УДК 517.956.4

В. Г. Бондаренко (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

МЕТОД ПАРАМЕТРИКСА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

We present a scheme of construction of the fundamental solution of parabolic equation on the Riemann manifold with nonpositive curvature.

На рімановому многовиді недодатної кривизни наведено конструкцію побудови фундаментального розв'язку параболічного рівняння.

1. Постановка задачи. На полном односвязном n-мерном римановом многообразии M с метрическим тензором $g_{jk}(x)$, расстоянием $\rho(x, y)$ и объемом σ, рассматривается параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа – Бельтрами: если $\{e_k\}$ — ортобазис в T_xM, то

$$\Delta u = \sum_k (\nabla e_k \operatorname{grad} u,\ e_k) \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} u,$$

а в локальных координатах ($\Gamma_{ij}^k(x)$ — коэффициент связности)

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g^{kj}(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}\right) + \Gamma_{kj}^k(x)\, g^{ir}(x)\frac{\partial u}{\partial x^r}.$$

Обозначим через $p(t, x, y) = p(t, y, x)$ фундаментальное решение (ядро теплопроводности) уравнения (1). В линейном пространстве это ядро строится классическим методом параметрикса и в качестве начального приближения выбирается функция

$$(2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2t} g_{jk}(x)(y^j - x^j)(y^k - x^k)\right\}.$$

В данной работе при построении фундаментального решения начальное приближение имеет вид

$$m(t, x, y) = q(t, x, y) \exp\left\{-\frac{\varphi(x, y)}{2}\right\}, \tag{2}$$

где

$$q(t, x, y) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\rho^2(x, y)}{2t}\right\},$$

а функция $\varphi(x, y)$ определяется в терминах полей Якоби и зависит от кривизны многообразия. Фундаментальное решение ищется в виде

$$p(t, x, y) = m(t, x, y) + l(t, x, y), \tag{3}$$

где

$$l(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_M m(t-\tau,\, x,\, z)\, r(\tau,\, z,\, y)\, \sigma(dz). \tag{3a}$$

Подлежащая определению функция r удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра

$$r(t,x,y) = h(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_M h(t-\tau,\, x,\, z) r(\tau,\, z,\, y) \sigma(dz), \tag{4}$$

а невязка

$$h = \frac{1}{2}\Delta m - \frac{\partial m}{\partial t}.$$

Замечание. Если в качестве начального приближения выбрать функцию $q(t,x,y)$, то

$$\frac{1}{2}\Delta q - \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{a(x,y)}{t} q(t,x,y),$$

где функция

$$a(x,y) = O\big(\rho^2(x,y)\big), \quad \rho(x,y) \to 0, \quad 0 \le a(x,y) < \text{const},$$

т. е. невязка имеет интегрируемую по t особенность. Множитель $\exp\{-\varphi(x, y)/2\}$ в формуле (2) улучшает начальное приближение: устанавливается оценка

$$\left|\frac{1}{2}\Delta m - \frac{\partial m}{\partial t}\right| < cm.$$

Идея подобного улучшения была впервые предложена в работе К. Иосиды [1], который строил начальное приближение в виде

$$q(t,x,y) = \sum_{i=0}^{k} u_i(t,x,y),$$

где функции u_i удовлетворяли некоторой рекуррентной системе дифференциальных уравнений. Однако, в цитируемой работе отсутствуют условия разрешимости упомянутой системы.

2. Обозначения и условия. Геодезическая на многообразии M, соединяющая точки y и x, будет обозначаться $\gamma(s)$, s — натуральный параметр, $\gamma(0) = y$, $\gamma(\rho(x,y)) = x$. Экспоненциальное отображение обозначается Exp_x. Если $L(x)$, $x \in M$, — поле операторов, действующих в касательном пространстве $T_x M$, то норма Гильберта – Шмидта определяется равенством

$$\sigma_2(L(x)) = \sqrt{\sum_k \|L(x)e_k\|^2},$$

где $\{e_k\}$ — ортобазис в $T_x M$. Тензор кривизны $R(x)$, компоненты которого в локальных координатах задаются равенством

$$R_{ijkl}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k}\right) + g_{pq}\left(\Gamma^p_{jk}\Gamma^q_{il} - \Gamma^p_{ik}\Gamma^q_{jl}\right),$$

порождает четырехмерный функционал

$$(R(x)(U,V)W,H) = R_{ijkl} U^i V^j W^k H^l,$$

тензор Риччи

$$\operatorname{Ric}(U, V) = \sum_k \left(R(x)(U, e_k)V, e_k \right)$$

и скалярную кривизну

$$r(x) = \sum_j \operatorname{Ric}(x)(e_j, e_j).$$

Напомним, что секционной кривизной многообразия в двумерном направлении $\{U, V\}$ называется величина

$$\frac{(R(x)(U,V)V,U)}{\|U\|^2\|V\|^2 - (U,V)^2}.$$

Сформулируем условия на многообразии в терминах его тензора кривизны:

1) $(R(x)(U,V)U,V) \geq 0$ для всех $x \in M$, $U, V \in T_xM$, т. е. секционная кривизна многообразия неположительна;

2) для произвольных ортобазисов $\{e_k\}$, $\{\varphi_k\}$ в T_xM

$$\sum_k \left|\left(R(x)(U, e_k)V, \varphi_k \right)\right| \leq c\sqrt{\operatorname{Ric}(x)(U,U)\operatorname{Ric}(x)(V,V)}.$$

Остальные условия означают достаточно быстрое убывание тензора кривизны и его ковариантных производных вдоль любой геодезической γ:

3) $\int\limits_0^\infty s\,r(\gamma(s))\,ds < c;$

4) $\sum \left\|\nabla_{e_k} R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), \varphi_k)\,\dot\gamma(s)\right\| = f_1(s);$

5) $\sum \left\|(\nabla_{\dot\gamma(s)} R(\gamma(s)))(e_k, \dot\gamma(s))\varphi_k\right\| = f_2(s);$

6) $\sum \left|((\nabla_u R(\gamma(s)))(\dot\gamma(s), e_k)\dot\gamma(s), e_k)\right| \leq \|L(\gamma(s))U\|;$

7) $\sum \left\|\nabla_{\dot\gamma(s)} R(\gamma(s))(e_j, \dot\gamma(s))e_k\right\|^2 = f_3^2(s);$

8) $\sum \left|\left((\nabla_{\dot\gamma(s)} R(\gamma(s)))(\varphi_j, \dot\gamma(s))e_j, \varphi_k\right)\right| = f_4(s);$

9) $\sum\limits_{j,k} \left|\left((\nabla_{e_k}\nabla_{e_j} R)(\gamma(s))(\dot\gamma(s), e_j)\gamma(s), e_k\right)\right| = f_5(s);$

10) $\sum\limits_{j,k} \left|\left((\nabla_{e_j}\nabla_{\dot\gamma(s)} R)(\gamma(s))(e_j, \dot\gamma(s))e_j, e_k\right)\right| = f_6(s),$

где функции $f_j(s)$ и оператор $L(x)$ таковы, что

$$\int\limits_0^\infty s^2 f_j(s)\,ds < c, \quad j = 1, 2; \qquad \int\limits_0^\infty s f_j(s)\,ds < c, \quad j = 3, \ldots, 6;$$

$$\int\limits_0^\infty s\sigma_2\big(L(\gamma(s))\big)\,ds < c.$$

Пусть U — векторное поле, определенное вдоль геодезической γ. Обозначим $U'(s) = \nabla_{\dot\gamma(s)} U\big(\gamma(s)\big)$.

Определение 1. *Пусть γ — геодезическая, $\gamma(0) = y$, $\gamma(\rho) = x$. Базисными полями Якоби $Z_k(s)$ называются решения краевой задачи*

$$Z_k''(s) = R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z_k(s))\,\dot\gamma(s), \quad Z_k(0) = 0, \quad Z_k(\rho) = e_k,$$

где $\{e_1 = \dot\gamma(\rho),\ e_2, \ldots, e_k\}$ — полугеодезический ортобазис в T_xM.

Замечание. Существование и единственность решения краевой задачи гарантируется неположительностью кривизны.

Положим

$$a(x, y) = \sum_k \left(\rho Z_k'(\rho) - Z_k(\rho),\ Z_k(\rho)\right) = \operatorname{tr}(T(x) - I), \tag{5}$$

где Z_k — базисные поля Якоби, а оператор T определяется на якобиевых полях равенством $T(\gamma(s))Z = sZ'(s)$. Из выпуклости $\|Z_k(s)\|$ следует оценка [2, 3]:

$$0 \le a(x, y) \le \sum_k \int_0^\rho \tau\left(R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau),\ Z_k(\tau))\dot\gamma(\tau),\ \Phi(\tau, \rho)Z_k(\rho)\right)d\tau,$$

где $\Phi(\tau, s)$ — оператор параллельного переноса вдоль γ.

3. Основные результаты. Положим

$$\varphi(x, y) = \int_0^{\rho(x,y)} \frac{a(\gamma(s),\ y)}{s}\,ds.$$

Лемма. *Пусть выполнены условия* $1-10$. *Тогда выражения*

$$\|\operatorname{grad}\varphi(x, y)\| \quad \text{и} \quad \sum_i \left\|\left(\nabla_{e_i}\operatorname{grad}\varphi(x, y),\ e_i\right)\right\|$$

ограничены константой.

Доказательство. Пусть X_i — базисные поля Якоби вдоль γ. Из равенства (5) для $i \ge 2$ следует представление

$$(\operatorname{grad}\varphi(x, y),\ X_i(s)) = \int_0^\rho \frac{1}{s}(\operatorname{grad}\varphi(x, y),\ X_i(s))\,ds =$$

$$= \int_0^\rho \sum_k \left(\nabla_{\dot\gamma(s)}\nabla_{X_i(s)}Z_k(s),\ Z_k(s)\right)ds, \tag{6}$$

где Z_k — базисные поля Якоби, образующие ортобазис в $T_{\gamma(s)}M$. При оценке нормы

$$\|\operatorname{grad}\varphi(x, y)\|^2 = \frac{a^2(x, y)}{\rho^2(x, y)} + \sum_i (\operatorname{grad}\varphi(x, y),\ X_i(\rho))^2$$

используется тот факт, что поле $\nabla_X Z$ удовлетворяет уравнению

$$(\nabla_X Z)''(\tau) = R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau),\ \nabla_X Z(\tau))\dot\gamma(\tau) + f(\tau, X, Z), \tag{7}$$

где векторное поле

$$f(s, X(s), Z(s)) = 2R(\gamma(s))(\dot\gamma(s),\ X(s))Z'(s) + 2R(\gamma(s))(\dot\gamma(s),\ Z(s))X'(s) +$$
$$+ (\nabla_{\dot\gamma}R)(\gamma(s))(\dot\gamma(s),\ X(s))Z(s) + (\nabla_X R)(\gamma(s))(\dot\gamma(s),\ Z(s))\dot\gamma(s),$$

а также полученное в [2] представление

$$(\nabla_X Z)(\tau) = -\left(X'(\tau),\ Z(\tau)\right)\dot\gamma(\tau) + H(\tau), \quad H(\tau) \perp \dot\gamma(\tau), \quad H(s) = 0,$$

и оценка второго слагаемого

$$\|H(\tau)\| \le (s - \tau)\int_0^s \|f(\tau, X(\tau), Z(\tau))\|\,d\tau.$$

Преобразуем (6) к виду

$$\left(\nabla_{\dot\gamma(s)}\nabla_{X_i(s)} Z_k(s),\ Z_k(s)\right) = \int_0^s f(\tau, X_i(\tau), Z_k(\tau), Z_k(\tau))\, d\tau.$$

Условия леммы позволяют получить оценку

$$\sum_{i=2}^n \left(\int_0^\rho \sum_k \int_0^s (f(\tau, X_i(\tau), Z_k(\tau)), Z_k(\tau))\, d\tau\right)^2 \le \text{const}\left(\int_0^\rho \tau r(\gamma(\tau))\, d\tau + \int_0^\rho \tau \sigma_2(L(\dot\gamma(\tau)))\, d\tau\right),$$

что и доказывает ограниченность $\|\operatorname{grad}\varphi(x, y)\|$.

При оценке суммы

$$\sum_i \left|\left(\nabla_{X_i(\rho)} \operatorname{grad}\varphi(x, y),\ X_i(\rho)\right)\right|$$

основную трудность представляет оценка выражения

$$\sum_{i,k} \int_0^\rho \left[\left(\nabla_{\dot\gamma(s)}\nabla^2_{X_i(s)} Z_k(s)\right) - \left(\nabla^2_{X_i(s)} Z_k(s),\ Z_k'(s)\right)\right] ds + \frac{a(x, y)}{\rho(x, y)} \sum_i \left(X_i'(\rho),\ X_i(\rho)\right). \quad (8)$$

Подынтегральную функцию в первом слагаемом приведем к виду

$$\int_0^\rho \phi(\tau, X_i(\tau), Z_k(\tau))\, d\tau,$$

где векторное поле ϕ определяется из уравнения

$$\left(\nabla_X^2 Z\right)'' = R\left(\dot\gamma,\ \nabla_X^2 Z\right)\dot\gamma + \phi,$$

полученного дифференцированием уравнения (7) вдоль поля X_i. Если теперь преобразовать второе слагаемое в (8)

$$\frac{a(x, y)}{\rho(x, y)} \sum_k \left(X_i'(\rho),\ X_i(\rho)\right) = \sum_i \int_0^\rho \frac{d}{ds}\left[\frac{a(\gamma(s), y)}{s}\left(X_i'(s),\ X_i(s)\right)\right] ds,$$

то несложные преобразования в (8) приводят к нужной оценке

$$\sum_i \left|\left(\nabla_{X_i(\rho)} \operatorname{grad}\varphi(x, y),\ X_i(\rho)\right)\right| < c\int_0^\rho s r(\gamma(s))\, ds < \text{const}.$$

Следствие. *В условиях леммы невязка*

$$h = \frac{1}{2}\Delta m - \frac{\partial m}{\partial t},$$

где функция m определена равенством (2), *удовлетворяет оценке*

$$|h(t, x, y)| < c\, m(t, x, y), \qquad t > 0, \quad x, y \in M.$$

Доказательство. Прямое вычисление невязки дает

$$h(t, x, y) =$$

$$= -m(t, x, y)\left(-\frac{a(x, y)}{t} + \frac{\rho(x, y)}{t}(\operatorname{grad}\varphi(x, y),\ \dot\gamma(\rho)) + \frac{1}{8}\|\operatorname{grad}\varphi(x, y)\|^2 - \frac{1}{2}\Delta\varphi(x, y)\right),$$

и нужное неравенство следует из определения функции $\varphi(x, y)$ и утверждения леммы.

Теорема 1. *В условиях леммы интегральное уравнение* (4) *имеет единственное решение, удовлетворяющее оценке*

$$|r(t, x, y)| < c\, e^{ct} q(t, x, y), \quad t > 0, \quad x, y \in M,$$

где c — некоторая константа.

Доказательство. Решая (4) обычным итерационным методом

$$r(t,x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(t,x,y),$$

где

$$r_0 = h, \;\; r_n(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_M h(t-\tau,x,z) r_{n-1}(\tau,z,y)\sigma(dz),$$

можно установить оценку

$$|r_n(t,x,y)| < \frac{c^n t^n}{n!} q(t,x,y),$$

для доказательства которой используем замену [1]

$$z(U) = \mathrm{Exp}_x\left(\sqrt{\frac{\tau(t-\tau)}{t}}\,U - \frac{t-\tau}{t}\rho(x,y)\dot{\gamma}(\rho)\right), \tag{9}$$

переводящую интегрирование по M в интегрирование по касательному пространству T_xM. Тогда для интегрируемой функции α

$$\int_M \alpha(z)\,q(\tau,z,y)q(t-\tau,x,z)\sigma(dz) = q(t,x,y)\int_{T_xM}\alpha(z(U))\,J(x,U)\mu_x(dU),$$

где якобиан J ограничен, а μ_x — каноническая гауссова мера на T_xM. Из оценки для r_n и следует утверждение теоремы.

Следствие. *Справедливо представление* (3), (3a) *для фундаментального решения, причем*

$$|l(t,x,y)| \le c\,t\,e^{ct}\,q(t,x,y).$$

Полученное представление для ядра теплопроводности позволяет получить таковое и для его градиента.

Теорема 2. *Пусть V — векторное поле на M. Тогда в условиях леммы имеет место представление*

$$(\mathrm{grad}\,p(t,x,y),\; V(x)) =$$
$$= -\frac{\rho(x,y)}{t}p(t,x,y)\,(\dot{\gamma}(\rho),\;V(x)) + (F(t,x,y),\;V(x))\,q(t,x,y),$$

где векторное поле F удовлетворяет неравенству

$$\|F(t,x,y)\| < c\,q(t,x,y), \quad t>0, \quad x,y\in M.$$

Для доказательства следует продифференцировать равенства (3), (3a) вдоль $V(x)$ и применить замену (9).

1. *Yosida K.* On the fundamental solution of the parabolic equation in a Rimannian space // Osaka Math. J. – 1953. – **5**, № 1. – P. 65 – 74.
2. *Bondarenko V.* Diffusion sur variété de courbure non positive // Comptes Rendus A. S. – 1997. – **324**, № 10. – P. 1099 – 1103.
3. *Бондаренко В. Г.* Ковариантные производные полей Якоби на многообразии неположительной кривизны // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 6. – С. 755 – 764.

Получено 31.07.97,
после доработки — 22.12.97