_0} = \varepsilon I(\dot{x}). \tag{8}$$

Это множество определяется уравнением $\sqrt{(x - \varepsilon x_0)^2 + \omega^{-2}\dot{x}^2} = u(\varphi, t, \varepsilon)$, где функция $u(\varphi, t, \varepsilon)$ удсвлетворяет условию Липшица по t, кусочно непрерывна по φ с разрывами первого рода при $\varphi = k\pi$, 2π-периодическая по φ и t, и $u(\varphi, t, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Кроме того, если $F'(a_0) < 0$, то существует $\delta_0(\varepsilon)$-окрестность ($\delta_0(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$) цилиндра $x^2 + \omega^{-2}\dot{x}^2 = a_0^2$ такая, что все решения уравнения (8), начавшиеся в этой окрестности, остаются ограниченными вместе со своими первыми производными для всех $t \geqslant 0$.

Построению формул первого и первого улучшенного приближений, а также уравнений первого приближения для уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, подверженного импульсному воздействию,

$$\frac{d}{dt}(m(\tau)\dot{x}) + c(\tau)x = \varepsilon f(\tau, x, \dot{x}), \quad t \neq iT, \quad \Delta(m(\tau)\dot{x})|_{t=iT} = \varepsilon I(x, \dot{x}),$$

в котором $m(\tau)$, $c(\tau)$ — положительные функции «медленного» времени $\tau = \varepsilon t$, посвящена работа [12].

В работе [13] разработана асимптотическая методика исследования уравнений вида

$$\ddot{x} + f(x) = \varepsilon f(\nu t, x, \dot{x}), \quad x \neq x_0, \quad \Delta \dot{x}|_{x=x_0} = \varepsilon I(\dot{x}).$$

2. Система в стандартной форме. Укажем основные результаты по применению метода усреднения к исследованию систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в стандартной форме

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x), \quad t \neq t_i(x), \quad \Delta x|_{t=t_i(x)} = \varepsilon I_i(x). \tag{9}$$

Предположим, что равномерно относительно $x \in D \subset R^n$ существуют конечные пределы

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t, x)\, dt = X_0(x), \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0 < t_i(x) < T} I_i(x) = I_0(x). \tag{10}$$

Как показано в [5], в качестве уравнений первого приближения служат уравнения

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon[X_0(\bar{x}) + I_0(\bar{x})]. \tag{11}$$

Эту схему усреднения обосновывает следующая теорема, представляющая собой аналог классического результата Н. Н. Боголюбова [14], относящегося к обоснованию метода усреднения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 3 [5]. *Пусть система уравнений* (9) *такова, что выполняются условия*:

а) *существуют положительные постоянные M и K такие, что*

$$\|\partial t_i/\partial x\| + \|X(t, x)\| + \|I_i(x)\| \leqslant M, \quad \|X(t, x') - X(t, x'')\| + \|\partial t_i(x')/\partial x - \partial t_i(x'')/\partial x\| + \|I_i(x') - I_i(x'')\| \leqslant K\|x' - x''\| \quad \forall t \in [0, \infty],$$
$$x', x'' \in D, \quad i \in N;$$

б) *равномерно по t, x при $t \geqslant 0$, $x \in D$ существуют конечные пределы* (10) *и* $\lim\limits_{T\to\infty} i(t, t+T)/T = p$, *где* $i(t, t+T)$ — *количество поверхностей* $t = t_i(x)$ *на промежутке* $[t, t+T]$;

в) *ус едненная система* $\dot{x} = \varepsilon(X_0(x) + I_0(x))$ *имеет решение* $x = \bar{x}(\varepsilon t, x_0)$, $\bar{x}(0, x_0) = x_0$, *которое при* $\varepsilon = 1$ *принадлежит* D $\forall t \in [0, L]$ *вместе с некоторой своей* ρ-*окрестностью и удовлетворяет неравенствам*

$\langle \partial t_i (\overline{x}(\varepsilon t, x_0))/\partial x, \quad I_i(\overline{x}(\varepsilon t, x_0))\rangle \leqslant \beta < 0,\ t'_i < t < t''_i$ (*либо* $\partial t_i(x)/\partial x \equiv 0$), *где* $t'_i = \inf\limits_{x \in D} t_i(x),\ t''_i = \sup\limits_{x \in D} t_i(x),\ i = 1, \ldots, p,\ t_p < L/\varepsilon < t_{p+1}$.

Тогда для любого $\eta > 0$ *можно указать такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех положительных* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *система уравнений* (9) *имеет решение* $x_t(x_0)$, $x_0(x_0) = x_0$, *определенное при* $t \in [0, L/\varepsilon]$ *и такое, что* $\| x_t(x_0) - \overline{x}(\varepsilon t, x_0) \| < \eta,\ t \in [0, L/\varepsilon]$.

Этот результат позже был обобщен в работе [15] на случай периодических систем с разрывной функцией $X(t, x)$:

$$X(t, x) = \begin{cases} X_1(t, x), & \Phi(t, x) \leqslant 0, \\ X_2(t, x), & \Phi(t, x) > 0. \end{cases}$$

Здесь $\Phi(t, x)$ — периодическая по t с периодом 2π функция, непрерывно дифференцируема в окрестности поверхности $\Phi(t, x) = 0$ и такая, что уравнение $\Phi(t, x) = 0$ при $x \in D$ имеет на периоде ровно m простых решений $t = t_i(x)$.

Вопрос качественного соответствия между точными решениями уравнений (9) и решениями соответствующей усредненной системы (11) на бесконечном временном интервале исследован в [5] и [16, 17]. В этих работах установлено, что при выполнении условий теоремы 3 справедливы следующие утверждения.

1. Если усредненная система (11) имеет изолированное асимптотически устойчивое положение равновесия $x = x_0$, то существует такая ρ-окрестность D_ρ точки x_0 и такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и $x \in D_\rho$ решения $x_t(x)$, $x_0(x) = x$ системы (9) равномерно ограничены при $t \geqslant 0$.

2. Если усредненная система (11) имеет асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение, то при $t \geqslant 0$ решения уравнений (9), начавшиеся из достаточно малой окрестности траектории этого решения, равномерно ограничены. В работе [16] получены также достаточные условия того, что асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение усредненной системы (11) порождает интегральное множество исходных уравнений (9).

Доказательству аналога второй теоремы Н. Н. Боголюбова по обоснованию метода усреднения для систем с импульсным воздействием посвящена работа [17]. В ней исследуется система уравнений в стандартной форме (9) в предположении, что гиперповерхности $t = t_i(x)$ представляют собой гиперплоскости $t = t_i$. При условии, что соответствующая усредненная система имеет изолированное положение равновесия $x = x_0$ и вещественные части собственных чисел матрицы $\partial(X_0(x) + I_0(x))/\partial x_{x=x_0}$ отличны от нуля, доказывается существование в окрестности решения $x = x_0$ единственного ограниченного на всей оси решения исходной системы, а также изучаются свойства этого решения и решений, начинающихся из достаточно малой окрестности ограниченного решения.

Приведенные выше результаты, относящиеся к обоснованию применимости метода усреднения к исследованию систем вида (9), позже были распространены на случай систем дифференциальных уравнений, подверженных импульсному воздействию, с «медленными» и «быстрыми» переменными [18], а также на один класс функционально-дифференциальных уравнений с импульсами [19].

Метод усреднения можно успешно применять также к решению многих задач оптимального управления импульсными системами. Укажем здесь один результат [20]. Пусть $\{t_i\}$ — совокупность точек отрезка $[0, T]$, $0 < t_1 < \ldots < t_N < T$, $t_{i+1} - t_i = \theta$, $i = \overline{1, N}$. На отрезке $[0, T]$ рассматривается управляемая система с импульсным воздействием $\dot{x} = \varepsilon f(t, x)$, $t \neq t_i$, $\Delta x|_{t=t_i} = I_i(x, w_i)$. Требуется среди всех возможных управляющих импульсных воздействий $\{w_1, \ldots, w_N\}$, переводящих начальное состояние системы x_0 в состояние $x(T)$, определить такое, при котором функционал

$$J = \varepsilon \int_0^T f_0(\tau, x(\tau))\, d\tau + \sum_{i=1}^{N} h_i^0(x(t_i), w_i) \tag{13}$$

принимает наименьшее значение. Здесь $f(t, x)$, $f_0(t, x)$ — 2π-периодические по t функции, $T = L/\varepsilon$, L — const.

Задаче оптимального управления (12), (13) ставится в соответствие «усредненная» задача импульсного управления

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y), \quad t \neq t_i, \quad \Delta y|_{t=t_i} = I_i(y, w_i), \quad y(0) = x_0, \tag{14}$$

$$\bar{J} = \varepsilon \int_0^T \bar{f}_0(y(s))\, ds + \sum_{i=1}^N h_i^0(y(t_i), w_i), \tag{15}$$

где

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t, y)\, dt, \quad \bar{f}_0(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(t, y)\, dt.$$

В [20] получены условия, при которых справедливо следующее утверждение: если задачи оптимального управления (12), (13) и (14), (15) имеют соответственно решения $(x^*(t), w_1, \ldots, w_N^*, J^*)$ и $(y^*(t), \bar{w}_1^*, \ldots, \bar{w}_N^*, \bar{J}^*)$, то выполняются неравенства $|J^* - \bar{J}^*| \leqslant C\varepsilon$, $|J' - J^*| \leqslant C\varepsilon$, где C — некоторая постоянная, не зависящая от ε, а J' — значение функционала (13), соответствующее импульсному управлению $\{\bar{w}_1^*, \ldots, \bar{w}_N^*\}$.

В заключение отметим несколько результатов по применению асимптотических методов к исследованию систем с распределенными параметрами, подверженных импульсному воздействию.

В работах [21—22] разработана методика применения асимптотических методов нелинейной механики к изучению колебательных процессов в системах с распределенными параметрами, находящихся под воздействием многочастотных квазигармонических и мгновенных импульсных сил в условиях сложных комбинационных резонансов вида

$$\sum_{\mu=1}^N p_\mu^{(k,i)}\omega_\mu(\tau) + \sum_{l=1}^L q_l^{(k,i)}\nu_l(\tau) + \sum_{\nu=1}^R r_\nu^{(k,i)}\lambda_\nu \simeq \lambda_k, \quad k = 1, \ldots, R \tag{16}$$

(λ_ν — собственные частоты, $\omega_\mu(\tau)$, $\nu_l(\tau)$ — частоты внешних возмущающих сил).

Разработан алгоритм построения асимптотического решения квазилинейной краевой задачи для уравнения в частных производных вида

$$L^{(2n)}u + \alpha\partial^2 u/\partial t^2 = \varepsilon f(\tau, x, \partial^k u/\partial x^{k_1}\partial t^{k_2}, \theta_1, \ldots, \theta_N) + \varepsilon \sum_{l=1}^L g_l(\tau, x, \partial^k u/\partial x^{k_1}\partial t^{k_2},$$
$$\theta_1, \ldots, \theta_N) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_l - m(T_l + \xi_l(\tau))),$$

где ε — малый параметр, $\tau = \varepsilon t$, $L^{(2n)}u$ — линейный однородный оператор порядка $2n$ с частными производными по x, в случае линейных и квазилинейных краевых условий. Развита схема метода усреднения для исследования R-частотного режима колебаний в условиях резонансов (16), построены первые и первые улучшенные приближения для амплитуд и фаз рассматриваемого режима колебаний. Полученные результаты применены для исследования двухчастотного режима поперечных колебаний балки под воздействием продольной периодической импульсной силы с учетом системы упругого нелинейного крепления концов неавтономного типа, а также для исследования нелинейных гидроупругих эффектов в упругой трубке с протекающей вязкой несжимаемой жидкостью под воздействием мгновенных импульсов давления.

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику.— Киев : Изд-во АН УССР, 1937.— 363 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.

3. *Самойленко А. М.* Некоторые вопросы исследования дифференциальных уравнений с нерегулярной правой частью.— Buletinul instit. politehnic, 1965, 11 (15), № 3—4, с. 85—92.
4. *Самойленко А. М.* Proceedings of the fourth conference on nonlinear oscillations.— Acad. publ. house CSAS. Prague, 1968, p. 237—240.
5. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками.—Мат. физика, 1971, вып. 9, с. 101—117.
6. *Самойленко А. М.* К вопросу обоснования метода усреднения для исследования колебаний в системах, подверженных импульсному воздействию.— Укр. мат. журн., 1967, 19, № 5, с. 96—104.
7. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования метода усреднения для уравнения второго порядка с импульсным воздействием.— Укр. мат. журн., 1977, 29, № 6, с. 750—762.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования метода усреднения для дифференциальных уравнений второго порядка с импульсами.— В кн.: Нелинейные колебания и устойчивость движения. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 273—282.
9. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* О методе усреднения в системах с импульсным воздействием.— Укр. мат. журн., 1974, 24, № 3, с. 411—418.
10. *Нуржанов О. Д.* О периодических решениях нелинейных интегродифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— В кн.: Аналитические методы в теории дифференциальных уравнений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1977, с. 88—103.
11. *Каркинбаев И., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования применения асимптотических методов к исследованию импульсных систем.— В кн.: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Киев : Наук. думка, 1979, с. 43—50.
12. *Дзыра Б. И.* Применение метода усреднения для исследования одночастотных колебаний, возбуждаемых мгновенными силами.— В кн.: Аналитические и качественные методы теории дифференциальных уравнений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1972, с. 43—50.
13. *Дзыра Б. И.* Воздействие мгновенных периодических сил на нелинейные системы с медленно меняющимися параметрами.— В кн.: Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 26—31.
14. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 410 с.
15. *Плотников В. А.* Асимптотические методы в задачах оптимального управления : Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук.— Л., 1980.— 32 с.
16. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Инвариантные множества систем с мгновенным изменением в стандартной форме.— Укр. мат. журн., 1973, 25, № 1, с. 129—134.
17. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Вторая теорема Боголюбова Н. Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— Дифференц. уравнения, 1974, 10, № 11, с. 2001—2010.
18. *Bainov D. D., Milusheva S. D.* Justification of the averaging method for a system of differential equations with fast and slow variables with impulses.— J. of Appl. Math. and Phys. 1981, 32, p. 237—254.
19. *Bainov D. D., Milusheva S. D.* Application of the partially-multiplicative averaging for a class of functional-differential equations with impulses.— Rend. sem. mat. univers. politech. Torino, 1982, 40, N 1, p. 139—161.
20. *Асланян А. А.* Усреднение уравнений движения в задачах управления системами дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— В кн.: Теория оптимальных решений. Киев : Ин-т кибернетики АН УССР, 1982, с. 57—62.
21. *Кривошея С. А.* О построении приближенных решений одной смешанной задачи для квазиволнового уравнения.— Укр. мат. журн., 1976, 28, № 5, с. 670—677.
22. *Кривошея С. А., Кулик В. Л.* Применение асимптотических методов к решению задачи о движении жидкости в упругом трубопроводе.— Укр. мат. журн., 1977, 29, № 1, с. 58—66.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 28.05.84