УДК 519.21

Р. В. Бойко

Поведение ветвящегося процесса с бесконечной дисперсией в лимитирующей среде

1. Введение. Работа посвящена изучению случайного процесса, описывающего динамику численности системы частиц, развивающейся таким образом, что интенсивности больших превращений (деление каждой частицы на число частиц, превышающее некоторый фиксированный уровень N) убывают с ростом общего количества частиц в системе. Этот эффект может быть обусловлен лимитирующим влиянием внешней среды, в которой эволюционирует система. Численность такой системы описывает ветвящийся с переменным режимом процесс $\xi(t)$, интенсивности размножения частиц которого таким образом зависят от числа существующих частиц. Если в некоторый момент времени t существуют k, $k > 0$, частиц, то каждая частица независимо от своей предыстории и от других частиц за малый промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ превращается в m частиц, $m = 0, 2, 3, \ldots, N$ (N — некоторое фиксированное целое число, $N \geqslant 2$) с вероятностью $\pi_m(k)\Delta t + o(\Delta t) = \pi_m \Delta t + o(\Delta t)$ и с вероятностью $\pi_m(k)\Delta t + o(\Delta t) = (\pi_m + (1/k) r_k)\Delta t + o(\Delta t)$, $r_m > 0$, превращается в $m > N$ частиц, частица не претерпевает изменения с вероятностью $1 + \pi_1(k)\Delta t + o(\Delta t) = 1 + (\pi_1 + (1/k) r_1) \times \Delta t + o(\Delta t)$, где $\pi_1 = -\sum\limits_{m \neq 1} \pi_m$, $r_1 = -\sum\limits_{m=N}^{\infty} r_m$.

Введем обозначения:

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \pi_m,\ f(z) = r_1 z + \sum_{m=N}^{\infty} z^m r_m, \quad |z| \leqslant 1, \quad P\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\} =$$

$$= P_{ij}(t), \quad F_i(t, z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j P_{ij}(t), \quad i > 0.$$

Через $\Phi(t, z)$ обозначим решение уравнения $\partial\Phi(t, z)/\partial t = \varphi(z) \times \partial\Phi(t, z)/\partial z$ с начальным условием $\Phi(0, z) = z$, $F(t, z)$ — решение уравнения $\partial F(t, z)/\partial t = \varphi(z)\, \partial F(t, z)/\partial z + f(t) F(t, z)$ с начальным условием

$\Phi(0, z) = 1$. В дальнейшем будем считать, что $\xi(0) = 1$, $\varphi(1-z)$ — правильно меняющаяся в нуле функция с показателем $1+\alpha$, $0<\alpha<1$.

Это значит, что $\varphi(z) = (1-z)^{1+\alpha} L(1-z)$, где $L(x)$ — медленно меняющаяся функция при $x \to 0$. Через $L_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, будем обозначать медленно меняющиеся при $t \to \infty$ функции.

Обычные ветвящиеся процессы с бесконечной дисперсией впервые рассмотрены в работе [1]. В работе [2] изучались ветвящиеся процессы с бесконечной дисперсией с несколькими типами частиц. Для рассматриваемого в настоящей работе ветвящегося с переменным режимом процесса $\xi(t)$ получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(z) = (1-z)^{1+\alpha} L(1-z)$, $0<\alpha<1$, $f''(1) < \infty$, *тогда* $\lim\limits_{t\to\infty} P_{10}(t) = 1$ *и при* $t\to\infty$

$$1 - P_{10}(t) = \alpha^{-1/\alpha}(1 + c_1 f'(1))\, t^{-1/\alpha} L_1(t),$$

где $c_1 = \int\limits_0^\infty F(t, 0)(1 - \Phi(t, 0))\, dt \exp\left\{-\int\limits_0^\infty f(\Phi(t, 0))\, dt\right\}$.

Теорема 2. *Если* $f''(1) < \infty$, $\varphi(z) = (1-z)^{1+\alpha} L(1-z)$, *то для любого* $s>0$

$$\lim_{t\to\infty} M\{\exp\{-s\xi(t)(1-\Phi(t, 0))\} \mid \xi(t)>0\} = 1 - s(1+s^\alpha)^{-1/\alpha}.$$

Если предположить, что в систему частиц, эволюцию численности которой описывает процесс $\xi(t)$, возможен приток частиц извне с производящей функцией интенсивностей иммиграции $w(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \omega_k z^k$, и иммигрировавшие частицы размножаются по описанной выше схеме, то для процесса $\eta(t)$, описывающего динамику численности такой системы частиц, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(z) = (1-z)^{1+\alpha} L(1-z)$, $w''(1) < \infty$; *тогда существуют пределы* $\lim\limits_{t\to\infty} P\{\eta(t) = k \mid \eta(0) = 0\} = p_k$ *и их производящая функция* $F(z)$ *имеет вид*:

$$F(z) = \exp\left\{\int\limits_z^1 v(x)\varphi^{-1}(x)\, dx\right\} - p_0 \int\limits_z^1 \exp\left\{\int\limits_z^x v(u)\varphi^{-1}(u)\, du\right\} f(x)\varphi^{-1}(x)\, dx,$$

где $p_0 = \exp\left\{\int\limits_0^1 v(x)\varphi^{-1}(x)\, dx\right\}\left(1 + \int\limits_0^1 \exp\left\{\int\limits_0^x v(u)\varphi^{-1}(u)\, du\right\} f(x)\varphi^{-1}(x) dx\right)^{-1}$,
$v(x) = \omega(x) + f(x)$.

Если в определении процесса $\eta(t)$ считать функцию $f(x)$ тождественно равной нулю, то в этом случае процесс $\eta(t) = \eta_0(t)$ будет обычным критическим ветвящимся процессом с иммиграцией с производящей функцией интенсивностей размножения $\varphi(z)$ и интенсивностей иммиграции $\omega(z)$. Поэтому из теоремы 3 следует следующее утверждение для процесса $\eta_0(t)$.

Теорема 4. *Если* $\varphi(z) = (1-z)^{1+\alpha} L(1-z)$, $0<\alpha<1$, $\omega''(1) < \infty$, *тогда существуют пределы* $\lim\limits_{t\to\infty} P\{\eta_0(t) = k \mid \eta_0(0) = 0\} = q_k$, $k \geqslant 0$, *и их производящая функция* $F_0(z)$ *имеет вид*:

$$F_0(z) = \exp\left\{\int\limits_z^1 w(x)\varphi^{-1}(x)\, dx\right\}.$$

2. Доказательство теоремы 1. Исходя из определения процесса $\xi(t)$, получаем следующее уравнение для производящей функции $F_1(t, z)$ переходных вероятностей $P_{1k}(t)$ процесса:

$$\partial F_1(t, z)/\partial t = \varphi(z)\, \partial F_1(t, z)/\partial z + f(z)(F_1(t, z) - P_{10}(t)) \tag{1}$$

с начальным условием $F_1(0, z) = z$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что решение уравнения (1) может быть записано в таком виде:

$$F_1(t, z) = \Phi(t, z) F(t, z) - \int_0^t F(t-u, z) f(\Phi(t-u, z)) P_{10}(u)\, du. \qquad (2)$$

Для функции $\tilde{P}_{10}(s) = \int_0^\infty \exp\{-st\} P_{10}(t)\, dt$ из соотношения (2) получаем такое представление:

$$\tilde{P}_{10}(s) = 1/s + \int_0^\infty e^{-st} F(t, 0)(\Phi(t, 0) - 1)\, dt \left(s \int_0^\infty e^{-st} F(t, 0)\, dt \right)^{-1}. \qquad (3)$$

Так как в условиях теоремы при $t \to \infty$ (см. [3, с. 224])

$$F(t, 0) = O(1), \quad 1 - \Phi(t, 0) = o(1) \qquad (4)$$

и процесс $\xi(t)$ — стохастически непрерывный однородный марковский процесс со счетным числом состояний, то по теореме Леви [4] существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} P_{1k}(t)$, $k \geqslant 0$; поэтому, в силу соотношений (4), из формулы (3) следует $\lim\limits_{t\to\infty} P_{10}(t) = \lim\limits_{s\to 0} s\, \tilde{P}_{10}(s) = 1$.

Далее, используя (3), получаем:

$$1/s - \tilde{P}_{10}(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t, 0)(1 - \Phi(t, 0))\, dt \left(1 - \int_0^\infty e^{-st} F(t, 0) f(\Phi(t, 0)) dt \right)^{-1}. \qquad (5)$$

В условиях доказываемой теоремы (см. [5, с. 259]) при $t \to \infty$ $(1 - \Phi(t, 0)) \alpha^{-1} \varphi^{-1}(\Phi(t, 0)) = t(1 + o(1))$; отсюда, пользуясь свойствами правильно меняющихся функций (см. [6, с. 21]) получаем, что при $t \to \infty$

$$1 - \Phi(t, 0) = (\alpha t)^{-1/\alpha} L_1(t)(1 + o(1)); \qquad (6)$$

кроме того,

$$\lim_{t\to\infty} F(t, 0) = \lim_{t\to\infty} \exp\left\{ \int_0^t f(\Phi(u, 0))\, du \right\} = \exp\left\{ \int_0^\infty f(\Phi(u, 0))\, du \right\} = c_2. \qquad (7)$$

После несложных выкладок из (5) получим:

$$\int_0^\infty e^{-st} t^m (1 - P_{10}(t))\, dt \left(1 + \int_0^\infty e^{-st} F(t, 0) f(\Phi(t, 0))\, dt \right) =$$
$$= \int_0^\infty e^{-st} t^m (1 - \Phi(t, 0)) F(t, 0)\, dt - \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k \int_0^\infty e^{-st} t^k (1 - P_{10}(t))\, dt \times$$
$$\times \int_0^\infty e^{-st} t^{m-k} F(t, 0) f(\Phi(t, 0))\, dt. \qquad (8)$$

Из соотношений (6), (8), в силу асимптотических свойств правильно меняющихся функций (см. [5, с. 341]) следует, что

$$\int_0^\infty t^k (1 - P_{10}(t))\, dt < \infty, \quad 0 \leqslant k \leqslant (1/\alpha) - 1. \qquad (9)$$

Пусть $1/\alpha$ — целое число. Полагая в (8) $m = 1/\alpha - 1$, принимая во внимание (6), (9), получаем, что при $s \to 0$ $\int_0^\infty e^{-st} t^{1/\alpha - 1} (1 - P_{10}(t))\, dt = L_2(s)(1 + o(1))$. Поэтому при $m = 1/\alpha$ из (8) получаем, что

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{1/\alpha} (1 - P_{10}(t))\, dt = (1/\alpha)^{-1/\alpha} (1 + c_1 f'(1)) s^{-1} L_3(1/s)(1 + o(1)), \quad s \to 0.$$

Тогда по тауберовой теореме [7, с. 812]

$$1 - P_{10}(t) = (1/\alpha)^{-1/\alpha}(1 + c_1 f'(1))\, t^{-1/\alpha} L_3(t)(1 + o(1)).$$

Если $1/\alpha$ — дробное, то, положив в (8) $m = 1/\alpha$, получим, что при $s \to 0$

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{[1/\alpha]}(1 - P_{10}(t))\, dt = (1/\alpha)^{-1/\alpha}(1 + c_1 f'(1))\, s^{-(1+\{1/\alpha\})} L_3(1/s)(1 + o(1)).$$

Отсюда по тауберовой теореме [7, с. 812] получаем, что

$$1 - P_{10}(t) = (1/\alpha)^{-1/\alpha}(1 + c_1 f'(1))\, t^{-1/\alpha} L_3(t) \quad (1 + o(1)).$$

Анализ соотношения (8) показывает, что $L_3(t) = L_1(t)(1 + o(1))$.

3. Доказательство вспомогательных утверждений и теоремы 3.

Лемма 1. *Если* $\varphi(z) = (1 - z)^{1+\alpha} L(1 - z)$, $0 < \alpha < 1$, *то при* $t \to \infty$ *равномерно по* $|z| < 1$

$$1 - \Phi(t, z) = (1/\alpha)^{-1/\alpha}\left(t + \int_0^z \varphi^{-1}(u)\, du\right)^{-1/\alpha} L_1\left(t + \int_0^z \varphi^{-1}(u)\, du\right)(1 + o(1)).$$

Утверждение леммы следует из формулы (6) и следующего соотношения: $\Phi(t, z) = \Phi\left(t + \int_0^z \varphi^{-1}(u)\, du,\ 0\right)$.

Лемма 2. *Пусть* $z_t = \exp\{-s(1 - \Phi(t, 0))\}$, $s > 0$, $\varphi(z) = (1 - z)^{1+\alpha} \times L(1 - z)$, *тогда при* $t \to \infty$ $\int_0^{z_t} \varphi^{-1}(u)\, du = ts^{-\alpha}(1 + o(1))$.

Так как

$$\int_0^{\Phi(t,0)} \varphi^{-1}(u)\, du = \int_1^{(1-\Phi(t,0))^{-1}} x^2 \varphi^{-1}(1 - x^{-1})\, dx \equiv t,$$

а $1 - z_t) = s(1 - \Phi(t, 0))(1 + o(1))$ при $t \to \infty$, то, используя свойства правильно меняющихся функций (см. [6, с. 21]), получаем, что при $t \to \infty$ имеет место следующее соотношение: $\int_0^{z_t} \varphi^{-1}(u)\, du = s^{-\alpha} t(1 + o(1))$.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Из формулы (2) получаем:

$$M\{\exp\{-s\xi(t)(1 - \Phi(t, 0))\} \mid \xi(t) > 0\} = (F_1(t, z_t) - P_{10}(t))(1 - P_{10}(t))^{-1} =$$
$$= 1 + \left(F(t, z_t)(\Phi(t, z_t) - 1) + \int_0^t f(\Phi(u, z_t)) F(u, z_t)(1 - P_{10}(t - u))\, du\right) \times$$
$$\times (1 - P_{10}(t))^{-1}. \tag{10}$$

Так как функция $f(x)\varphi^{-1}(x)$ интегрируема на интервале [0, 1] (см. [5, с. 340]) и $F(t, z) = \exp\left\{\int_z^{\Phi(t,z)} f(u)\varphi^{-1}(u)\, du\right\}$, то из леммы 1 следует, что

$$\lim_{t\to\infty} F(t, z_t) = 1. \tag{11}$$

Из лемм 1, 2 получаем, что $\lim_{t\to\infty}(\Phi(t, z_t) - 1)(1 - \Phi(t, 0)) = -s(1 + s^\alpha)^{-1/\alpha}$. Поэтому, учитывая теорему 1,

$$\lim_{t\to\infty} F(t, z_t)(\Phi(t, z_t) - 1)(1 - P_{10}(t)) = -s(1 + c_1 f'(1))^{-1}(1 + s^\alpha)^{-1/\alpha}. \tag{12}$$

Используя теорему о среднем, асимптотические свойства медленно меняющихся функций (см. [6, с. 2]), лемму 1, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{t/2} f(\Phi(u, z_t)) F(u, z_t)(1 - P_{10}(t - u))\, du\,(1 - P_{10}(t))^{-1} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} (1 - P_{10}(t - u^*))(1 - P_{10}(t))^{-1} \int_0^{t/2} f(\Phi(u, z_t)) F(u, z_t)\, dt =$$

$$= \lim_{t\to\infty} F(t/2, z_t) - 1 = 0, \quad 0 \leqslant u^* \leqslant t/2. \tag{13}$$

При $0 < \varepsilon < 1$ из теоремы о среднем следует, что

$$\int_0^{t^{1-\varepsilon}} f(\Phi(t-u, z_t)) F(t-u, z_t)(1 - P_{10}(u))\, du = f(\Phi(t-u^*, z_t)) F(t-u^*, z_t) \times$$

$$\times \int_0^{t^{1-\varepsilon}} (1 - P_{10}(u))\, du, \qquad 0 \leqslant u^* \leqslant t^{1-\varepsilon}.$$

В силу леммы 1

$$\lim_{t\to\infty} F(t-u^*, z_t) = \exp\left\{\int_{z_t}^{\Phi(t-u^*, z_t)} f(u)\varphi^{-1}(u)\, du\right\} = 1, \tag{14}$$

по теореме 1

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{t^{1-\varepsilon}} (1 - P_{10}(u))\, du = c_1. \tag{15}$$

Из лемм 1, 2, используя формулу Тейлора, получаем, что

$$\lim_{t\to\infty} f(\Phi(t-u^*, z_t))(1 - P_{10}(t))^{-1} = -f'(1)\, s(1 + c_1 f'(1))^{-1}(1 + s^{\alpha})^{-1/\alpha}. \tag{16}$$

Кроме того,

$$\lim_{t\to\infty}\left[\int_{t^{1-\varepsilon}}^{t/2} f(\Phi(t-u, z_t)) F(t-u, z_t)(1 - P_{10}(u))\, du\right](1 - P_{10}(t))^{-1} = 0, \tag{17}$$

так как в силу (15) $\lim_{t\to\infty} \int_{t^{1-\varepsilon}}^{t/2} (1 - P_{10}(u))\, du = 0$, а при $t^{1-\varepsilon} \leqslant u \leqslant t/2$ из рассуждений, приведших к соотношениям (14), (17), следует, что при $t \to \infty$

$$f(\Phi(t-u, z_t)) F(t-u, z_t) = O(1 - P_{10}(t)).$$

Из (13) — (17) следует

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(\Phi(u, z_t)) F(u, z_t)(1 - P_{10}(t-u))\, du\, (1 - P_{10}(t))^{-1} =$$

$$= -sc_1 f'(1)(1 + c_1 f'(1))^{-1}(1 + s^{\alpha})^{-1/\alpha},$$

что вместе с соотношением (12) доказывает теорему 2.

4. Доказательство теоремы 3. Исходя из определения процесса $\eta(t)$, получаем следующее уравнение для производящей функции $F_0(t, z)$ вероятностей $P_k(t) = P\{\eta(t) = k \mid \eta(0) = 0\}$:

$$\partial F_0(t, z)/\partial t = \varphi(z)\, \partial F_0(t, z)/\partial z + (w(z) + f(z)) F_0(t, z) - f(z) P_0(t) \tag{18}$$

с начальным условием $F_0(0, z) = 1$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что для решения уравнения (18) имеет место следующее представление:

$$F_0(t, z) = \overline{F}(t, z) - \int_0^t \overline{F}(t-u, z) f(\Phi(t-u, z)) P_0(u)\, du, \tag{19}$$

где $\overline{F}(t, z)$ — решение уравнения $\partial \overline{F}(t, z)/\partial t = \varphi(z)\, \partial \overline{F}(t, z)/\partial z + v(z) \times \overline{F}(t, z)$ с начальным условием $\overline{F}(0, z) = 1$, $v(z) = f(z) + w(z)$, функция $\Phi(t, z)$ определена в п. 1. Положив в (19) $z = 0$ и применив к левой и правой частям соотношения (19) преобразование Лапласа, получаем, что

$$\tilde{P}_0(s)=\int_0^\infty e^{-st}P_0(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\,\overline{F}(t,0)\,dt\left(1+\int_0^\infty e^{-st}\overline{F}(t,0)\,f(\Phi(t,0))\,dt\right)^{-1}. \tag{20}$$

Так как $\eta(t)$ — стохастически непрерывный однородный марковский процесс со счетным числом состояний, то существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t)=p_k$ при $k\geqslant 0$, поэтому из (20) следует

$$\lim_{t\to\infty}P_0(t)=\lim_{s\to\infty}s\tilde{P}_0(s)=p_0,$$

где

$$p_0=\exp\left\{\int_0^\infty v(\Phi(u,0))\,du\right\}\left(1+\int_0^\infty F(t,0)\,f(\Phi(t,0))\,dt\right)^{-1}, \tag{21}$$

потому что

$$\lim_{s\to0}s\int_0^\infty e^{-st}\,\overline{F}(t,0)\,dt=\lim_{t\to\infty}\overline{F}(t,0)=\lim_{t\to\infty}\exp\left\{\int_0^t v(\Phi(u,0))\,du\right\}$$

и интегралы в (21) сходятся в силу оценки (6) и свойств правильно меняющихся функций.

Далее, так как

$$F(z)=\sum_{k=0}^\infty p_kz^k=\lim_{t\to\infty}F_0(t,z)=\lim_{s\to0}s\int_0^\infty e^{-st}F_0(t,z)\,dt,$$

то из формулы (19) получаем

$$F(z)=\exp\left\{\int_0^\infty v(\Phi(u,z))\,du\right\}-p_0\int_0^\infty f(\Phi(t,z))\,\overline{F}(t,z)\,dt, \tag{22}$$

потому что интегралы в силу леммы 1 сходятся.

Доказательство теоремы 3 завершается проведением замены переменных в интегралах формул (21), (22).

1. *Золотарев В. М.* Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1957, **2**, № 2, с. 256—265.
2. *Ватутин В. А.* Предельные теоремы для критических марковских ветвящихся процессов с несколькими типами частиц и бесконечными вторыми моментами.— Мат. сб., 1977, **103**, № 2, с. 253—264.
3. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы.— М.: Наука, 1971.— 436 с.
4. *Levy P.* Systemes Markoviens et stationnaires cas denombrable.—Ann. sei. E'cole norm. super., 1951, **246**, p. 327—381.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2.— М.: Мир, 1967.— 752 с.
6. *Seneta E.* Slowly varying functions.— Lect. Notes Math., 1976, **508**, p. 112.
7. *Севастьянов Б. А.* Ограниченные снизу ветвящиеся процессы.— Докл. АН СССР, 1978, **238**, № 4, с. 811—813.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Поступила 18.01.83