УДК 519.21

Т. М. Мирзоева, Н. И. Портенко

Предельные теоремы для функционалов от невозвратных случайных блужданий

Пусть задано семейство последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_k^{(\varepsilon)}, k = 1, 2, \ldots\}$ с целочисленными значениями, зависящих от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Совокупность всех целых чисел обозначим X. Пусть, кроме того, при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задана случайная величина $\zeta_0^{(\varepsilon)}$ со значениями в X, не зависящая от величин $\xi_1^{(\varepsilon)}, \xi_2^{(\varepsilon)}, \ldots$. Образуем суммы

$$\zeta_n^{(\varepsilon)} = \zeta_0^{(\varepsilon)} + \xi_1^{(\varepsilon)} + \xi_2^{(\varepsilon)} + \ldots + \xi_n^{(\varepsilon)}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

Последовательность $\{\zeta_n^{(\varepsilon)},\ n = 0, 1, \ldots\}$ при каждом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ образует случайное блуждание на X. Случайная величина $\xi_k^{(\varepsilon)}$ называется k-м шагом блуждания. Всюду в дальнейшем предполагаем, что это блуждание апериодично в смысле [1]. Это предположение эквивалентно тому, что характеристическая функция величины шага блуждания $\varphi^{(\varepsilon)}(\theta) = M\exp\{i\theta\xi_n^{(\varepsilon)}\}$, где θ — вещественный параметр, обращается в единицу лишь в точках, кратных 2π. Далее будем предполагать, что

$$M\,|\xi_k^{(\varepsilon)}| < \infty, \quad M\xi_k^{(\varepsilon)} = \varepsilon. \tag{2}$$

Значит, блуждание (1) при $\varepsilon > 0$ будет невозвратным (см. [1]). Для $x, y \in X$ положим

$$P^{(\varepsilon)}(0, x) = P\{\xi_k^{(\varepsilon)} = x\}, \quad P^{(\varepsilon)}(x, y) = P^{(\varepsilon)}(0, y - x),$$

$$P_n^{(\varepsilon)}(x, y) = \sum_{z \in X} P^{(\varepsilon)}(x, z)\, P_{n-1}^{(\varepsilon)}(z, y), \quad P_0^{(\varepsilon)}(x, y) = \delta(x, y),$$

где $\delta(x, y)$ — символ Кронекера, $P_1^{(\varepsilon)}(x, y) = P(x, y)$. Функция $P_n^{(\varepsilon)}(x, y)$ представляет собой вероятность перехода за n шагов для блуждания (1).

Из невозвратности блуждания следует, что при всех $x, y \in X$ конечна функция $G^{(\varepsilon)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\varepsilon)}(x, y)$, называемая ядром потенциала.

Предположим, что на $X \times X$ задана вещественная функция $g(x, y)$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{y, z \in X} |g(y, z)|\, G^{(\varepsilon)}(x, y)\, P^{(\varepsilon)}(y, z) < \infty, \quad x \in X, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{3}$$

Образуем функционал

$$\eta_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} g(\zeta_k^{(\varepsilon)}, \zeta_{k+1}^{(\varepsilon)}) \tag{4}$$

от случайного блуждания (1). Из соотношения $M_x |\eta_\varepsilon| \leqslant \sum_{y, z \in X} |g(y, z)| \times G^{(\varepsilon)}(x, y)\, P^{(\varepsilon)}(y, z)$ и условия (3) следует, что величина η_ε конечна P_x-п. н. Здесь P_x — условная вероятность при условии, что $\zeta_0^{(\varepsilon)} = x$, а M_x — символ математического ожидания по мере P_x. К функционалам типа (4) сводятся такие функционалы, как число пересечений блужданием $\{\zeta_n^{(\varepsilon)}\}$ некоторого фиксированного уровня, разность между числами пересечений двух разных уровней, число пересечений границы данного интервала и т. п.

Пусть $\varepsilon \downarrow 0$. Нашей задачей будет отыскание возможных предельных распределений при соответствующих нормировках для величин η_ε. Частный случай этой задачи, когда $g(x, y) = \chi_{(-\infty, a)}(x)\, \chi_{(a, \infty)}(y) + \chi_{(a, \infty)}(x)\, \chi_{(-\infty, a)}(y)$ (здесь a — нецелое число, $\chi_A(x)$ — индикатор множества $A \subset X$), т. е., когда η_ε представляет собой число пересечений блужданием $\{\zeta_n^{(\varepsilon)}\}$ уровня a, рассматривался в работе [2].

Положим для $x \in R^1$ и вещественных λ $u_\varepsilon(x, \lambda) = M_x \exp\{i\lambda\eta_\varepsilon\}$. Функция $u_\varepsilon(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$u_\varepsilon(x, \lambda) = 1 + \sum_{y, z \in X} (\exp\{i\lambda g(y, z)\} - 1)\, u_\varepsilon(z, \lambda)\, G^{(\varepsilon)}(x, y)\, P^{(\varepsilon)}(y, z). \tag{5}$$

Вывод этого уравнения для случая, когда η_ε представляет собой число пересечений блужданием некоторого уровня, имеется в работе [2]. В общем случае этот вывод проводится точно так же.

Ясно, что для исследования асимптотического при $\varepsilon \downarrow 0$ поведения решений уравнения (5) нужно иметь информацию о поведении ядра $G^{(\varepsilon)}(x, y)$. Такую информацию содержат лемма работы [3] и теорема работы [4], согласно которым: (I) условия

1) $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} P^{(\varepsilon)}(0, x) = P(0, x)$, $x \in X$, где $P(0, x)$ — распределение величины шага возвратного апериодичного случайного блуждания;

2) ряд $\sum\limits_{x\in X} x^2 P^{(\varepsilon)}(0, x)$ сходится равномерно относительно $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$;

3) $\sum\limits_{x\in X} x P^{(\varepsilon)}(0, x) = \varepsilon$

влекут соотношения

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon G^{(\varepsilon)}(x, y) = 1, \quad \varepsilon G^{(\varepsilon)}(x, y) \leqslant K, \tag{6}$$

где K — некоторая положительная постоянная, $x, y \in X$;

(II) условия 1) и 3), а также условие:

2′) ряд $\sum\limits_{x\in X} |x|^3 P^{(\varepsilon)}(0, x)$ сходится равномерно относительно $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,

влекут соотношение

$$G^{(\varepsilon)}(x, y) = \varepsilon^{-1} + q(x, y) + o(1), \tag{7}$$

где

$$q(x, y) = -(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \varphi_c(\theta))(1 - \cos\theta(x - y)) |1 - \varphi(\theta)|^{-2} d\theta -$$

$$- (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(\theta) \sin\theta(x - y) |1 - \varphi(\theta)|^{-2} d\theta - (x - y)\sigma^{-2} +$$

$$+ (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} [(1 - \varphi_c(\theta)) |1 - \varphi(\theta)|^{-2} - 2(\sigma\theta)^{-2}] d\theta - 2(\pi\sigma)^{-2} + (1/3)\mu_3\sigma^{-4},$$

$$\varphi(\theta) = \sum_{x\in X} \exp\{i\theta x\} P(0, x), \quad \varphi_c(\theta) = \operatorname{Re}\varphi(\theta), \quad \varphi_s(\theta) = \operatorname{Im}\varphi(\theta),$$

$$\sigma^2 = \sum_{x\in X} x^2 P(0, x), \quad \mu_3 = \sum_{x\in X} x^3 P(0, x).$$

Первая из приведенных ниже теорем представляет собой аналог закона больших чисел для функционалов типа (4).

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* 1)—3), *и пусть вещественная функция* $g(x, y)$, $x, y \in X$, *такова, что ряд* $\sum\limits_{x,y\in X} |g(x, y)| P^{(\varepsilon)}(x, y)$ *сходится равномерно относительно* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. *Тогда, если* $\omega = \sum\limits_{x,y\in X} g(x, y) P(x, y) \neq 0$, *то при любом* $x \in X$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} P_x\{\varepsilon\eta_\varepsilon\omega^{-1} < a\} = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ 1 - \exp\{-a\}, & a \geqslant 0. \end{cases}$$

Доказательство. В силу (6)

$$|u_\varepsilon(x, \lambda\varepsilon) - u_\varepsilon(x, \lambda'\varepsilon)| \leqslant \varepsilon|\lambda - \lambda'| M_x\{|\eta_\varepsilon|\} \leqslant \varepsilon|\lambda - \lambda'| \sum_{y,z\in X} |g(y, z)| \times$$

$$\times G^{(\varepsilon)}(x, y) P^{(\varepsilon)}(y, z) \leqslant K|\lambda - \lambda'| \sup \sum_{y,z\in X} |g(y, z)| P^{(\varepsilon)}(y, z).$$

Отсюда и из условия теоремы следует, что семейство функций $u_\varepsilon(x, \lambda\varepsilon)$ при каждом $x \in X$ равностепенно непрерывно по λ. Поэтому из любой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$ можно выбрать подпоследовательность $\varepsilon_{n_k} \downarrow 0$, такую, что при каждом $x \in X$ равномерно относительно λ существует предел $\lim\limits_{\varepsilon_{n_k} \downarrow 0} u_{\varepsilon_{n_k}}(x, \lambda\varepsilon_{n_k})$. Теперь в уравнении для $u_\varepsilon(x, \lambda\varepsilon)$ (см. (5)) перейдем к пределу по такой подпоследовательности $\varepsilon_k \downarrow 0$, для которой существует предел $\lim\limits_{\varepsilon_k \downarrow 0} u_{\varepsilon_k}(x, \lambda\varepsilon_k) = \bar{u}(x, \lambda)$. Этот предельный переход легко обосновывается с помощью соотношений (6) и условия доказываемой теоремы. Тем самым для предельной функции $\bar{u}$ получим соотношение

$$\bar{u}(x, \lambda) = 1 + i\lambda \sum_{y, z \in X} g(y, z)\, \bar{u}(y, \lambda)\, P(y, z), \tag{8}$$

из которого следует, что $\bar{u}(x, \lambda)$ не зависит от x. Положим $\bar{u}(x, \lambda) = u(\lambda)$. Тогда из (8) находим

$$u(\lambda) = (1 - i\lambda\omega)^{-1}. \tag{9}$$

Таким образом, все сходящиеся последовательности $u_{\varepsilon_k}(x, \lambda\varepsilon_k)$ имеют одну и ту же предельную функцию (9). Поэтому $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} u_\varepsilon(x, \lambda\varepsilon) = (1 - i\lambda\omega)^{-1}$. Теорема доказана.

В том случае, когда η_ε определяет число пересечений блужданием (1) некоторого нецелого уровня, в работе [2] доказано, что $\omega = \Sigma |x|\; P(0, x)$, т. е. в этом случае ω представляет собой абсолютный момент величины шага предельного блуждания. При этом $\omega > 0$, если только предельное блуждание невырождено.

Рассуждения, доказывающие теорему 1, показывают, что в случае $\omega = 0$ величины $\varepsilon\eta_\varepsilon$ будут иметь в пределе вырожденное распределение. Оказывается, что в этом случае при некоторых дополнительных ограничениях величины $\varepsilon^{1/2}\eta_\varepsilon$ будут иметь в пределе при $\varepsilon \downarrow 0$ невырожденное распределение, если только функция $g(x, y)$ сама в некотором смысле не вырождается.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что выполнены условия* 1), 2′) *и* 3), *а также следующие условия:*

а) *ряды* $\sum\limits_{y, z \in X} g^2(y, z) P^{(\varepsilon)}(y, z)$, $\sum\limits_{,z \in X} (|y| + |z|)\, |g(y, z)|\, P^{(\varepsilon)}(y, z)$ *сходятся равномерно относительно* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$;

б) *существует предел* $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} \sum\limits_{y, z \in X} g(y, z) P^{(\varepsilon)}(y, z) = \gamma$.

Тогда при всех $x \in X$ *и вещественных* λ $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} M_x \exp\{i\lambda\varepsilon^{1/2}\eta_\varepsilon\} = \{1 + \beta\lambda^2\}^{-1}$, *где* $\beta = (1/2) \sum\limits_{y, z \in X} g^2(y, z) P(y, z) + \sum\limits_{y, z, s, t \in X} g(y, z) P(y, z) q(z, s) g(s, t) P(s, t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем некоторое λ. Пользуясь диагональным методом, можем выделить последовательность $\varepsilon_k \downarrow 0$ такую, что при всех $x \in X$ существует предел $\lim\limits_{\varepsilon_k \downarrow 0} u_{\varepsilon_k}(x, \lambda\varepsilon_k^{1/2}) = \lim\limits_{\varepsilon_k \downarrow 0} M_x \exp\{i\lambda\varepsilon_k^{1/2}\eta_{\varepsilon_k}\} = \bar{u}(x, \lambda)$. Из уравнения (5) находим

$$u_\varepsilon(x, \lambda\varepsilon^{1/2}) = 1 + \sum_{y, z \in X} (\exp\{i\lambda\varepsilon^{1/2} g(y, z)\} - 1)\, u_\varepsilon(z, \lambda\varepsilon^{1/2})\, G^{(\varepsilon)}(x, y)\, P^{(\varepsilon)}(y, z) =$$

$$= 1 + i\lambda\varepsilon^{1/2} \sum_{y, z \in X} g(y, z)\, u_\varepsilon(z, \lambda\varepsilon^{1/2})\, G^{(\varepsilon)}(x, y)\, P^{(\varepsilon)}(y, z) -$$

$$- (\lambda^2\varepsilon/2) \sum_{y, z \in X} g^2(y, z)\, u_\varepsilon(z, \lambda\varepsilon^{1/2})\, G^{(\varepsilon)}(x, y)\, P^{(\varepsilon)}(y, z) - (\lambda^2\varepsilon/2) \times$$

$$\times \sum_{,z \in X} g^2(y, z)(\exp\{i\lambda\varepsilon^{1/2} g(y, z)\,\theta\} - 1)\, u_\varepsilon(z, \lambda\varepsilon^{1/2})\, G^{(\varepsilon)}(x, y)\, P^{(\varepsilon)}(y, z), \tag{10}$$

где θ — некоторое число, $|\theta|\leqslant 1$. В силу условия а) третья сумма в правой части (10) стремится к нулю при $\varepsilon\downarrow 0$. Вторая сумма в правой части (10) по последовательности ε_k имеет предел $-(\lambda^2/2)\sum_{y,z\in X} g^2(y, z)P(y, z)\times$ $\times\,\overline{u}(z,\lambda)$.

Рассмотрим первую сумму в правой части (10). Она равна

$$i\lambda\varepsilon^{1/2}\sum_{y,z\in X} g(y,z)\,u_\varepsilon(z,\lambda\varepsilon^{1/2})\,P^{(\varepsilon)}(y,z)\,[G^{(\varepsilon)}(x,y)-\varepsilon^{-1}]+$$

$$+\;i\lambda\varepsilon^{-1/2}\sum_{y,z\in X} g(y,z)\,u_\varepsilon(z,\lambda\varepsilon^{1/2})\,P^{(\varepsilon)}(y,z)=J_1+J_2.$$

Из неравенства $|G^{(\varepsilon)}(x,y)-\varepsilon^{-1}|\leqslant K(1+|x-y|)$ (см. [4]) и условия а) следует соотношение при $\varepsilon\downarrow 0$

$$|J_1|\leqslant K|\lambda|\varepsilon^{1/2}\sum_{y,z\in X}|g(y,z)|\,P^{(\varepsilon)}(y,z)\,(1+|x-y|)\to 0,$$

где K — некоторая постоянная. Используя уравнение (5), находим

$$J_2=i\lambda\varepsilon^{-1/2}\sum_{y,z\in X} g(y,z)\,P^{(\varepsilon)}(y,z)+i\lambda\varepsilon^{-1/2}\sum_{,z\in X} g(y,z)\,P^{(\varepsilon)}(y,z)\times$$

$$\times\sum_{s,t\in X}(\exp\{i\lambda\varepsilon^{1/2}g(s,t)\}-1)\,u_\varepsilon(t,\lambda\varepsilon^{1/2})\,P^{(\varepsilon)}(s,t)\,[G^{(\varepsilon)}(z,s)-\varepsilon^{-1}]+$$

$$+\;i\lambda\varepsilon^{-3/2}\sum_{y,z\in X} g(y,z)\,P^{(\varepsilon)}(y,z)\sum_{s,t\in X}(\exp\{i\lambda\varepsilon^{1/2}g(s,t)\}-1)\,P^{(\varepsilon)}(s,t)\times$$

$$\times u_\varepsilon(t,\lambda\varepsilon^{1/2})=J_2+J_2''+J_2'''.$$

В силу условия б) J_2' стремится к нулю при $\varepsilon\downarrow 0$, а из условий а) и б) получаем

$$\lim_{\varepsilon_k\downarrow 0} J_2'''=-\gamma\lambda^2\sum_{y,z\in X} g(y\,z)\,P(y,z)\,\overline{u}(z,\lambda),$$

$$\lim_{\varepsilon_k\downarrow 0} J_2''=-\lambda^2\sum_{y,z,s,t\in X} g(y,z)\,P(y,z)\,q(z,s)\,g(s,t)\,P(s,t)\,\overline{u}(t,\lambda).$$

Таким образом, предельный переход в (10) по последовательности $\varepsilon_k\downarrow 0$ приводит к соотношению

$$\overline{u}(x,\lambda)=1-\lambda^2\Big[(1/2)\sum_{y,z\in X} g^2(y,z)\,P(y,z)\,\overline{u}(z,\lambda)+$$

$$+\sum_{y,z,s,t\in X} g(y,z)\,P(y,z)\,q(z,s)\,g(s,t)\,P(s,t)\,\overline{u}(t,\lambda)\Big].$$

Отсюда для данного λ и всех $x\in X$ $\overline{u}(x,\lambda)=(1+\beta\lambda^2)^{-1}$. Значит, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u_\varepsilon(x,$ $\lambda\varepsilon^{1/2})=(1+\beta\lambda^2)^{-1}$ при всех $x\in X$ и вещественных λ. Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о положительности величины β. С этой целью установим справедливость формулы

$$\beta=(1/2)\,M_0S_\tau^2,\qquad(11)$$

где $\tau=\inf\{n\geqslant 1:\zeta_n=0\}$, $S_\tau=\sum_{k=0}^{\tau-1} g(\zeta_k,\zeta_{k+1})$.

Предположение, что величина β именно так выражается через S_τ, было высказано В. М. Шуренковым. Для доказательства формулы (11) нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Л е м м а 1. *Пусть $f(x)$, $x \in X$, — ограниченная вещественная функция. Тогда при $|\lambda| < 1$, $x \in X$*

$$M_x \sum_{k=0}^{\tau-1} \lambda^k f(\zeta_k) = R_\lambda f(x) - R_\lambda f(0) [G_\lambda (x, 0) - \delta (x, 0)]/G_\lambda (0, 0), \tag{12}$$

где

$$G_\lambda (x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k P_k (x, y), \quad x, y \in X,$$

$$R_\lambda f(x) = \sum_{y \in X} G_\lambda (x, y) f(y) = M_x \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f(\zeta_k).$$

$P_k(x, y)$ определяется по $P(0, x)$ так же, как $P_k^{(\varepsilon)}(x, y)$ по $P^{(\varepsilon)}(0, x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем (χ_A — индикатор события A)

$$M_x \sum_{k=0}^{\tau-1} \lambda^k f(\zeta_k) = M_x \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f(\zeta_k) - M_x \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f(\zeta_k) \chi_{\{\tau \leqslant k\}} = R_\lambda f(x) -$$

$$- M_x \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k f(\zeta_k) \sum_{n=1}^{k} \chi_{\{\tau=n\}} = R_\lambda f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \lambda^k M_x f(\zeta_k) \chi_{\{\tau=n\}}.$$

Согласно марковскому свойству, при $n \leqslant k$

$$M_x f(\zeta_k) \chi_{\{\tau=n\}} = M_x \chi_{\{\tau=n\}} M_{\zeta_n} f(\zeta_{k-n}) =$$

$$= M_0 f(\zeta_{k-n}) P_x \{\tau = n\} = P_x \{\tau = n\} \sum_{y \in X} P_{k-n} (0, y) f(y).$$

Поэтому

$$M_x \sum_{k=0}^{\tau-1} \lambda^k f(\zeta_k) = R_\lambda f(x) - \sum_{y \in X} f(y) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \sum_{n=1}^{k} P_{k-n} (0, y) P_x \{\tau = n\} = R_\lambda f(x) -$$

$$- \sum_{y \in X} f(y) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_n (0, y) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_x \{\tau = n\} = R_\lambda f(x) - R_\lambda f(0) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n P_x \{\tau = n\}.$$

Для $x \in X$ положим $\nu_x = \inf \{n \geqslant 1 : \zeta_n = x\}$. Известно [5, с. 316], что производящая функция величины ν_x имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k P_0 \{\nu_x = k\} = [G_\lambda (0, x) - \delta (0, x)]/G_\lambda (0, 0)$. Замечая, что $P_x \{\tau = n\} = P_0 \{\nu_{-x} = n\}$ в силу однородности блуждания по пространству, находим $M_x \sum_{k=0}^{\tau-1} \lambda^k f(\zeta_k) = R_\lambda f(x) - R_\lambda f(0) [G_\lambda (x, 0) - \delta (x, 0)]/G_\lambda (0, 0)$, откуда и следует (12).

Найдем асимптотическое разложение G_λ при $\lambda \uparrow 1$. Имеющийся в книге [1, с. 443] результат о том, что $\lim_{\lambda \uparrow 1} G_\lambda (0, 0) (1 - \lambda)^{1/2} = (2\sigma^2)^{-1/2}$, недостаточен для того, чтобы в формуле (12) перейти к пределу при $\lambda \uparrow 1$.

Л е м м а 2. *Пусть распределение $P(0, x)$, определяющие апериодичное возвратное блуждание на X, имеет третий момент. Тогда при $x, y \in X$ и $\lambda \uparrow 1$ справедливо разложение (ср. с (7))*

$$G_\lambda (x, y) = (2\sigma^2)^{-1/2} (1 - \lambda)^{-1/2} + H(x, y) + o(1), \tag{13}$$

где $H(x, y) = q(x, y) + (x - y) \sigma^{-2} - (1/3) \mu_3 \sigma^{-4}$.

Доказательство. Для $0 \leqslant \lambda < 1$ имеем

$$G_\lambda(0, x) = (2\pi)^{-1} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{-i\theta x\} (1 - \lambda\varphi(\theta))^{-1} d\theta =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta x (1 - \lambda\varphi_c(\theta)) |1 - \lambda\varphi(\theta)|^{-2} d\theta + \lambda (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(\theta) \times$$

$$\times \sin\theta x |1 - \lambda\varphi(\theta)|^{-2} d\theta. \tag{14}$$

Из неравенств

$$|1 - \lambda\varphi(\theta)|^2 \geqslant (1 - \lambda\varphi_c(\theta))^2 \geqslant (1-\lambda)^2 + \lambda^2 (1 - \varphi_c(\theta))^2 \geqslant (1-\lambda)^2 +$$

$$+ \rho^2\theta^4 \geqslant \rho^2\theta^4, \tag{15}$$

справедливых при $\lambda \geqslant 1/2$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ и некоторой постоянной $\rho > 0$ ([5, с. 315]), следует, что во втором интеграле в правой части (14) можно перейти к пределу при $\lambda \uparrow 1$, причем этот предельный переход верен в предположении существования лишь второго момента распределения $P(0, x)$. В самом деле, при этом предположении функция $\varphi_s(\theta) |\theta|^{-3}$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, как это следует из леммы 3 работы [4]. Поэтому

$$\lambda (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(\theta) \sin\theta x |1 - \lambda\varphi(\theta)|^{-2} d\theta = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(\theta) \sin\theta x |1 - \varphi(\theta)|^{-2} \times$$

$$\times d\theta + o(1). \tag{16}$$

Первый интеграл в правой части (14) представим в виде суммы двух слагаемых I_1 и I_2, где

$$I_1 = -(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos\theta x)(1 - \lambda\varphi_c(\theta)) |1 - \lambda\varphi(\theta)|^{-2} d\theta,$$

$$I_2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \lambda\varphi_c(\theta)) |1 - \lambda\varphi(\theta)|^{-2} d\theta.$$

Имеем

$$I_1 = -\lambda (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos\theta x)(1 - \varphi_c(\theta)) |1 - \lambda\varphi(\theta)|^{-2} d\theta - (1-\lambda) \times$$

$$\times (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos\theta x) |1 - \lambda\varphi(\theta)|^{-2} d\theta = I_1 + I_2''.$$

Очевидно, что

$$I_1' = -(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos\theta x)(1 - \varphi_c(\theta)) |1 - \varphi(\theta)|^{-2} d\theta + o(1), \tag{17}$$

а для $|I_1''|$ с использованием неравенств (15) получаем оценку $|I_1''| \leqslant$ $\leqslant (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos\theta x)(1-\lambda) [\rho\theta^2 (1 - \lambda + \rho\theta^2)]^{-1} d\theta$. Здесь подынтегральная функция имеет интегрируемую мажоранту $(1 - \cos\theta x)\theta^{-2}$ и стремится к нулю при всех $\theta \neq 0$. Стало быть, по теореме Лебега

$$\lim_{\lambda \uparrow 1} I_1'' = 0. \tag{18}$$

Запишем I_2 в виде

$$I_2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \lambda + \lambda\sigma^2\theta^2/2)^{-1} d\theta + \lambda (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma^2\theta^2/2 - 1 + \varphi_c(\theta)) \times$$

$$\times (1 - \lambda + \lambda\sigma^2\theta^2/2)^{-1} (1 - \lambda\varphi_c(\theta))^{-1} d\theta - \lambda^2 (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_s^2(\theta) (1 - \lambda\varphi_c(\theta))^{-1} \times$$

$$\times |1 - \lambda\varphi(\theta)|^{-2} d\theta = I_2 + I_2'' + I_2'''.$$

Из неравенств (15) следует, что подынтегральная функция в I_2'' имеет мажоранту $K|\varphi_c(\theta)-1+\sigma^2\theta^2/2|\theta^{-4}$, которая интегрируема на $[-\pi, \pi]$ в силу предположения о том, что распределение $P(0, x)$ имеет третий момент (см. [4, лемма 3]). Это же обстоятельство позволяет перейти к пределу при $\lambda\uparrow 1$ под знаком интеграла в I_2'''. Наконец, нетрудно найти $I_2' = (2\pi)^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-\lambda+\lambda\sigma^2\theta^2/2)^{-1}d\theta = [2\sigma^2(1-\lambda)]^{-1/2}-2(\sigma\theta)^{-2}+o(1)$. Значит,

$$I_2 = [2\sigma^2(1-\lambda)]^{-1/2}-2(\pi\sigma)^{-2}+\pi^{-1}\sigma^{-2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\varphi_c(\theta)-1+\sigma^2\theta^2/2)\times$$

$$\times(1-\varphi_c(\theta))^{-1}\theta^{-2}d\theta-(2\pi)^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_s^2(\theta)(1-\varphi_c(\theta))|1-\varphi(\theta)|^{-2}d\theta+o(1). \quad (19)$$

Подставляя соотношения (16)—(19) в формулу (14), после несложных преобразований получаем (13). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Проведенные оценки позволяют заключить, что при всех $x, y\in X$ и $\lambda\in[1/2, 1)$ справедливо неравенство

$$|G_\lambda(x, y)-[2\sigma^2(1-\lambda)]^{-1/2}|\leqslant K(1+|x-y|), \quad (20)$$

где K — некоторая положительная постоянная.

Л е м м а 3. *Предположим, что выполнены условия леммы 2, и пусть на X задана вещественная функция $f(x)$, для которой*

$$\sum_{x\in X}|x||f(x)|<\infty. \quad (21)$$

Тогда при всех $x\in X$

$$M_x\sum_{k=0}^{\tau-1}f(\zeta_k) = \sum_{y\in X}[H(x, y)-H(0, y)]f(y)+[\delta(x, 0)+H(0, 0)-$$

$$-H(x, 0)]\sum_{y\in X}f(y). \quad (22)$$

В частности,

$$M_0\sum_{k=0}^{\tau-1}f(\zeta_k)=\sum_{y\in X}f(y), \quad (23)$$

причем последнее равенство справедливо в предположении, что лишь $\sum\limits_{y\in X}|f(y)|<\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что правая часть формулы (22) конечна, если только функция $f(x)$ удовлетворяет условию (21). Это следует из оценки (20). Более того, из этой оценки вытекает, что правая часть (22) при всех $x\in X$ мажорируется величиной $K(1+|x|)$ при некотором $K>0$.

Пусть $f(x)\geqslant 0$ при всех $x\in X$ и удовлетворяет условию (21). Записав для такой функции формулу (13), замечаем, что при $\lambda\uparrow 1$ предел (возможно бесконечный!) левой части существует и равен $M_x\sum\limits_{k=0}^{\tau-1}f(\zeta_k)$. Найдем предел правой части. Из леммы 2 с использованием элементарного соотношения (A и B — некоторые числа) $[1+A\alpha+o(\alpha)][1+B\alpha+o(\alpha)]^{-1}=1+A\alpha-B\alpha+o(\alpha)$, $\alpha\to 0$, получаем при $\lambda\uparrow 1$:

$$R_\lambda f(x) = [2\sigma^2(1-\lambda)]^{-1/2}\sum_{y\in X}f(y)+\sum_{y\in X}H(x, y)f(y)+o(1),$$

$$G_\lambda(x, 0)/G_\lambda(0, 0) = 1+[2\sigma^2(1-\lambda)]^{1/2}[H(x, 0)-H(0, 0)]+o((1-\lambda)^{1/2}).$$

Подставляя эти соотношения в правую часть формулы (12), после несложных вычислений приходим к правой части равенства (22). Значит, предел правой части конечен, а потому конечен и предел левой части. Тем самым формула (22) для неотрицательных функций, удовлетворяющих условию (21), доказана. Общий случай получается из доказанного элементарно.

Полагая в (22) $x = 0$, получаем (23) для функций f, удовлетворяющих условию (21). С помощью предельного перехода равенство (23) распространяется на все функции f, для которых сходится ряд, составленный из $|f(x)|$. Лемма доказана.

Докажем формулу (11).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 2 и вещественная функция* $g(x, y)$, $x, y \in X$, *удовлетворяет условиям:*

А) $\sum\limits_{y,z\in X} g^2(y, z) P(y, z) < \infty$;

Б) $\sum\limits_{y,z\in X} (|y| + |z|) |g(y, z)| P(y, z) < \infty$;

В) $\sum\limits_{y,z\in X} g(y, z) P(y, z) = 0$.

Тогда $M_0 S_\tau^2 = 2\beta$.

Доказательство. Положим

$$\beta_2 = 2 \sum_{y,z,s,t\in X} g(y, z) P(y, z) q(z, s) g(s, t) P(s, t), \quad \beta_1 = \sum_{y,z\in X} g^2(y, z) P(y, z),$$

$$f(y) = Mg^2(y, y + \xi_1), \quad \bar g(y) = Mg(y, y + \xi_1), \quad m(x) = M_x \sum_{k=0}^{\tau-1} \bar g(\zeta_k),$$

$$h(x, y) = g(x, y) m(y), \quad h_1(y) = Mh(y, y + \xi_1), \quad x, y \in X.$$

В этих обозначениях $\beta_1 = \sum\limits_{y\in X} f(y)$. В силу условия А) $\sum\limits_{y\in X} f(y) < \infty$, и можно применить формулу (23). Получится

$$\beta_1 = M_0 \sum_{k=0}^{\tau-1} f(\zeta_k) = \sum_{k=0}^{\infty} M_0 \chi_{\{\tau>k\}} M_0 \{g^2(\zeta_k, \zeta_{k+1}) | \zeta_0, \ldots, \zeta_k\}.$$

Значит,

$$\beta_1 = M_0 \sum_{k=0}^{\tau-1} g^2(\zeta_k, \zeta_{k+1}). \tag{24}$$

Вычислим величину β_2. Заметим, что она конечна в силу условия Б) и оценки (K — некоторая постоянная, $K > 0$) $|q(z, s)| \leqslant K(1 + |z - s|)$, $z, s \in X$ (см. [4]). Далее, величину β_2 можно представить в виде

$$\beta_2 = \sum_{y,z,s,t\in X} g(y, z) P(y, z) [H(z, s) - H(0, s)] g(s, t) P(s, t),$$

так как в силу В) β_2 обращается в нуль, если вместо $q(z, s)$ подставить в выражение для β_2 константу, линейную функцию или функцию $H(0, s)$. Имеем

$$\sum_{s,t\in X} [H(z, s) - H(0, s)] g(s, t) P(s, t) = \sum_{s\in X} [H(z, s) - H(0, s)] \bar g(s) = M_z \sum_{k=0}^{\tau-1} \bar g(\zeta_k).$$

Последнее равенство — следствие формулы (22), которая в данном случае применима, поскольку в силу условия Б) функция $\bar g(s)$ удовлетворяет условию (21), а в силу условия В $\sum\limits_{s\in X} \bar g(s) = 0$. Таким образом,

$$\beta_2 = 2 \sum_{y,z\in X} g(y, z) P(y, z) M_z \sum_{k=0}^{\tau-1} \bar g(\zeta_k) = 2 \sum_{y,z\in X} h(y, z) P(y, z) = 2 \sum_{y\in X} h_1(y).$$

Теперь применим формулу (23). Тот факт, что она применима $\left(\text{т. е. что } \sum_{y\in X} |h_1(y)| < \infty\right)$, является простым следствием условия Б). Получаем

$$\beta_2 = 2\sum_{y\in X} h_1(y) = 2M_0 \sum_{k=0}^{\tau-1} h_1(\zeta_k) = 2\sum_{k=0}^{\infty} M_0 \chi_{\{\tau>k\}} h(\zeta_k, \zeta_{k+1}) =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} M_0 \chi_{\{\tau>k\}} g(\zeta_k, \zeta_{k+1}) M_{\zeta_{k+1}} \sum_{r=0}^{\tau-1} \bar g(\zeta_r) =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} M_0 \chi_{\{\tau>k+1\}} g(\zeta_k, \zeta_{k+1}) M_{\zeta_{k+1}} \sum_{r=0}^{\tau-1} \bar g(\zeta_r).$$

Последнее равенство верно, потому что $\chi_{\{\tau>k\}} = \chi_{\{\tau>k+1\}} + \chi_{\{\tau=k+1\}}$, а на множестве $\{\tau = k+1\}$ имеем $\zeta_{k+1} = 0$ и $M_0 \sum_{k=0}^{\tau-1} \bar g(\zeta_k) = \sum_{y\in X} \bar g(y) = 0$ в силу равенства (23) и условия Б). Далее,

$$\beta_2 = 2\sum_{k=0}^{\infty} M_0 \chi_{\{\tau>k+1\}} g(\zeta_k, \zeta_{k+1}) M_{\zeta_{k+1}} \sum_{r=0}^{\tau-1} g(\zeta_r, \zeta_{r+1}) =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} M_0 \chi_{\{\tau>k+1\}} g(\zeta_k, \zeta_{k+1}) M_0 \left\{\theta_{k+1} \sum_{r=0}^{\tau-1} g(\zeta_r, \zeta_{r+1}) \,|\, \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{k+1}\right\},$$

где θ_k — оператор сдвига на k шагов (см. [6]). Здесь мы воспользовались марковским свойством. Так как на множестве $\{\tau > k+1\}$ верно равенство $\theta_{k+1}\tau = \tau - k - 1$, то

$$\beta_2 = \sum_{k=0}^{\infty} M_0 \chi_{\{\tau>k+1\}} g(\zeta_k, \zeta_{k+1}) \sum_{r=0}^{\tau-k-2} g(\zeta_{r+k+1}, \zeta_{r+k+2}) = 2\sum_{k=0}^{\infty} M_0 \chi_{\{\tau>k+1\}} \times$$

$$\times g(\zeta_k, \zeta_{k+1}) \sum_{=k+1}^{\tau-1} g(\zeta_j, \zeta_{j+1}) = 2\sum_{k=0}^{\infty} M_0 \chi_{\{\tau>k\}} g(\zeta_h, \zeta_{k+1}) \sum_{j=k+1}^{\tau-1} g(\zeta_j, \zeta_{j+1}).$$

Последнее равенство имеет место потому, что $\sum_{j=k+1}^{\tau-1} g(\zeta_j, \zeta_{j+1}) = 0$ на множестве $\{\tau = k+1\}$. Таким образом, $\beta_2 = 2M_0 \sum_{0\leqslant k<j<\infty} \chi_{\{\tau>k\}} g(\zeta_h, \zeta_{k+1}) \chi_{\{\tau>j\}} \times$ $\times g(\zeta_j, \zeta_{j+1})$. Отсюда и из (24) получаем $\beta_1 + \beta_2 = M_0 S_\tau^2$. Лемма доказана.

Теперь можно найти условия положительности β. Обозначим $V = \{x \in X : P(0, x) > 0\}$.

Т е о р е м а 3. *В условиях теоремы 2 $\beta = 0$ тогда и только тогда, когда функция $g(x, y)$ обладает свойством: существует функция $a(x)$, $x \in X$, такая, что $g(x, y) = a(x) - a(y)$, коль скоро $y - x \in V$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим, что функция $g(x, y)$ и блуждание, определяемое распределением $P^{(\varepsilon)}(0, x)$, удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда функция $g(x, y)$ и предельное распределение $P(0, x)$ удовлетворяют условиям леммы 4. Значит, величина β в теореме 2 может быть определена по формуле (11). Но если функция g обладает указанным в теореме 3 свойством, то $S_\tau = a(\zeta_0) - a(\zeta_\tau) = a(\zeta_0) - a(0)$ почти наверное по мере P_x, каково бы ни было $x \in X$. Но тогда $\beta = (1/2) M_0 S_\tau^2 = (1/2) M_0 (a(\zeta_0) - a(0))^2 = 0$, что и требовалось доказать.

Н е о б х о д и м о с т ь. Доказательство необходимости содержится в статье [7]. Приведем его ради полноты изложения.

Пусть $\beta = 0$. Тогда $S_\tau = 0$ почти наверное по мере P_0. Положим $v(x, \lambda) = M_x \exp\{i\lambda S_\tau\}$, $x \in X$, $\lambda \in R^1$. Имеем

$$v(x, \lambda) = M_x \chi_{\{\tau=1\}} \exp\{i\lambda S_\tau\} + M_x \chi_{\{\tau>1\}} \exp\{i\lambda S_\tau\} =$$

$$= M_x \exp\{i\lambda g(\zeta_0, \zeta_1)\} \chi_{\{\zeta_1=0\}} + M_x \exp\{i\lambda g(\zeta_0, \zeta_1)\} \chi_{\{\zeta_1\neq 0\}} v(\zeta_1, \lambda) =$$

$$= M_x \exp\{i\lambda g(\zeta_0, \zeta_1)\} v(\zeta_1, \lambda) - \exp\{i\lambda g(x, 0)\} v(0, \lambda) P_x\{\zeta_1 = 0\} +$$

$$+ \exp\{i\lambda g(x, 0)\} P_x\{\zeta_1 = 0\}.$$

Так как $S_\tau = 0$ P_0-почти наверное, то $v(0, \lambda) \equiv 1$. Поэтому

$$v(x, \lambda) = M_x \exp\{i\lambda g(\zeta_0, \zeta_1)\} v(\zeta_1, \lambda). \tag{25}$$

Отсюда $|v(x, \lambda)| \leqslant M_x |v(\zeta_1, \lambda)|$, $x \in X$.

Это означает, что $|v(x, \lambda)|$ есть ограниченная субгармоническая функция. В силу того, что блуждание возвратно, такая функция постоянна. Значит, $|v(x, \lambda)| \equiv 1$. Это влечет за собой существование такой функции $a(x)$, что $v(x, \lambda) = \exp\{i\lambda a(x)\}$. Итак, $M_x \exp\{i\lambda S_\tau\} = \exp\{i\lambda a(x)\}$. Подставляя это в (25), находим $\exp\{i\lambda a(x)\} = M \exp\{i\lambda [g(\zeta_0, \zeta_1) + a(\zeta_1)]\}$, откуда $M_x \exp\{\lambda [g(\zeta_0, \zeta_1) - (a(\zeta_0) - a(\zeta_1))]\} = 1$ при всех $x \in X$, $\lambda \in R^1$. Значит, каково бы ни было $x \in X$, почти наверное относительно меры P_x $g(\zeta_0, \zeta_1) = a(\zeta_0) - a(\zeta_1)$, а это означает, что функция g обладает указанным в теореме 3 свойством. Теорема доказана.

1. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания.— М. : Мир, 1969.— 472 с.
2. *Мирзоева Т. М.* Об асимптотическом поведении числа пересечений невозвратным блужданием некоторого уровня.— В кн.: Случайные процессы в задачах математической физики. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979, с. 107—112.
3. *Мирзоева Т. М.*, *Портенко Н. И.* Предельные распределения функционалов от невозвратных случайных блужданий, переходящих в пределе в возвратные.— В кн.: Избранные вопросы теории случайных процессов. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 79—96.
4. *Портенко Н. И.* Об асимптотическом поведении ядра потенциала одномерного невозвратного случайного блуждания.— Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 1, 25—36.
5. *Гихман И. И.*, *Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов.— М. : Наука, 1977.— 567 с.
6. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы.— М. : Физматгиз, 1963.— 337 с.
7. *Surenkov V. M.* Final probabilities of ergodic Markov processes.— Lecture Notes in Math., Springer — Verlag, Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo, 1982, N 1021, p. 655—665.

Ин-т матем. АН УССР, Киев — Поступила 14.12.83