УДК 517.9

Нгуен Донг Ань

Случайные колебания механических систем при периодически изменяющейся собственной частоте

Для многих задач физики и техники большой интерес представляет исследование влияния параметрической нагрузки на колебания механических систем [1]. В [2] на основе асимптотических методов нелинейной механики и метода уравнений Колмогорова — Фоккера — Планка [3, 4] рассмотрены случайные колебания механических систем с одной степенью свободы под воздействием периодической силы и «белого шума». В данной работе аналогичная задача рассматривается для механических систем при периодически изменяющейся собственной частоте: указан один случай интегрируемости уравнений Колмогорова — Фоккера — Планка и дано применение метода разложения в ряд по обобщенной циклической координате, детально исследован случай линейной системы.

1. Один случай интегрируемости уравнений Колмогорова — Фоккера — Планка. Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, уравнение движения которой имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon\lambda\cos 2\nu t)\,x = \varepsilon\,[h(x, \dot{x}) + \varphi(x, \dot{x})\cos\nu t + g(x, \dot{x})\cos 2\nu t + P\cos\nu t] + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t), \tag{1}$$

где $\dot{\xi}(t)$ — «белый шум» с единичной интенсивностью, $h(x, \dot{x})$, $\varphi(x, \dot{x})$, $g \times (x, \dot{x})$ — многочлены от $x, \dot{x}$:

$$h(x, \dot{x}) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{i,j=0}^{i+j=s}\gamma_{ij}x_i\dot{x}_j, \quad \varphi(x, \dot{x}) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{i,j=0}^{i+j=s}\Gamma_{ij}x_i\dot{x}_j,$$
$$g(x, \dot{x}) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{i,j=0}^{i+j=s}\beta_{ij}x_i\dot{x}_j, \quad \omega, \lambda, \nu, P, \gamma_{ij}, \Gamma_{ij}, \beta_{ij}, \sigma = \text{const}. \tag{2}$$

Рассмотрим колебание в главной резонансной области:

$$\omega^2 - \nu^2 = \varepsilon\Delta. \tag{3}$$

Согласно (3) перепишем (1) в виде

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t) + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t), \tag{4}$$

где

$$f(x, \dot{x}, t) = h(x, \dot{x}) + \varphi(x, \dot{x})\cos\nu t + g(x, x)\cos 2\nu t + P\cos\nu t - \lambda\nu^2\cos 2\nu t x - \Delta x. \tag{5}$$

Совершая замену

$$x = a\cos\psi, \quad \dot{x} = -a\nu\sin\psi, \quad \psi = \nu t + \theta, \tag{6}$$

при помощи формулы Ито преобразуем уравнение (4) к стандартному виду [3]

$$da = \left[-\frac{\varepsilon}{\nu} f(x, \dot{x}, t)\sin\psi + \frac{\varepsilon\sigma^2}{2\nu^2 a}\cos^2\psi\right]dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{\nu}\sin\psi d\xi(t),$$
$$d\theta = \left[-\frac{\varepsilon}{\nu a} f(x, \dot{x}, t)\cos\psi - \frac{\varepsilon\sigma^2}{\nu^2 a^2}\sin\psi\cos\psi\right]dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{a\nu}\cos\psi d\xi(t). \tag{7}$$

Усредненное уравнение Колмогорова — Фоккера — Планка (КФП), составленное для стационарной плотности вероятностей $W(a, \theta)$ системы (7), будет иметь вид [3]

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1 W) + \frac{\partial}{\partial \theta}(K_2 W) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}W) + \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta}(K_{12}W) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(K_{22}W), \tag{8}$$

$$K_1(a, \theta) = \langle -\frac{1}{\nu} f\left(a\cos\psi, -a\nu\sin\psi, \frac{\psi-\theta}{\nu}\right)\sin\psi + \frac{\sigma^2}{2\nu^2 a}\cos^2\psi\rangle =$$

$$= \frac{\sigma^2}{4\nu^2 a} - \frac{P}{2\nu}\sin\theta + \frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta a - \frac{1}{\nu}\sum_{s=1}^{m}(A_s + B_s\cos\theta + C_s\sin\theta +$$

$$+ E_s\cos 2\theta + F_s\sin 2\theta)\, a^s, \qquad K_2(a, \theta) = \langle -\frac{1}{a\nu} f\Bigg(a\cos\psi, -a\nu\sin\psi,$$

$$\frac{\psi-\theta}{\nu}\Bigg)\cos\psi - \frac{\sigma^2}{\nu^2 a^2}\sin\psi\cos\psi\rangle = \frac{\Delta}{2\nu} + \frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta - \frac{P}{2\nu a}\cos\theta -$$

$$-\frac{1}{\nu}\sum_{s=1}^{m}(D_s + M_s\cos\theta + N_s\sin\theta + L_s\cos 2\theta + H_s\sin 2\theta)\, a^{s-1},$$

$$A_s = \sum_{i,j=0}^{i+j=s}\gamma_{ij}(-\nu)^j\langle\cos^i\psi\sin^{j+1}\psi\rangle, \qquad B_s = \sum_{i,j=0}^{i+j=s}\Gamma_{ij}(-\nu)^j\langle\cos^{i+1}\psi \times$$

$$\times \sin^{j+1}\psi\rangle, \qquad C_s = \sum_{i,j=0}^{i+j=s}\Gamma_{ij}(-\nu)^j\langle\cos^i\psi\sin^{j+2}\psi\rangle,$$

$$E_s = \sum_{i,j=0}^{i+j=s}\beta_{ij}(-\nu)^j\langle\cos^i\psi\sin^{j+1}\psi\cos 2\psi\rangle, \qquad F_s = \sum_{i,j=0}^{i+j=s}\beta_{ij}(-\nu)^j \times$$

$$\times\langle\cos^i\psi\sin^{j+1}\psi\sin 2\psi\rangle, \qquad D_s = \sum_{i,j=0}^{i+j=s}\gamma_{ij}(-\nu)^j \times$$

$$\times\langle\cos^{i+1}\psi\sin^j\psi\rangle, \quad M_s = \sum_{i,j=0}^{i+j=s}\Gamma_{ij}(-\nu)^j\langle\cos^{i+2}\psi\sin^j\psi\rangle,$$

$$N_s = \sum_{i,j=0}^{i+j=s}\Gamma_{ij}(-\nu)^j\langle\cos^{i+1}\psi\sin^{j+1}\psi\rangle, \qquad L_s = \sum_{i,j=0}^{i+j=s}\beta_{ij}(-\nu)^j \times$$

$$\times\langle\cos^{i+1}\psi\sin^j\psi\cos 2\psi\rangle, \quad H_s = \sum_{i,j=0}^{i+j=s}\beta_{ij}(-\nu)^j\langle\cos^{i+1}\psi\sin^j\psi\sin 2\psi\rangle,$$

$$K_{11} = \sigma^2(2\nu^2)^{-1}, \qquad K_{22} = \sigma^2(2\nu^2 a^2)^{-1}, \qquad K_{12} = 0. \tag{9}$$

Перепишем уравнение КФП (8) в виде (из (9) видно, что $K_{12} = 0$)

$$\frac{\partial}{\partial a}\left\{K_1 W - \frac{\sigma^2}{4\nu^2}\frac{\partial W}{\partial a}\right\} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{K_{22}W - \frac{\sigma^2}{4\nu^2 a^2}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right\}.$$

Это уравнение будет удовлетворяться, если

$$K_1 W - \frac{\sigma^2}{4\nu^2}\frac{\partial W}{\partial a} = 0, \qquad K_2 W - \frac{\sigma^2}{4\nu^2 a^2}\frac{\partial W}{\partial\theta} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \ln W}{\partial a} = \frac{4\nu^2}{\sigma^2}K_1, \qquad \frac{\partial \ln W}{\partial\theta} = \frac{4\nu^2 a^2}{\sigma^2}K_2. \tag{10}$$

Условием совместности системы (10) является равенство

$$\frac{\partial}{\partial\theta} K_1 = \frac{\partial}{\partial a}(a^2 K_2). \tag{11}$$

Подставляя в него выражения K_1, K_2 из (9), получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big\{\langle h(x,\dot{x})\sin\psi\rangle + \langle\varphi(x,\dot{x})\sin\psi\cos\psi\rangle\cos\theta + \langle\varphi(x,\dot{x})\sin^2\psi\rangle\sin\theta +$$
$$+ \langle g(x,\dot{x})\sin\psi\cos 2\psi\rangle\cos 2\theta + \langle g(x,\dot{x})\sin\psi\sin 2\psi\rangle\sin 2\theta\Big\} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial a}\Big\{\langle ah(x,\dot{x})\cos\psi\rangle + \langle a\psi(x,\dot{x})\cos^2\psi\rangle\cos\theta + \frac{\Delta}{2\nu}a^2 +$$
$$+ \langle a\varphi(x,\dot{x})\cos\psi\sin\psi\rangle\sin\theta + \langle ag(x,\dot{x})\cos\psi\cos 2\psi\rangle\cos 2\theta +$$
$$+ \langle ag(x,\dot{x})\cos\psi\sin 2\psi\rangle\sin 2\theta\Big\},$$

переходящее в тождество, если

$$\Delta = 0, \qquad \langle h(x,\dot{x})\cos\psi\rangle = 0, \qquad -\langle\varphi(x,\dot{x})\sin\psi\cos\psi\rangle =$$
$$= \frac{\partial}{\partial a}(a\langle\varphi(x,\dot{x})\cos\psi\sin\psi\rangle), \qquad \langle\varphi(x,\dot{x})\sin^2\psi\rangle = \frac{\partial}{\partial a}(a\langle\varphi(x,\dot{x})\cos^2\psi\rangle),$$
$$2\langle g(x,\dot{x})\sin\psi\sin 2\psi\rangle = \frac{\partial}{\partial a}(a\langle g(x,\dot{x})\cos\psi\cos 2\psi\rangle), \qquad 2\langle g(x,\dot{x})\sin\psi\cos 2\psi\rangle =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial a}(a\langle g(x,\dot{x})\cos\psi\sin 2\psi\rangle). \tag{12}$$

При выполнении условий (12) из (11) находим

$$W(a,\theta) = Ca\exp\Big\{-\frac{2\nu Pa}{\sigma^2}\sin\theta + \frac{\nu^3\lambda a^2}{2\sigma^2}\sin 2\theta - \frac{4\nu}{\sigma^2}\int_0^a \{\langle h(x,\dot{x})\sin\psi\rangle +$$
$$+ \langle\varphi(x,x)\sin\psi\cos\psi\rangle\cos\theta + \langle\varphi(x,\dot{x})\sin^2\psi\rangle\sin\theta + \langle g(x,\dot{x})\sin\psi\cos 2\psi\rangle\times$$
$$\times\cos 2\theta + \langle g(x,\dot{x})\sin\psi\sin 2\psi\rangle\sin 2\theta\Big\}da. \tag{13}$$

После получения решения (13) необходимо проверить, обладает ли оно всеми свойствами плотности вероятностей. Рассмотрим два примера.

$$\text{I.}\ \ddot{x} + 2\varepsilon\alpha\dot{x} + \varepsilon\gamma\dot{x}^3 + \nu^2(1 + \varepsilon\lambda\cos 2\nu t)x = \varepsilon P\cos\nu t + \tag{14}$$
$$+ \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi(t); \qquad \gamma, \alpha > 0.$$

Здесь $h(x,\dot{x}) = -2\alpha\dot{x} - \gamma\dot{x}^3$, $\varphi(x,\dot{x}) = 0$, $g(x,\dot{x}) = 0$.

В данном случае условие интегрируемости (12) выполняется, а из (13) найдем решение соответствующего уравнения КФП:

$$W(a,\theta) = Ca\exp\Big\{-\frac{2\nu P}{\sigma^2}\sin\theta a - \frac{\nu^2 a^2}{2\sigma^2}(4\alpha - \nu\lambda\sin 2\theta) - \frac{3\gamma\nu^4}{8\sigma^2}a^4\Big\}. \tag{15}$$

Для случая $\gamma = 0$, т. е. для уравнения

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\alpha\dot{x} + \nu^2(1 + \varepsilon\lambda\cos 2\nu t)x = \varepsilon P\cos\nu t + \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi(t), \tag{16}$$

соответствующая плотность вероятностей (13) принимает вид

$$W(a, \theta) = Ca \exp\left\{-\frac{2\nu P a}{\sigma^2}\sin\theta - \frac{\nu^2 a^2}{2\sigma^2}(4\alpha - \nu\lambda\sin 2\theta)\right\}. \qquad (17)$$

Отсюда следует условие существования стационарного случайного колебания в уравнении (16)

$$\alpha > \nu|\lambda|/4. \qquad (18)$$

$$\text{II.}\quad \ddot{x} + \nu^2(1 + \varepsilon\lambda\cos 2\nu t)\,x = \varepsilon\left[(1 - \gamma x^2)\,\dot{x} + P\cos\nu t\right] + \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi(t). \qquad (19)$$

Здесь $h(x, \dot{x}) = (1 - \gamma x^2)\,\dot{x}$, $\varphi(x, \dot{x}) = 0$, $g(x, \dot{x}) = 0$. В данном случае условие интегрируемости (12) выполняется, а из (13) получим решение соответствующего уравнения КФП

$$W(a, \theta) = Ca \exp\left\{-\frac{2\nu P a}{\sigma^2}\sin\theta + \frac{\nu^2}{\sigma^2}\left|1 + \frac{\nu\lambda}{2}\sin 2\theta\right| a^2 - \frac{\gamma\nu^2}{8\sigma^2}a^4\right\}. \qquad (20)$$

2. Метод разложения в ряд по обобщенной циклической координате. Следуя [2, 4], в уравнении (8) совершаем замену

$$W(a, \theta) = \exp\{\Phi(a, \theta)\}, \qquad (21)$$

тогда уравнение (8) для $\Phi(a, \theta)$ принимает вид

$$\frac{\partial K_1}{\partial a} + \frac{\partial K_2}{\partial \theta} + K_1\frac{\partial \Phi}{\partial a} + K_2\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\sigma^2}{4\nu^2}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial a^2} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right)^2\right] + \\ + \frac{\sigma^2}{4\nu^2 a^2}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2\right]. \qquad (22)$$

Решение уравнения (22) отыскиваем в виде

$$\Phi(a, \theta) = \ln a + \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i(\theta)\,a^i, \qquad (23)$$

где $\mu(\theta)$— неизвестные коэффициенты, зависящие только от θ. Подставляя (23), (9) в (22), приравнивая коэффициенты при a^{-1}, a^0, a^1, a^2, ... в обеих частях тождества, получим систему разделяющихся дифференциальных уравнений для $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$:

$$\mu_1'' + \mu_1 = 0, \qquad «'» = \frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \mu_2'' + 4\mu_2 = -\frac{4\nu}{\sigma^2}[2A_1 + (2B_1 + N_1)\cos\theta + \\ + (2C_1 - M_1)\sin\theta + (2E_1 + 2H_1)\cos 2\theta + (2F_1 - 2L_1)\sin 2\theta] - (\mu_1^2 + \mu_1'^2) - \\ - \frac{2\nu P}{\sigma^2}(\sin\theta\mu_1 + \cos\theta\mu_1'), \qquad \mu_{n+2}'' + (n+2)^2\mu_{n+2} = -\frac{2\nu P}{\sigma^2}\times \\ \times[\sin\theta(n+1)\mu_{n+1} + \cos\theta\mu_{n+1}'] + \frac{4\nu^2}{\sigma^2}\left[\frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta n\mu_n + \left(\frac{\Delta}{2\nu} + \frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta\right)\times \right. \\ \left. \times\mu_n\right] - \frac{4\nu}{\sigma^2}(n+2)[A_{n+1} + B_{n+1}\cos\theta + C_{n+1}\sin\theta + E_{n+1}\cos 2\theta + \\ + F_{n+1}\sin 2\theta] - \frac{4\nu}{\sigma^2}[-M_{n+1}\sin\theta + N_{1+n}\cos\theta - 2L_{n+1}\sin 2\theta + 2H_{n+1}\cos 2\theta] - \\ - \frac{4\nu}{\sigma^2}\sum_{s=1, i=1}^{s+i=n+1}\{i\mu_i(A_s + B_s\cos\theta + C_s\sin\theta + E_s\cos 2\theta + F_s\sin 2\theta) + \\ + \mu_i'(D_s + M_s\cos\theta + N_s\sin\theta + L_s\cos 2\theta + H_s\sin 2\theta)\} -$$

$$-\sum_{i=1,j=1}^{i+j=n+2}(ij\mu_i\mu_j+\mu_i'\mu_j'),\qquad A_k, B_k, C_k, E_k, F_k, D_k, M_k, L_k, N_k, H_k=0,$$

$$k\geqslant m+1,\qquad n=1,2,\ldots. \tag{24}$$

Уравнения (24) позволяют последовательно определить все $\mu_i(\theta)$. Произвольные постоянные интегрирования находятся из условия периодичности функций $\mu_i(\theta)$. Во многих случаях система (24) допускает точное решение вида $\mu_i(\theta)=\psi_i(\theta)$, $\mu_l(\theta)=0$, $i=\overline{1,N}$, $l\geqslant N+1$. Тогда точное решение уравнения КФП получим в виде

$$W(a,\theta)=Ca\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\psi_i(\theta)\,a^i\right\}. \tag{25}$$

Таким свойством обладают, например, системы, для которых выполняется условие интегрируемости (12). В качестве применения системы (24) рассмотрим линейную систему

$$\ddot{x}+2\varepsilon\alpha\dot{x}+\omega^2(1+\varepsilon\lambda\cos 2\nu t)\,x=\varepsilon P\cos\nu t+\sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t), \tag{26}$$

$$\omega^2-\nu^2=\varepsilon\Delta. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26) и пренебрегая членами порядка ε^2, получим

$$\ddot{x}+\nu^2x=\varepsilon\,[-\Delta x-\nu^2x\cos 2\nu tx-2\alpha\dot{x}+P\cos\nu t]+\sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t). \tag{28}$$

Вычисление по формуле (9) дает

$$K_1(a,\theta)=\frac{\sigma^2}{4\nu^2}a^{-1}-\frac{P}{2\nu}\sin\theta+\left(\frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta-\alpha\right)a,\qquad K_2(a,\theta)=$$

$$=-\frac{P}{2\nu}\cos\theta\,a^{-1}+\left(\frac{\Delta}{2\nu}+\frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta\right),\qquad K_{11}(a,\theta)=\frac{\sigma^2}{4\nu^2}, \tag{29}$$

$$K_{22}(a,\theta)=\frac{\sigma^2}{4\nu^2a^2},\qquad K_{12}=0.$$

Решение соответствующего уравнения КФП (22) отыскиваем в виде

$$\Phi(a,\theta)=\ln C+\ln a+\mu_1(\theta)\,a+\mu_2(\theta)\,a^2. \tag{30}$$

В данном случае система, соответствующая системе (24), принимает вид

$$\mu_1''+\mu_1=0, \tag{31}$$

$$\mu_2''+4\mu_2=-\frac{8\alpha\nu^2}{\sigma^2}-(\mu_1^2-\mu_1'^2)-\frac{2\nu P}{\sigma^2}(\sin\theta\mu_1+\cos\theta\mu_1'), \tag{32}$$

$$\mu_1\left(-\alpha+\frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta\right)+\left(\frac{\Delta}{2\nu}+\frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta\right)\mu_1'-\frac{P}{2\nu}(\sin 2\theta\mu_2+\cos\theta\mu_2')-$$

$$-\frac{\sigma^2}{4\nu^2}(4\mu_1\mu_2+2\mu_1'\mu_2')=0, \tag{33}$$

$$2\mu_2\left(-\alpha+\frac{\nu\lambda}{4}\sin 2\theta\right)+\left(\frac{\Delta}{2\nu}+\frac{\nu\lambda}{4}\cos 2\theta\right)\mu_2'-\frac{\sigma^2}{4\nu^2}(4\mu_2^2+\mu_2'^2)=0. \tag{34}$$

Решая уравнения (31), (32), получим

$$\mu_1(\theta)=A\cos\theta+B\sin\theta, \tag{35}$$

$$\mu_2(\theta)=N+D\cos 2\theta+C\sin 2\theta, \tag{36}$$

$$N=-\frac{2\nu^2\alpha}{\sigma^2}-\frac{1}{4}\left(A^2+B^2+\frac{2\nu P}{\sigma^2}B\right), \tag{37}$$

где A, B, C, D — пока произвольные постоянные интегрирования. Для определения их подставим (35), (36) в уравнения (33), (34) и, приравняв коэффициенты разложения Фурье двух частей этих уравнений, получим шесть уравнений для пяти неизвестных A, B, D, C, N:

$$\left(-\alpha - \frac{\sigma^2}{\nu^2} N\right) D + \frac{\Delta}{2\nu} C = 0, \tag{38}$$

$$-\frac{\Delta}{2\nu} D + \left(-\alpha - \frac{\sigma^2}{\nu^2} N\right) C = -\frac{\nu\lambda}{4} N, \tag{39}$$

$$-2\alpha N + \frac{\nu\lambda}{2} C = \frac{\sigma^2}{\nu^2} (D^2 + C^2 + N^2), \tag{40}$$

$$\left(-\alpha - \frac{\sigma^2}{\nu^2} N - \frac{\sigma^2}{\nu^2} D\right) A + \left(\frac{\Delta}{2\nu} + \frac{\nu\lambda}{4} - \frac{\sigma^2}{\nu^2} C\right) B = 0, \tag{41}$$

$$\left(-\frac{\Delta}{2\nu} + \frac{\nu\lambda}{4} - \frac{\sigma^2}{\nu^2} C\right) A + \left(-\alpha - \frac{\sigma^2}{\nu^2} N + \frac{\sigma^2}{\nu^2} D\right) B = 0. \tag{42}$$

Решая эти уравнения, находим:

$$A = \frac{\alpha P \Delta}{\sigma^2 [\alpha^2 + (\Delta/2\nu)^2]}, \qquad B = -\frac{2\alpha^2 P \nu}{\sigma^2 [\alpha^2 + (\Delta/2\nu)^2]}, \qquad N = -\frac{2\nu^2\alpha}{\sigma^2},$$
$$D = -\frac{\alpha\lambda\Delta\nu^2}{4\sigma^2 [\alpha^2 + (\Delta/2\nu)^2]}, \qquad C = \frac{\alpha^2\nu^3\lambda}{\sigma^2 [\alpha^2 + (\Delta/2\nu)^2]}. \tag{43}$$

Следовательно, решение системы (31) — (34) будет иметь вид

$$\mu_1(\theta) = \frac{2P\alpha\nu}{\sigma^2 [\alpha^2 + (\Delta/2\nu)^2]} \left(\frac{\Delta}{2\nu} \cos\theta - \alpha \sin\theta\right), \qquad \mu_2(\theta) =$$
$$= -\frac{2\nu^2\alpha}{\sigma^2} + \frac{\alpha\lambda\nu^3}{2\sigma^2 [\alpha^2 + (\Delta/2\nu)^2]} \left(-\frac{\Delta}{2\nu} \cos 2\theta + \alpha \sin 2\theta\right). \tag{44}$$

Требуя, чтобы $\mu_2(\theta) < 0$, и замечая, что

$$\max_\theta \mu_2(\theta) = -\frac{2\nu^2\alpha}{\sigma^2} + \sqrt{D^2 + C^2} = \frac{\alpha\nu^2}{2\sigma^2} \left(-4 + \frac{|\lambda|\nu}{\sqrt{\alpha^2 + (\Delta/\nu)^2}}\right),$$

получим условие существования установившегося случайного колебания в линейной системе (28):

$$\sqrt{\alpha^2 + (\Delta/2\nu)^2} > \nu|\lambda|/4. \tag{45}$$

Подставляя (24) в (30), получим плотность вероятностей $W(a, \theta)$ амплитуды и фазы системы (28):

$$W(a, \theta) = Ca \exp\left\{\frac{2P\alpha\nu a}{\sigma^2 [\alpha^2 + (\Delta/2\nu)^2]} \left(\frac{\Delta}{2\nu} \cos\theta - \alpha \sin\theta\right) - \frac{2\nu^2\alpha a^2}{\sigma^2} +\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha\lambda\nu^3 a^2}{2\sigma^2 [\alpha^2 + (\Delta/2\nu)^2]} \left(-\frac{\Delta}{2\nu} \cos 2\theta + \alpha \sin 2\theta\right)\right\}. \tag{46}$$

В момент наступления точного резонанса ($\Delta = 0$) решение (46) совпадает с решением (17), а условие (45) — с условием (18). В отсутствие внешней периодической силы ($P = 0$) из решения (46) получим решение, исследованное в [5].

Плотность вероятностей (46) достигает экстремума в точках (a, θ), где $\partial W/\partial a = 0$, $\partial W/\partial\theta = 0$; отсюда следует система уравнений для среднего значения амплитуды и фазы:

$$\frac{1}{a} + \frac{\alpha\Delta\,(P\cos\theta - (\nu^2\lambda a/2)\cos 2\theta) + \alpha^2\nu\,(\nu^2\lambda\sin 2\theta a - 2P\sin\theta)}{\sigma^2\,[\alpha^2 + (\Delta/2\nu)^2]} -$$

$$- \frac{4\nu^2\alpha}{\sigma^2}\,a = 0, \qquad \frac{\Delta}{\nu}\,(\nu^2\lambda a^2\sin 2\theta - P\sin\theta) + 2\alpha\,(\lambda\nu^2 a^2\cos 2\theta - P\cos\theta) = 0. \tag{47}$$

В отсутствие случайного действия ($\sigma = 0$) система (47) совпадает с системой, полученной в [1].

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 457 с.
2. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу о решении уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для неавтономных систем, подверженных периодическим и случайным возбуждениям.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 4, с. 525—528.
3. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах.— В кн.: Приближенные методы исследования нелинейных систем. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 102—147.
4. *Нгуен Донг Ань.* О некоторых методах интегрирования уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова в теории случайных колебаний.— Укр. мат. журн., 1981, **33**, № 1, с. 87—91.
5. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний.— М. : Наука, 1980.— 368 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 17.04.84