УДК 519.217+517.937

А. И. Зейфман

Асимптотическое поведение среднего для правильных процессов рождения и гибели

1. Рассмотрим неоднородный процесс рождения и гибели (в дальнейшем — п. р. г.) $X(t)$ с интенсивностями: рождения — $\lambda_k(t) \geqslant 0$, гибели — — $\mu_k(t) \geqslant 0$ (см. [1, 2]). Для вероятностей $y_k(t) = \Pr\{X(t) = k\}$ получаем стандартными методами следующую систему дифференциальных уравнений:

$$y_0' = -\lambda_0(t)\, y_0 + \mu_1(t)\, y_1, \quad y_k' = \lambda_{k-1}(t)\, y_{k-1} - [\lambda_k(t) + \mu_k(t)]\, y_k + \\ + \mu_{k+1}(t)\, y_{k+1}, \quad k \geqslant 1. \tag{1}$$

Системой (1) описываются, в частности, многие задачи теории массового обслуживания и биологии [1—3].

В настоящей работе для п. р. г. изучается поведение среднего $M(X(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} k y_k(t)$ как функции времени t. В некоторых простейших случаях можно найти явное выражение для $M(X(t))$ [1, 3], в общем же случае такое выражение получить не удается, и интерес представляют качественные результаты. Введем необходимые определения.

Будем называть п. р. г.: правильным I типа, если $\forall t \geqslant 0$, $\forall i \geqslant 1$ $\lambda_i(t) \leqslant \mu_i(t)$; усиленно правильным I типа, если при некотором $\alpha > 0$ $\forall t \geqslant 0$, $\forall i \geqslant 1$ $\lambda_i(t) \leqslant (1-\alpha)\,\mu_i(t)$; правильным II типа, если $\forall t \geqslant 0$, $\forall i \geqslant 1$ $\lambda_i(t) \geqslant \mu_i(t)$; усиленно правильным II типа, если при некотором $\alpha > 0$ $\forall t \geqslant 0$, $\forall i \geqslant 1$ $\lambda_i(t) \geqslant (1+\alpha)\,\mu_i(t)$.

Исходя из вероятностного смысла системы(1), будем отождествлять ее с дифференциальным уравнением

$$y' = A(t)\, y, \quad y = \operatorname{col}(y_0, y_1, \ldots), \tag{2}$$

в пространстве последовательностей l_1, применяя к изучению уравнения (2) методы [4].

Всюду далее предполагаем, что ($\mu_0(t) \equiv 0$)

$$\sup_{i,t} [\lambda_i(t) + \mu_i(t)] < \infty, \tag{3}$$

тогда $\| A(t) \|_{l_1} < \infty$ $\forall t \geqslant 0$.

Потребуем, чтобы оператор-функция $A(t)$ была локально суммируема по Бохнеру на полуоси $[0, \infty)$; для этого достаточно, например, чтобы все $\lambda_i(t)$, $\mu_j(t)$ были линейными комбинациями конечного числа локально суммируемых функций .

2. Теорема 1. *Пусть п. р. г. — усиленно правильный* I *типа, причем* $\inf_{i,t} \mu_i(t) = m > 0$, *а* $\sup_t \lambda_0(t) \leqslant m\alpha^2/4$. *Тогда* $M(X(t))$ *при* $t \to \infty$ *стремится к некоторому предельному режиму, не зависящему от начального распределения вероятностей* $y(0)$.

Следствие. *Если в условиях теоремы* 1 $\lambda_i(t)$, $\mu_j(t)$ ω-*периодичны, то* $M(X(t))$ *асимптотически* ω-*периодична при* $t \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть п. р. г. — правильный* II *типа. Тогда* $M(X(t))$ *монотонно не убывает. Если* $\inf_{i,t} \mu_i(t = m > 0$, $\lambda_0(t) \geqslant \alpha$ *и п. р. г. — усиленно правильный* II *типа, то* $\lim_{t\to\infty} M(X(t)) = \infty$.

Сформулируем отдельно результаты для случая, когда $\lambda_0(t) \equiv 0$ (нулевое состояние является поглощающим; в биологии это соответствует изолированной популяции).

Теорема 3. *Пусть* $\lambda_0(t) \equiv 0$, $\inf_{i,t} \mu_i(t) = m > 0$. *Тогда, если п. р. г. — правильный* I *типа, то* $M(X(t))$ *монотонно не возрастает; если п. р. г. — усиленно правильный* I *типа, то* $\lim_{t\to\infty} M(X(t)) = 0$.

Теорема 4. *Пусть* $\lambda_0(t) \equiv 0$ *и п. р. г. — правильный* II *типа. Тогда* $M(X(t))$ *монотонно не убывает. Если* $\lambda_0(t) \equiv 0$, *п. р. г. — усиленно правильный* II *типа, причем при всех* $k \geqslant 1$ *(полагаем* $\mu_0(t) \equiv 0$) $\lambda_k(t)$, $\mu_k(t)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[0, \infty)$ *и* $\forall t \geqslant 0$ $\lambda_{k+1} - \mu_{k+1} \geqslant (\lambda_k^2 - \mu_k^2)/\lambda_k - \mu_k(\lambda_{k-1} - \mu_{k-1})/\lambda_k + (\mu_k' - \lambda_k')/\lambda_k$, $\sup\limits_{i,t}[\lambda_i'(t) + \mu_i'(t)] < \infty$, *то при* $y_0(0) < 1$ $\lim\limits_{t\to\infty} M(X(t)) = \infty$.

Отметим в качестве примера, что при $\lambda_0(t) \equiv 0$, $\lambda_k(t) \equiv \lambda$, $\mu_k(t) \equiv a^k\lambda$, $0 < a < 1$, условия теоремы 4 необходимы и выполняются при $\lambda > 0$.

3. Доказательство теоремы 1 основано на методике [5]. Множество s векторов из l_1 с неотрицательными координатами и нормой 1 является инвариантным для системы (1). Заменим $y_0 = 1 - \sum\limits_{i\geqslant 1} y_i$; тогда из (1) получим систему

$$y' = \begin{pmatrix} -(\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1) & (\mu_2 - \lambda_0) & -\lambda_0 & \cdots \\ \lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \mu_3 & \\ & \lambda_2 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \equiv B(t)\,y + f(t), \tag{4}$$

где $y = \mathrm{col}(y_1, y_2, \ldots)$.

Рассмотрим бесконечные матрицы $D = \mathrm{diag}(1, (1 + \alpha/2), (1 + \alpha/2)^2, \ldots)$, $N = \mathrm{diag}(1, 2, 3, \ldots)$ и банаховы пространства l_{1D} и l_{1N}, состоящие из векторов-столбцов $x = \mathrm{col}(x_1, x_2, \ldots)$ таких, что соответственно

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 + \alpha/2)^k |x_{k+1}| < \infty; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k|x_k| < \infty$$

с нормами

$$\|x\|_{l_{1D}} = \|Dx\|_{l_1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \alpha/2)^k |x_{k+1}|; \qquad \|x\|_{l_{1N}} = \|Nx\|_{l_1} = \sum_{k=1}^{\infty} k|x_k|.$$

Выпишем соответствующую (4) однородную систему

$$x' = B(t)\,x. \tag{5}$$

Покажем, что уравнение, соответствующее системе (5), устойчиво в пространстве l_{1N}. Для этого вычислим логарифмическую норму [4] $\gamma(B)_{l_{1N}} = \gamma(NBN^{-1})_{l_1}$. Имеем:

$$NBN^{-1} = \begin{pmatrix} -(\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1) & (\mu_2 - \lambda_0)/2 & -\lambda_0/3 & \cdots \\ 2\lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_2) & 2\mu_3/3 & \\ & 3\lambda_2/2 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

С учетом того, что $\lambda_0 \leqslant m\alpha^2/4 \leqslant m\alpha$, получаем

$$\gamma(B)_{l_{1N}} = \sup[-(\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1) + 2\lambda_1; \quad (\mu_2 - \lambda_0)/2 - (\lambda_2 + \mu_2) + 3\lambda_2/2; \quad \lambda_0/k + (k-1)\mu_k/k - (\lambda_k + \mu_k) + (k+1)\lambda_k/k\ (k > 2)] \leqslant \sup[-\lambda_0 - \alpha\mu_1; \ -\lambda_0/2 - \alpha\mu_2/2; \ (\lambda_0 - \alpha\mu_k)/k\ \ (k > 2)] \leqslant 0.$$

Значит, системы (5) и (4) устойчивы по Ляпунову в пространстве l_{1N}. Найдем $\gamma(B)_{l_{1D}} = \gamma(DBD^{-1})_{l_1}$. Имеем

$$DBD^{-1} = \begin{pmatrix} -(\lambda_0+\lambda_1+\mu_1) & (\mu_2-\lambda_0)/(1+\alpha/2) & -\lambda_0/(1+\alpha/2)^2 & \cdots \\ (1+\alpha/2)\lambda_1 & -(\lambda_2+\mu_2) & \mu_3/(1+\alpha/2) & \\ & (1+\alpha/2)\lambda_2 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\lambda_0 \leqslant m\alpha^2/4$, $\lambda_i \leqslant (1-\alpha)\mu_i$, $i \geqslant 1$, $\mu_j \geqslant m$, $j \geqslant 1$, $(1+\alpha/2)^{-1} = 1-\alpha/2+\alpha^2/4 - \ldots < 1-\alpha/2+\alpha^2/4$, получаем:

$$\gamma(B)_{l_{1D}} = \sup[-(\lambda_0+\lambda_1+\mu_1)+(1+\alpha/2)\lambda_1;\ (\mu_2-\lambda_0)/(1+\alpha/2) - (\lambda_2+\mu_2)+(1+\alpha/2)\lambda_2;\quad \lambda_0/(1+\alpha/2)^{k-1}+\mu_k/(1+\alpha/2)-(\lambda_k+\mu_k)+(1+\alpha/2)\lambda_k\ \ (k>2)] \leqslant \sup[-\mu_1\alpha^2/4;\ m\alpha^2/4(1+\alpha/2)^2 - m\alpha^2/4] = -m\alpha^3(1+\alpha/4)/4(1+\alpha/2)^2 < 0.$$

Отсюда, как известно, следует отрицательность генерального показателя уравнения (5) в пространстве l_{1D}. Тогда уравнение (5) асимптотически устойчиво в l_{1D}, а следовательно, и в l_{1N}. Если коэффициенты ω-периодичны, то у неоднородного уравнения (4) в пространстве l_{1D} существует асимптотически устойчивое ω-периодическое решение, которое будет асимптотически устойчивым и в пространстве l_{1N}.

Отметим, что при $x(t) = \mathrm{col}(x_0(t), x_1(t), \ldots) \in s$ $\|x(t)\|_{l_{1N}} = \sum_{k=0}^{\infty} kx_k(t) = M(X(t))$, откуда и получаем утверждения теоремы и следствия.

Доказательство теоремы 2. Умножая k-е уравнение системы (1) на k и суммируя, находим $M'(X(t)) = \lambda_0(t)y_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[\lambda_k(t)-\mu_k(t)]\,y_k$. Пусть $y(0)\in s$, тогда при $t \geqslant 0$ $y(t) \in s$; следовательно, все $y_i(t) \geqslant 0$, и при $\lambda_i \geqslant \mu_i$ получаем $M'(X(t)) \geqslant 0$. Если же $\lambda_i \geqslant (1+\alpha)\mu_i$, $\lambda_0 \geqslant \alpha$, то при $y \in s$

$$M'(X(t)) \geqslant \alpha y_0 + \alpha m \sum_{k=1}^{\infty} y_k \geqslant \alpha \min(1, m) \sum_{k=0}^{\infty} y_k = \alpha\min(1, m) = \beta > 0.$$

В условиях теоремы очевидно найдется t_1 такое, что $M(X(t_1)) > 0$. Тогда при $t \geqslant t_1$ $M(X(t)) \geqslant M(X(t_1))\exp[\beta(t-t_1)]$.

Доказательство теоремы 3. Невозрастание $M(X(t))$ очевидно. Существование предельного режима у $M(X(t))$ доказано в теореме 1. Так как система (4) в условиях теоремы 3 однородна, то ее асимптотическая устойчивость означает стремление решений к нулю, откуда и получаем $\lim_{t\to\infty} M(X(t)) = 0$.

Доказательство теоремы 4. Неубывание $M(X(t))$ очевидно. Пусть $\lambda_k \geqslant (1+\alpha)\mu_k$, выполняются требуемые неравенства и $y_0(0) < 1$. Тогда $M(X(0)) > 0$. При $y \in s$ имеем:

$$M'(X(t)) = \sum_{k\geqslant 1}(\lambda_k-\mu_k)\,y_k \geqslant \alpha \sum_{k\geqslant 1} y_k = \alpha(1-y_0).$$

Тогда $\forall t$ $M'(X(t)) > 0$. Найдем $M''(X(t))$, дифференцируя уравнения системы (1), умножая k-е из них на k и складывая:

$$M''(X(t)) = \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k' - \mu_k')\,y_k + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\mu_k)\,y_k' =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k' - \mu_k' + \mu_k^2 - \lambda_k^2 + \lambda_k\lambda_{k+1} - \lambda_k\mu_{k+1} + \lambda_{k-1}\mu_k - \mu_{k-1}\mu_k)\,y_k \geqslant 0.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

1. *Баруча-Рид А. Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. —М. Наука, 1969.— 512 с.
2. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания.— М. : Наука, 1966.— 432 с.
3. *Doorn E. van.* Stochastic Monotonicity and Queueing Applications of Birth-Death Processes.— Lect. Notes in Statist., 1981, 4, p. 1—118.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 536 с.
5. *Зейфман А. И.* Об асимптотическом поведении решений прямой системы Колмогорова.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 5, с. 621—624.

Вологод. пед. ин-т Поступила 18.11.83